现代数学基础丛书 132

图的可嵌入性理论

（第二版）

刘彦佩　著



科学出版社

www.sciencep.com

(O-3832.0101)


ISBN 978-7-03-026951-5

销售分类建议：高等数学

定 价：76.00 元

现代数学基础丛书 132

图的可嵌入性理论

(第二版)

刘彦佩 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书在第一版的基础上修订再版，主要增添了有关图在亏格非零曲面上的可嵌入性方面的一批新结果，主要内容包括：多面形与曲面、联树模型、图上的空间、平面上的图、平面可嵌入性、高斯交叉问题、平面嵌入、纵横曲面嵌入、网格可嵌入性、嵌入的同构、图的分解、曲面可嵌入性，曲面上的图、极嵌入问题、图和上图拟阵、纽结不变量等．本书在第一版的基础上，除文字上的更改与精简和结果的简化与改进外，还充实了许多新的内容，例如增添了图的扩充树，提供了 Jordan 定理第一多面形式的充分性，增添了一般曲面的纵横表示，使得可以将平面情形拓广到曲面的情形，提供了更有效地识别嵌入同构的算法，以及对嵌入非对称化的过程等．

本书可供数学（包括纯粹数学与应用数学）、理论物理（统计力学与量子物理）、计算机科学（逻辑设计、算法及其复杂性）、电子工程（集成电路的布局与布线）等专业的大学生、研究生、教师及科研工作者参考阅读．

图书在版编目（CIP）数据

图的可嵌入性理论/刘彦佩著．—2 版，—北京：科学出版社，2010
(现代数学基础丛书；132)
ISBN 978-7-03-026951-5
I. ① 图… II. ① 刘… III. ① 图（数学）-嵌入（数学） IV. O157.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 040102 号

责任编辑：张 扬 房 阳／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1994 年 10 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2010 年 3 月第 二 版 印张：25 1/4
2010 年 3 月第一次印刷 字数：478 000
印数：1—3 000

定价：76.00 元

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版序

自 1994 年本专著第一版问世至今 15 年来, 不管是国内还是国外, 在有关方面都作了不少新研究, 也取得了不少新进展.

在国内, 近 15 年来的发展, 无论是就参加者的人数, 还是就成果的广度与深度, 均可以说是史无前例.

首先, 将确定图的最大亏格与上可嵌入性的研究推进到几乎完满解决的最后冲刺. 自本书作者于 1979 年证明所有除树外的连通图的不可定向最大亏格均为其 Betti 数, 或者说, 它们都是上可嵌入的, 剩下就是确定图的可定向最大亏格. 此后的工作只集中在可定向的方面. 虽然当时也意识到非上可嵌入的图与所有图相比为数不会很多, 然而时至今日, 仍不能确定它们. 所谓这个问题的完满解决, 也就是指将这些例外的图简单地提取出来.

后来, 图的嵌入联树模型的形成, 使遍数所有的嵌入得以有效实现.

进而, 使确定更普遍图的曲面嵌入亏格分布, 甚至平均亏格与亏格成为可能, 并且已经取得了基础性的实现.

另外, 通过一些新的曲面模型的建立, 使得可以将在第一版中所形成的平面纵横扩张理论, 拓展到亏格非 0 的一般曲面.

在国外, 这里仅提三件事情.

第一件是 Archdeacon 和 Siran 合作于 1998 年在国际《图论杂志》上发表一文, 提出用 θ 图判定图的平面性. 然而, 本书作者于 20 年前, 即 1978 年, 在中国《应用数学学报》上发表的文章中提出的派生图 (即第一版中的平面性辅助图) 只是 θ 图的一种很小的子图. 所谓很小是指它的阶至多是原图阶的一个二次函数, 而 θ 图的阶却是原图阶的一个指数函数, 从中更显示了对一些专题研究的基础理论意义. 除第一版中涉及的之外, 本版还提供了借助派生图有效地识别一个嵌入可定向性的原理, 启示对于纯粹数学理论研究的作用.

第二件是 Ábrums 和 Slilaty 于 2003 年也是在国际《图论杂志》上合作发表一文, 提到本书第一版中有关同调与上同调的定理, 只有必要性而无充分性, 并且给出了一个“反例”. 然而, 从这个“反例”中可以看出, 他们忽略了所讨论曲面的无边缘性, 也忽略了对偶 2 空间基本元与图本身的关系, 即在每个节点处的可迁性.

第三件是有人提出, 第一版中关于确定两个嵌入同构的算法是“不实际”的. 本版则不仅仍保留原有的算法, 还给出了它们的简化形式. 用这种形式现在已经在计算机上实现. 详细情况由于超出本书强调基本理论的范围, 只能放入别的书中.

国内读者也曾提出过一些易引起费解的问题, 特别是理论基础方面在第一版过于简短, 而且推理形式与现存的书籍又不甚协调, 这些也不能不在本版中考虑.

本书与第一版相比, 除文字上的修改与精减和结果的简化与改进外, 还有以下主要补充:

(1) 在第 1 章中，通过重组舍去难读的曲面一节, 增添剖分与置换一节, 以便易于了解嵌入的同构和自同构.

(2) 增添了第 2 章, 以一种新的方式讨论曲面与多面形, 使读者更容易阅读和理解有关曲面以及图在其上嵌入的内容.

(3) 在第 3 章中，增添了图的扩充树以及关于近年来对于嵌入联树模型研究的基础. 特别值得一提的有两点：一个是第一次证明了从任何一个支撑树 (而不必最优!) 都可有效地确定出一个图的最大亏格, 最终实现了自 1979 年以来在这方面理论有效性的一个夙愿; 另一个是基于联树十分简单地一并证明了图的曲面嵌入可定向与不可定向插值定理, 这是以前未曾想到的.

(4) 改进了同调与上同调定理的表述, 以及对 MacLane, Whitney，Lefschetz 三个不同理论思路的定理, 一并自然地导出，避免了误解.

(5) 在第 5 章中，首次提供了 Jordan 定理第一多面形形式的充分性.

(6) 在第 6 章中，简化了其中主要定理的推导.

(7) 在第 8 章中，改善了原有定理的表述, 同时也简化并修改了原有的一些证明.

(8) 在第 9 章中，增添了一般曲面的纵横表示，使得可以将平面情形拓广到曲面的情形, 其中, 两个模型是新的.

(9) 在第 11 章中, 提供了更有效地识别嵌入同构的算法以及对嵌入非对称化的过程.

(10) 第 13 章是新增添的, 提供了对于图的曲面可嵌入性的各种识别, 虽然从理论上尚未证明有效，却实际可行. 特别是所提供的 4 种研究路线都会有独立的理论地位, 其中, 一条路线是将 Whitney, MacLane, Lefschetz 的判准, 一并拓展到一般曲面上.

(11) 各章均增添了一些必要且具有典型性的例子, 以便读者易于掌握和运用相关内容.

虽然第二版在内容的广度与深度方面比第一版都有明显的提高, 但仍远不是说有关方面的研究已近结束. 事实上, 第二版所涉及的只是目前人们多关注的一些与图的曲面嵌入有关的方面. 第一版中引发的诸如循环空间及其子空间所衍生的结构, 包括同调和上同调、从拟阵到组合几何以及纽结进一步的拓扑不变量等的研究, 似尚未引起人们应有的注意. 它们的发展将是在此版问世之后作者所希望看到的.

最后, 感谢国家自然科学基金 (批准号 10871021) 对本书中有关各项目和中国科学院科学出版基金对本书再版的支持与资助.

刘彦佩

2009 年 10 月于北京稻田村

第一版序

图的可嵌入性的概念导源于平面性. 关于后者, 至少组合学工作者深知, 它是图论中重要的研究课题之一. 早在 20 世纪 30 年代初, 首先是波兰的数学家 K.Kuratowski, 其后不久, 还有美国的数学家 H. Whitney 和 S. MacLane 都作过精湛的研究, 他们在这方面都创立了各自的理论. 时至今日, 仍不减其生命力. 这些均已被世人所承认. 然而, 本书则打算提供另一种看来在文献中还是新鲜的理论.

在 20 世纪 50 年代, 中国数学家吴文俊基于代数拓扑学中的上同调理论, 揭示了判定图的平面性的一个判准. 另一方面, 十多年之后, 生于英国的加拿大数学家 W.T. Tutte, 基于在 50 年代他本人引进的实域上链群的理论, 也发现了一个判准. 然后, 于 80 年代, 本书作者基于二元域 (GF(2)) 上的空间理论, 将这两个判准简化为一个. 这就是在 5.2 节中所说的吴 (文俊)–Tutte 定理.

于 20 世纪 60 年代初, 从 L. Auslander 和 V. Parter 发表用计算机的算法思想判定图的平面性方面的第一篇文章, 直到 J. Hopcroft 和 R. Tarjan 的第一个线性时间算法的出现, 在文献中讨论这一经典课题的文章竟有数百篇之多. 在 70 年代, 吴文俊也构造了一种算法, 将它转化为解一组模 2 方程的问题. 接着, 本书作者把这一结果改进到每个方程至多含有两个模 2 变量. 然后, 他又得到了一些新的判准, 表明从算法复杂性的角度来看, 平面性的问题相当于在 5.3 节中引进的平面性辅助图上求一个支撑树, 5.4 节中的主要定理就是这些判准.

第 7 章提供了第 5 章中所描述的基本理论的进一步发展, 对于平面性和平面嵌入, 揭示了基于确向树与确向嵌入的禁用构形的完备集. 这就使我们能够求出节点数和边数均为原图的节点数和边数的线性函数的平面性辅助图, 从而在算法复杂性上也达到了线性的顶峰.

第 2~4 章是第 5 章和第 7 章的基础. 在第 2 章中, 引进了确向树和确向上树, 以及它们的一些将会用到的性质. 第 3 章是关于图中的空间. 其中包括循环空间, 上循环空间, 双循环空间, 以及它们的结构. 第 4 章处理平面图的至关重要的结果. 例如, 那些由 Euler 公式能导出的, 唯一性, 直线和凸表示等. 特别是还讨论了 Jordan 曲线定理的多面形模式. 当然, 第 1 章简述了全书所必需的有关集合、序、图、群以及曲面的基本知识.

在第 6 章中, 可以看出平面性的理论, 怎样用于接触高斯的平面曲线交叉问题. 虽然, 于 30 年代, 它首先由 M. Dehn 解决. 不过, 他的解答不是像高斯所猜想的. 事实上, 高斯猜想确用不同的方法于以证实. 但, 这里提供了一种新的看上去较为

简单的证明.

第 8 章和第 9 章, 包含了本书作者最近在纵横可嵌入性与网格可嵌入性方面的一系列新结果. 其要旨是使得这种嵌入中每一条边上的折数尽量地小以致没有折. 第 8 章从事于叁、双和单可嵌入性. 也就是说只允许每边至多有三、二和一个折的情形. 在第 9 章中, 研究 0 可嵌入性或者说网格可嵌入性. 它是最难的一种情形. 这里的论题动意于为超大规模集成电路设计中的布局, 特别是布线提供一个理论基础.

第 10 章是关于确定一个曲面上的二个多面形是否同构的问题. 对于可平面图, 这个问题首先由 L. Weinberg 多项式地解决了. 现在, 根据 J.Hopcroft 和 J.Wong 的说法我们还知道它是线性可解的. 对于一般的多面形, 在这里利用确向术处理这个问题. 而且, 对于非可平面图可以利用相仿的方法处理.

第 11 章和第 12 章, 着重讨论非可平面图. 第 11 章所讨论的分解可分为两个部分. 其一是将一个图分解为各分图均有较高的连通度. 其二是使各分图均为可平面的或者是纵横的, 并且要求分图之数目越小越好, 或者说每个分图含的边越多越好. 第 12 章是关于曲面可嵌入性. 它有两个重要组成部分. 其一即所谓上可嵌入性, 或者说使得所在曲面的亏格为最大. 其二是下可嵌入性, 即使所在曲面的亏格为最小. 前者用确向术构造性地得到了解决. 虽然, 在这章中可以看到商嵌入对于确定不少图类的下可嵌入性起了重要作用. 其中包括 Hilbert-Cohn Vossen 的引线问题的解决. 后者距完全解决仍很遥远.

在第 13 章中, 提出和解决了一些最优化的问题. 其中, 人们可能会想到最小折数与最小面积的问题尤其对于那些从事超大规模集成电路布局设计的人不无裨益. 这里, 也包括了本书作者的最新的研究进展.

正如人们所意识到的, 拟阵是这样的一个对象, 当图为非可平面的, 它起着对偶图的作用. 第 14 章研究一个拟阵是二分的, 正则的以及图的或上图的表征. 这些均视为平面性理论的深入发展. 它首先应归功于 W.T. Tutte 的开创性的工作. 这里我们用自己的方式讨论.

最后, 在第 15 章, 着眼于纽结问题从拓扑学到组合学的发展. 对于边上带二元权的平面图, 提供了二类组合不变量. 由此出发, 可导出 Jones 多项式和括号多项式这两类新的拓扑不变量作为特殊情形.

本书的主要目的在于为上面提到的有关可嵌入性的问题, 提供一种理论处理. 同时, 也考虑了算法构造. 为了节省篇幅, 每章最后一节均安排为注记以便将有关问题的最新进展, 理论与实际的背景, 以及一些历史的发展作一简要说明. 同时, 也提出了一些公开的问题和可能有助于进一步研究的建议, 以供在有关方面有兴趣的读者猎奇. 然, 这里不允许我们讨论算法的方方面面, 既使可以自然地导出. 因为这或许会使本书之预定的页数增加一倍. 由于同样的原因, 我们也只能略去有关地图

的理论及其计数. 虽然, 这方面的结果正灿烂夺目.

在结束之前, 我不能不对那些在学术上或技术上, 对本书作过贡献的人们, 表达对他们的衷心的感谢. 由于版面所限, 只能在这里提到一小部分人的名字. 首先, 本项研究之初, 曾得到吴文俊教授文章的启迪和 W.T. Tutte 教授文章的充实. 没有他们的贡献, 这本书也许绝难在此时问世. 同时, P.L. Hammer, 许国志, F.S.Roberts, P. Rosenstiehl, B. Simeone, 万哲先, 王元, 吴方, 越民义等教授一直关心作者的研究进展. E. Aparo, 马仲蕃, P. Marchioro, A. Morgana, P. Petreschi, 徐伟宣, 颜基义等教授经常与作者讨论有关问题. 在国内外所办的讨论班的听众, 如崔显峰、董峰明、康羽、李安平、李祥贵、刘新 (博士)、刘莹、吕涛军、任韩、孙晓荣 (博士)、C.H.Velasquez(博士)、徐寅峰 (博士)、杨振起、于濂、郑茂林 (博士) 等部分或全部地勘校此书初稿. 当然, 现存的任何错处均是我本人的责任. 最后绝非次要, 我还得特别地感谢加拿大滑铁卢大学的组合学与最优化系, 美国罗杰斯大学的运筹学中心和意大利罗马大学 (主校) 的统计系的热情好客和各国的研究基金, 以及我国国家自然科学基金对本书中有关各项目的研究资助.

刘彦佩

1994 年 4 月于北京

目　录

第1章　预 备 知 识

为方便起见，全书采用通常的逻辑约定：和、积、否定、蕴意、等价、任意量和存在量分别用符号 $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ 和 $\exists$ 表示.

在书中，$(i.j.k)$ 表示在第 i 章、第 j 节中的第 k 项，$X[k]$ 表示参考文献中作者(们) X 的第 k 款.

1.1　集合与关系

一个集合就是具有共性的一类对象的全体. 这个对象可以是数、符号、字母等，甚至还可以是集合.

当然，这个集合不包括所定义的那个集合本身以免自相矛盾，其中的对象称为这个集合的*元素*.

总是用小写斜体字母表示元素，用大写字母表示集合. 说法 "x 是 (不是) 集合 M 的一个元素" 用如下的符号表示：

$$x \in M (x \notin M).$$

一个集合通常用一种性质所刻画. 例如，

$$M = \{x \mid x \leqslant 4, \text{正整数}\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

一个集合 M 的*基数*(当 M 为有限时，即它的元素的数目) 用 $|M|$ 表示. 对于上面定义的 M，自然有 $|M| = 4$.

令 A, B 是两个集合. 如果 $\forall a,\ a \in A \Rightarrow a \in B$，则称 A 为 B 的*子集*，记为 $A \subseteq B$，进而定义三个主要的运算：并、交和差分别如下：

$$A \bigcup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \tag{1.1.1}$$

$$A \bigcap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \tag{1.1.2}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \tag{1.1.3}$$

如果 $B \subseteq A$，则

$$A \setminus B = A - B,$$

用 $\overline{B}(A)$ 表示, 并称之为 B 对 A 的补.

如果所有的集合都是 Ω 的子集, 则集合 A 对 Ω 的补简单地写为 $\overline{A}$. 空集就是一个没有任何元素的集合, 总是用 $\varnothing$ 表示. 对于 Ω 的子集间的上述运算, 服从如下的规律:

集合性 1　幂同律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$A\bigcap A = A\bigcup A = A. \tag{1.1.4}$$

集合性 2　交换律: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A\bigcup B = B\bigcup A, \quad A\bigcap B = B\bigcap A. \tag{1.1.5}$$

集合性 3　结合律: $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} A\bigcup(B\bigcup C) &= (A\bigcup B)\bigcup C, \\ A\bigcap(B\bigcap C) &= (A\bigcap B)\bigcap C. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

集合性 4　吸收律: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A\bigcap(A\bigcup B) = A\bigcup(A\bigcap B) = A. \tag{1.1.7}$$

集合性 5　分配律: $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} A\bigcup(B\bigcap C) &= (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C), \\ A\bigcap(B\bigcup C) &= (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C). \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

集合性 6　通界律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$\varnothing\bigcap A = \varnothing, \quad \varnothing\bigcup A = A, \quad \Omega\bigcap A = A, \quad \Omega\bigcup A = \Omega. \tag{1.1.9}$$

集合性 7　单补律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$A\bigcap\overline{A} = \varnothing, \quad A\bigcup\overline{A} = \Omega. \tag{1.1.10}$$

由这些定律出发可以得到很多重要结果, 这里仅列出一些后面将会用到的.

定理 1.1.1　$\forall A \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} &\forall X \subseteq \Omega, \quad [(A\bigcap X = A) \vee (A\bigcup X = X)] \Rightarrow A = \varnothing, \\ &\forall X \subseteq \Omega, \quad [(A\bigcap X = X) \vee (A\bigcup X = A)] \Rightarrow A = \Omega. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

定理 1.1.2　$\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A\bigcap B = A \Leftrightarrow A\bigcup B = B. \tag{1.1.12}$$

定理 1.1.3 $\forall A,B,C\subseteq\Omega$,

$$(A\bigcap B=A\bigcap C)\wedge(A\bigcup B=A\bigcup C)\Leftrightarrow B=C. \tag{1.1.13}$$

定理 1.1.4 $\forall A\subseteq\Omega$,

$$\overline{\overline{A}}=A. \tag{1.1.14}$$

定理 1.1.5 $\forall A,B\subseteq\Omega$,

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B},\quad \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}. \tag{1.1.15}$$

由上所述可以看出 $\overline{\varnothing}=\Omega$ 和 $\overline{\Omega}=\varnothing$, 进而还可以看出对称性 (或者说, 对偶性): 任何一个关于 $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, Ω 的结论均可通过交换 $\cup$ 和 $\cap$, $\varnothing$ 和 Ω 而得出另一个结论.

对于 $A,B\subseteq\Omega$, 从 A 到 B 的一个**单射**是指这样的一个映射 $\alpha:\ A\to B$, 使得 $\forall a,b\in A$,

$$a\neq b\Rightarrow\alpha(a)\neq\alpha(b).$$

单射也称为 1–1 对应. 一个**满射**则是这样的一个映射 $\beta:\ A\to B$, 使得 $\forall b\in B$,

$$\exists a\in A,\quad \beta(a)=b.$$

如果一个映射既是单射又是满射, 则称为**双射**. 如果两个集合之间有一个双射, 则称它们是**同构的**. 用 $A\sim B$ 表示 A 与 B 同构. 同构的集合具有相同的基数. 对于有限集 A 和 B, 判定它们同构与否是微不足道的, 因为这时有 $\forall A,B\subseteq\Omega$,

$$A\sim B\Leftrightarrow|A|=|B|.$$

对于一个集合 M, $M\times M=\{\prec x,y\succ|\ \forall x,y\in M\}$ 称为 M 的**笛氏积**, 其中当 $x\neq y$ 时, $\prec x,y\succ\neq\prec y,x\succ$.

所谓集合 M 上的一个**二元关系**是指 $M\times M$ 的一个子集. 形容词 "二元" 常被忽略. 如果对于 $x,y\in M$, 满足关系 R, 则记 $\prec x,y\succ\in R$ 或 xRy. 一个**序**, 记为 $\preceq$, 就是这样的一个关系 R, 使得满足如下的三个定律:

关系性 1 反射律: $\forall x\in M,\ xRx$.

关系性 2 反对称律: $\forall x,y\in M,\ xRy\wedge yRx\Rightarrow x=y$.

关系性 3 传递律: $\forall x,y,z\in M,\ xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz$.

如果一个集合 M 上带有一个序 $\preceq$, 则称之为**偏序集**, 记为 $(M,\preceq)$.

定理 1.1.6 对于一个偏序集 $(M,\preceq)$, $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$,

$$x_1\preceq x_2\preceq\cdots\preceq x_n\preceq x_1\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n. \tag{1.1.16}$$

有时, 称定理 1.1.6 为*反循环律*. 如果一个关系只满足关系性 1 和关系性 3, 但不满足关系性 2, 则称它为*拟序*, 记为 $\cdot\!\prec$. 一个集合 M, 若带有一个拟序 $\cdot\!\prec$, 则称它为*拟序集*, 记为 $(M,\cdot\!\prec)$.

定理 1.1.7　一个拟序集 $(M,\cdot\!\prec)$ 的任何一个子集 S 本身也是一个拟序集, 其上的拟序为限制在 S 上的部分.

如果在 M 上的一个拟序 R 还满足如下的对称律 (关系性 $\tilde{2}$), 则称它为一个*等价关系*, 或简称为*等价*, 记为 $\sim$.

关系性 $\tilde{2}$　对称律: $\forall x,y\in M,\ xRy\Rightarrow yRx$.

对于 M 上的一个等价 $\sim$, 可以定义 $x(M)=\{y\mid\forall y\in M,y\sim x\}$, 称之为 x 在 M 中的*等价类*. 由 M 上的所有等价类构成的集合称为 $(M,\sim)$ 的*商集*, 记为 $M/\sim$. 在一个拟序集 $(M,\cdot\!\prec)$ 上, 令 $\sim_{\cdot\prec}$ 依如下方式的确定: $\forall x,y\in M$,

$$x\sim_{\cdot\prec}y\Leftrightarrow(x\cdot\prec y)\wedge(y\cdot\prec x),\tag{1.1.17}$$

则容易看出 $\sim_{\cdot\prec}$ 是 M 上的一个等价, 而且 $(M/\sim_{\cdot\prec},\cdot\!\prec)$ 也是一个拟序集.

定理 1.1.8　一个拟序集 $(M,\cdot\!\prec)$ 是一个偏序集当且仅当 $M/\sim_{\cdot\prec}=M$, 或者说, 它满足反循环律.

在一个偏序集 $(M,\preceq)$ 中, 可以由*反反射律*

$$\neg x\in M,\quad x\prec x,$$

传递律

$$(x\prec y)\wedge(y\prec z)\Rightarrow x\prec z$$

和

$$x\preceq y\Leftrightarrow(x\prec y)\vee(x=y)$$

定义这个序的*真包含*, 用 $\prec$ 表示. 如果 M 上的序 $\preceq$ 满足如下所述的交错律 (关系性 4), 则称它为*全序*或*线性序*:

关系性 4　交错律: $\forall x,y\in M,\ x\not\preceq y\Rightarrow y\preceq x$.

带有一个全序的集合被称为*链*. 一个含有 n 个元素的链的*长度*定义为 $n-1$. 由定理 1.1.7 和上述定义, 即可得如下定理:

定理 1.1.9　一个偏序集的任何一个子集均为偏序集, 而且任何链的子集仍为链.

由定义可知集合 M 上的一个关系 R 的*逆*为 R^*,

$$\forall x,y\in M,\quad xR^*y\Leftrightarrow yRx.$$

经过检查关系性 1～ 关系性 3, 容易得到如下定理:

定理 1.1.10 (对偶准则) 一个序的逆本身也是一个序.

在一个偏序集 $(M, \preceq)$ 中, 可以有一个元素 a, $\forall x \in M, a \preceq x$. 根据关系性 2, 如果这样的元素存在, 则它必是唯一的. 这时, 称它为*最小元*, 用 O 表示. 对偶地有*最大元*, 用 I 表示. 它们如果存在, 则称为 M 的*通界*.

定理 1.1.11 任何有限的链都有通界.

在偏序集 $(M, \preceq)$ 中, 元素 $a \in M$, $\forall x \in M$, $x \preceq a \Rightarrow x = a$, 则称 a 为*极小元*. 对偶地有*极大元*, 即 $a \in M$, $\forall x \in M$, $a \preceq x \Rightarrow a = x$.

定理 1.1.12 任何有限非空的偏序集 $(M, \preceq)$ 都有极小元和极大元.

对于两个偏序集 $(M, \preceq)$ 和 $(N, \preceq)$, 一个映射 $\tau:\ M \to N$, 如果满足 $\forall x, y \in M$,

$$x \preceq y \Rightarrow \tau(x) \preceq \tau(y), \tag{1.1.18}$$

则称之为*保序*或*同序*. 进而, 如果一个同序 $\tau:\ M \to N$ 还满足 $\forall x, y \in M$,

$$\tau(x) \preceq \tau(y) \Rightarrow x \preceq y, \tag{1.1.19}$$

则称之为*同构*. 两个偏序集 $(M, \preceq)$ 和 $(N, \preceq)$ 间如果存在一个同构, 则称它们是*同构的*, 记为 $(M, \preceq) \cong (N, \preceq)$. 所有互相同构的偏序集被视为相同的. 然而一般来说, 判定两个偏序集是否同构并不容易.

偏序集 $(M, \preceq)$ 的子集 X 的*上界*就是这样的一个元素 a, $\forall x \in X$, $x \preceq a$. 所谓*最小上界*(或 l.u.b.) 就是这样的上界 b, $a \preceq b \Rightarrow a = b$, 其中 a 也是 X 的一个上界. 对偶地可知*下界*和*最大下界*(g.l.b.). 一个偏序集的*长度*就是其中链的长度的最小上界. 一个*格*就是这样的一个偏序集, 使得它的任何两个元素 x 和 y 都有一个最大下界, 称之为*下丘*, 并用 $x \wedge y$ 表示, 而且有一个最小上界, 称之为*上谷*, 并用 $x \vee y$ 表示. 因此, 常用 $L = (M, \preceq; \vee, \wedge)$ 表示格. 如果一个格的所有子集都有一个最大下界和一个最小上界, 则称它是*完全的*.

令 2^{Ω} 为由 Ω 的所有子集组成的集合. 由 1.1 节中所讨论的可知 $(2^{\Omega}, \subseteq; \cup, \cap)$ 是一个格. 实际上有下面的定理.

定理 1.1.13 一个偏序集是一个格当且仅当它满足幂同律、交换律、结合律和吸收律.

两个格 $(M, \preceq; \vee, \wedge)$ 和 $(N, \preceq; \vee, \wedge)$ 被称为是*同构的*, 如果在两个偏序集 $(M, \preceq)$ 和 $(N, \preceq)$ 之间存在一个同构 τ, 使得 $\forall x, y \in M$,

$$(\tau(x \vee y) = \tau(x) \vee \tau(y)) \wedge (\tau(x \wedge y) = \tau(x) \wedge \tau(y)). \tag{1.1.20}$$

当然, 一般来说, 判定两个格是否同构也不是很容易的.

1.2　剖分与置换

一个集合 X 的剖分就是它的子集的这样一个集合, 使得其中任意两个子集均无共元, 并且所有这些子集的并就是 X 本身.

定理 1.2.1　集合 X 的任一剖分 $P(X)$ 确定 X 上的一个等价关系, 使得 $P(X)$ 中的每个子集都是一个等价类.

令 $P(X)=\{p_1,p_2,\cdots,p_{k_1}\}$ 和 $Q(X)=\{q_1,q_2,\cdots,q_{k_2}\}$ 是 X 的两个剖分. 若对于任一 $q_j(1\leqslant j\leqslant k_1)$ 都存在一个 $p_i(1\leqslant i\leqslant k_2)$, 使得 $q_j\subset p_i$, 则称 $Q(X)$ 为 $P(X)$ 的一个细分, $P(X)$ 为 $Q(X)$ 的一个粗化, 除非 $P(X)=Q(X)$. 集合 X 的那个所有子集都只含有一个元素, 或只含有一个子集的剖分, 分别称为 0 剖分或 1 剖分, 用 $0(X)$ 或 $1(X)$ 表示.

定理 1.2.2　对于一个集合 X 和它的一个剖分 $P(X)$, 0 剖分 $0(X)$ (或 1 剖分 $1(X)$) 可以通过至多 $O(|X|)$ 次细分 (或粗化) 而得到.

证　只需考虑最差的情形, 即从 $P(X)=0(X)$(或 $1(X)$) 开始, 每次细分 (或粗化) 只增加 (或减少) 一个子集. 因为这时需要

$$1+2+2^2+\cdots+2^{\log|X|}=\frac{2^{1+\log|X|}-1}{2-1}=O(|X|), \tag{1.2.1}$$

即 $O(|X|)$ 次细分 (或粗化) 得到 $0(X)$ (或 $1(X)$), 即得定理结论.

令 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$ 和 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_t\}$ 为集合 X 的两个剖分, 它们的族交就是

$$P\bigcap Q=\bigcup_{i=1}^{s}\{p_i\bigcap q_1,p_i\bigcap q_2,\cdots,p_i\bigcap q_t\}. \tag{1.2.2}$$

事实上, $\{p_i\cap q_1,p_i\cap q_2,\cdots,p_i\cap q_t\}$ 对于 $i=1,2,\cdots,l$ 全是 p_i 的剖分.

定理 1.2.3　族交满足交换律和结合律, 而且 $P\cap Q$ 同是 P 和 Q 的细分.

集合 X 的一个置换就是 X 上的一个双射. 由于集合的元素可以选择任何彼此无异的对象, 这里用正整数将它们区别, 如 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$, 或简单地, $X=\{1,2,\cdots\}$, 从而集合 $L=\{1,2,\cdots,l\}$ 的一个置换可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & l \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_l \end{pmatrix}. \tag{1.2.3}$$

如果 $i_j=j$ 对任何 $1\leqslant j\leqslant l$, 则称这个置换为幺置换. 可以证明幺置换是唯一的.

定理 1.2.4　令 π 为集合 $L=\{1,2,\cdots,l\}$ 的一个置换, 则对于任何 $i\in L$ 都存在一个整数 $n\geqslant 0$, 使得 $\pi^n i=i$.

证 用反证法. 若不然, 则由 1–1 性有限递归原理 (Liu, Y.P.[35])导致与 l 的有限性矛盾.

在定理 1.2.4 的基础上, 集合 $X_i = \{i, \pi i, \pi^2 i, \cdots, \pi^{n-1} i\}$ 称为 i 的**轨道**. 因为 X_i 中任一元素的轨道都与 i 的相同, 就称为 π 的一个轨道, 用 $\mathrm{Orb}_\pi\{i\}$ 表示, 或简单地, 用 $\{i\}_\pi$ 表示. 因为一个置换的任何两个轨道不是相同就是无共元, 它的所有轨道形成 L 的一个剖分.

一个轨道连同自然的序本身就是一个置换, 并称之为*循环置换*, 或简称为*循环*. 相应地, $\mathrm{Orb}_\pi\{i\}$ 的循环用 $\mathrm{Orb}_\pi(i)$ 表示, 或简记为 $(i)_\pi$. 由于轨道之间无公共元, 考虑到无共元循环的合成满足交换律和结合律, 一个置换总能表示为循环的乘积. 一个循环的阶就是它的长度. 一个循环所含元素的个数被称为它的*长度*. 置换中的一阶循环称为它的*不动点*. 所有不动点在置换的循环表示中常被忽略, 如下例所示:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (1,2,5,3)(4,6)(7) = (1,2,5,3)(4,6).$$

然而, 两个有共元循环的积一般不满足交换律. 例如, $P_1 = (1,3,2)$ 和 $P_2 = (1,2,4)$, 则有

$$P_1P_2 = (2,4,3) \neq (1,3,4) = P_2P_1.$$

因为 k 阶循环 C 总有 $C^{sk} = 1$, 其中 s 是任一正整数, 由定理 1.2.4 可以看出, 如果置换 $\pi = C_1C_2\cdots C_n$, 其中 C_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 n_i 阶循环, 并且彼此无共元, 则 π 的阶为 $[n_1, n_2, \cdots, n_n]$, 即 $n_1, n_2, \cdots, n_n$ 的最小公倍数 $(\mathrm{lcm}\{n_1, n_2, \cdots, n_n\} = [n_1, n_2, \cdots, n_n])$.

定理 1.2.5 循环 $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 的唯一逆是循环

$$C^{-1} = (c_n, c_{n-1}, \cdots, c_1).$$

令 $\Sigma_{|L|}$ 为 L 上所有置换的集合, L 的基数也称为胞上置换的*次*. 对于 $\Sigma_{|L|}$ 中的两个置换 π 和 σ, 如果存在置换 $\rho \in \Sigma_{|L|}$, 使得 $\pi = \rho\sigma\rho^{-1}$, 则称 π 和 σ 对 ρ 是*共轭*的.

令 $\gamma = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 是 $\Sigma_{|L|}$ 中的一个循环, τ 是 $\Sigma_{|L|}$ 中的一个置换. 对于 $y \in L$, 如果 $x = \tau^{-1}y \notin \gamma$, 则 $\tau\gamma\tau^{-1}y = \tau x = \tau(\tau^{-1}y) = y$; 否则, 如果 $x = \tau^{-1}y = x_i (1 \leqslant i \leqslant r)$, 则 $\tau\gamma\tau^{-1}y = \tau x_i = x_{i+1}$. 这就意味着

$$\tau\gamma\tau^{-1} = \tau(x_1, x_2, \cdots, x_r)\tau^{-1} = (\tau x_1, \tau x_2, \cdots, \tau x_r). \tag{1.2.4}$$

对于 $\pi \in \Sigma_{|L|}$, 记 $c(\pi)$ 为在它的循环剖分中循环的个数和 l_i, 即其中长度为 $i (1 \leqslant i \leqslant |L|)$ 的循环数目. 置换 π 的*循环类型*就是 l_i $(1 \leqslant i \leqslant |L|)$ 的递降序列.

定理 1.2.6　两个置换是共轭的当且仅当它们有相同的循环类型.

证　对置换的循环剖分利用 (1.2.4) 式即可得必要性. 反之, 对任意两个同循环类型的置换, 不妨设它们每个都只有一个循环, 如 $\pi = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 和 $\sigma = (y_1, y_2, \cdots, y_r)$. 由 (1.2.4) 式, 令

$$\tau = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_r \end{pmatrix},$$

则 $\tau\pi\tau^{-1} = \sigma$, 从而 π 和 σ 是共轭的. ♮

关于置换的共轭对 $\{\pi, \sigma\}$, 下面两个特殊情形需要提及: 一个是 $\pi = \sigma$, 另一个是 $\pi = \sigma^{-1}$. 前者称为**自共轭**, 后者称为**逆共轭**. 如果 $\pi = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$, $\sigma = (y_1, y_2, \cdots, y_r)$, 则自共轭仅是对 $\tau = 1_r$, 即 r 次幺置换和逆共轭是对

$$\tau = (x_1, x_r)(x_2, x_{r-1}) \cdots (x_{\lfloor r/2 \rfloor}, x_{\lfloor r/2 \rfloor + 1}).$$

令 $D = \langle a_1, a_2, \cdots, a_d \rangle$ 是一个带线性序 $a_1 < a_2 < \cdots < a_d$ 的集合. 一个有序对 $\langle a_i, a_j \rangle$, 如果 $1 \leqslant j < i \leqslant d$, 则称之为一个**反序**. 记 $\mathrm{sgn}(\pi)$ 为带线性序 $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_d$ 的集合 $\prec x_1, x_2, \cdots, x_d \succ$ 对于

$$\pi = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_r \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r \end{pmatrix}$$

反序的总数. 若 $\sin(\pi)$ 是偶数, 则称 π 为**偶置换**; 若 $\sin(\pi)$ 是奇数, 则称为**奇置换**. 从一个置换 π 到 $\{1, -1\}$ 的映射 $(-1)^{\mathrm{sgn}(\pi)}$ 称为 π 的**奇偶性**. 长度为 2 的循环称为**对换**. 一个对换 (x_i, x_j), 不妨设 $x_i < x_j$ 和 $i < j$ 而不失一般性, 总是一个奇置换, 这是因为它有奇数个反序, 如 $\langle x_j, x_i \rangle$ 连同 (x_j, x_k) 和 (x_k, x_i), 其中 $i < k < j$.

由于循环

$$(a_1, a_2, \cdots, a_l) = (a_1, a_l)(a_1, a_{l-1}) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2), \tag{1.2.5}$$

任何置换均可表示为对换的乘积.

因为对于 $1 \leqslant j < k < l$,

$$(a_j, a_{k+1}) = (a_k, a_{k+1})(a_j, a_k)(a_k, a_{k+1}), \tag{1.2.6}$$

可见置换的对换表示不唯一. 形如 $(a_i, a_{i+1})(1 \leqslant i < l)$ 的对换被称为**邻换**.

定理 1.2.7　任何阶不小于 2 的置换 π 都有邻换表示, 并且与 $\mathrm{sgn}(\pi)$ 有相同的奇偶性.

证 首先, 证明这样的表示存在. 由 (1.2.5) 式和 (1.2.6) 式即得一个邻换表示. 然后, 证明同奇偶性. 考虑到一个对换和 (1.2.6) 式两端反序数都是奇数, 这个表示的反序总数与 $\mathrm{sgn}(\pi)$ 同奇偶性. ♮

定理 1.2.8 对于任意两个置换 π 和 σ 均有

$$\mathrm{sgn}(\pi\sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) + \mathrm{sgn}(\sigma) \pmod 2. \tag{1.2.7}$$

证 由于每个对换的反序数均为奇数, 由定理 1.2.7 导出 (1.2.7) 式成立. ♮

由 (1.2.6) 式可见

$$(-1)^{\mathrm{sgn}(\pi\sigma)} = (-1)^{\mathrm{sgn}(\pi)}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}, \tag{1.2.8}$$

即两个置换合成的奇偶性等于它们奇偶性的乘积.

定理 1.2.9 一个置换的所有对换表示都有与这个置换相同的奇偶性.

证 这是定理 1.2.7 和定理 1.2.8 的一个直接结果. ♮

1.3 图与网络

一个图, 用 $G = (V, E)$ 表示, 就是一个集合 V, 称为*节点集*, 它的元素称为*节点*, V 上的一个二元关系 $E \subseteq V * V = \{(u, v) \mid \forall u, v \in V, u \neq v\}$ 称为*边集*, 它的元素称为*边*. 注意, 其中 $(u, v) = (v, u)$. 有时, (u, u) 以及在 E 中有重元素也是允许的. (u, u) 称为*环*, E 的重元素称为*重边*. 若 V 中含有有限个节点, 则称这时的 G 为*有限的*. 本书只讨论有限图. 记 $\nu = |V|$, 称为 G 的*阶*, $\epsilon = |E|$ 称为 G 的*度*. 如果 $E = V * V$, 则称 G 为*完全图*, 记为 K_ν, 或统记为 K. 如果图 $H = (V(H), E(H))$ 满足关系 $V(H) \subseteq V$ 和 $E(H) \subseteq E$, 则称 H 为 G 的*子图*, 记为 $H \subseteq G$. 容易看出, 任何一个图均是同阶或更高阶的完全图的子图. 空图, 也记为 $\varnothing$, 是任何一个图的子图. 没有边的图称为*孤立图*. 只有一个节点的孤立图称为*平凡的*, 常记为 $\varnothing_1$.

定理 1.3.1 $\forall V_1 \subseteq V_2, E_1 \subseteq E_2$,

$$(V_1, E_1) = G_1 \subseteq G_2 = (V_2, E_2) \Leftrightarrow E_1 \subseteq V_1 * V_1. \tag{1.3.1}$$

与 1.1 节中集合的情形类似, 也可以定义*并*和*交*的运算. $\forall G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_1, E_2) \subseteq K$,

$$G_1 \bigcup G_2 = (V_1 \bigcup V_2, E_1 \bigcup E_2), \tag{1.3.2}$$

$$G_1 \bigcap G_2 = (V_1 \bigcap V_2, E_1 \bigcap E_2). \tag{1.3.3}$$

容易证明 $(2^K, \subseteq)$(2^K 为 K 的所有子图的集合) 是一个偏序集, 而且对于 $\cup$ 和 $\cap$ 满足幂同律、交换律、结合律和吸收律. 因此, 由定理 1.2.8, $(2^K, \subseteq; \cup, \cap)$ 形成一个格.

对于任一边 $e=(u,v)\in E$, 它的两个端点称为是相邻的, 或简记为 u adj v. 同时, e 与 u 或 v 关联, 简记为 e ind u 或 e ind v. 反之, u 或 v 也称为与 e 关联, 即 u ind e 或 v ind e. 每条边均可视为由两条半边组成, 它们被记为 $[u,v)$ 和 $(u,v]$, 分别不与 u 和 v 关联, 而与 v 和 u 关联. 一个节点 v 的次或价是指与 v 关联半边的数目, 记为 $\rho(v)$. 如果 $\rho(v)=1 \pmod 2$, 则称 v 为奇节点; 否则, 称为偶节点. 次为 $k(k\geqslant 0)$ 的节点也称 k次节点或 k节点. 一个 0 节点被称为孤立点, 1 节点也称为显节点或悬挂点.

定理 1.3.2 在任一图中, 奇节点的数目恒为偶数.

如果图 G 的一个子图 H 满足

$$E(H)=\{(u,v)\mid \forall u,v\in V(H),(u,v)\in E\},$$

则称 H 为 G 的节点导出子图. G 的一个子图 H, 若

$$V(H)=\{v\mid \exists e\in E(H), v \text{ ind } e\},$$

则称 H 为 G 的边导出子图. 常用 $G[V(H)]$ 和 $G[E(H)]$ 分别表示 G 的节点和边导出子图. 可以看出, $\forall H\subseteq G$,

$$H=G[V(H)]\Leftrightarrow \forall u,v\in V(H),\neg\ e=(u,v)\in E\setminus E(H)$$

和 $\forall H\subseteq G$,

$$H=G[E(H)]\Leftrightarrow \neg\ v\in V(H),\rho_H(v)=0.$$

令 $2^{[G;v]}$ 和 $2^{[G;e]}$ 分别为 G 中的所有节点和边导出子图的集合. 容易用 1.2 节中的关系性 1~ 关系性 3 验证 $(2^{[G;v]},\subseteq)$ 和 $(2^{[G;e]},\subseteq)$ 皆为偏序集. 进而, $(2^{[G;v]},\subseteq)$ 和 $(2^{[G;e]},\subseteq)$ 也都可视为格. 不过, 这时并和交在它们之中一般不是封闭的.

在图 G 中, 两个节点 u , v 之间的迹或途径, 用 $T_{rl}(u,v)$ 表示, 即这样的一个边的序列 $e_1,e_2,\cdots,e_l$, 使得

$$e_i=(v_i,v_{i+1}),\quad i=1,2,\cdots,l, u=v_1, v=v_{l+1},$$

其中 l 被称为长度. 若一个迹 $T_{rl}(u,v)$ 的两端 $u=v$, 则称它为闭迹或迂, 记为 $T_{rl}(u)$, 或简写为 T_{rl}. 如果一个迹中的所有边没有相同的, 则称它为游 或径, 记为 $T_r(u,v)$. 当 $u=v$ 时, $T_r(u,v)$ 被称为闭游或回, 记为 $T_r(u)$ 或 T_r.

如果一个游 $T_r(u,v)$ 的边导出子图 $H=G[E(T_r(u,v))]$ 满足条件

$$(\rho_H(u)=\rho_H(v)=1)\wedge(\rho_H(v_i)=2, i=1,2,\cdots,l-1),$$

则称它为路, 常记为 $P(u,v)$ 或 P. 闭路被称为圈, 常记为 $C(u)$ 或 C. 当然, 游和路都是边导出子图. 两个节点称为连通的, 即指在图中存在连接它们的一条路.

如果 G 中任何两个节点都是连通的, 则称 G 本身是**连通的**. 用 1.1 节中的关系性 1、关系性 $\tilde{2}$ 和关系性 3, 容易验证两点之间的连通性是 V 上的一个等价, 用 $\sim_c$ 表示.

定理 1.3.3 图 $G=(V,E)$ 是连通的当且仅当 $|V/\sim_c|=1$.

令 $\sigma=|V/\sim_c|$, 称 σ 为 G 的**连通片数** (或**分图数**). 对于一个节点 v, 记 $G-v=(V\setminus\{v\},E\setminus E_v)$, 其中, $E_v=\{e\mid\forall e\in E, e \text{ ind } v\}$. 如果节点 v 满足 $\sigma(G-v)>\sigma$, 则称它为**割点**. 类似地, **割边**为使 $\sigma(G-e)>\sigma$ 的边 e, 其中 $G-e=(V,E\setminus\{e\})$. 一个**树**就是度最小的连通图. 可以证明所有 ν 阶树的度均为 $\nu-1$.

定理 1.3.4 一个 ν 阶图是树当且仅当它的度为 $\nu-1$, 而且所有的边皆割边.

一个既无孤立点也无割点的图被称为**块**, 或者说是**不可分离的**. 用 1.2 节中关系性 1、关系性 $\tilde{2}$ 和关系性 3, 易见 "两条边在一个圈上" 的说法是边集上的一个等价, 记为 $\sim_b$.

定理 1.3.5 一个无孤立点的图是不可分离的当且仅当 $|E/\sim_b|=1$.

图 G 的一个子图 H, 如果 $V(H)=V$, 则 H 是 G 的一个**支撑子图**. G 的一个支撑圈称为 **Hamilton 圈**. 一个支撑回使得 G 的每一条边均出现, 则称为 **Euler 回**. 若一个图 G 有 Hamilton 圈或 Euler 回, 则分别称它为 **Hamilton 图**或 **Euler 图**.

定理 1.3.6 一个图 (连通) 是 Euler 图当且仅当它的节点全是偶的.

对于一个图 G, 若 $V=A+B$ (也就是 $A\cup B$ 且 $A\cap B=\varnothing$) 且 $G[A]$ 和 $G[B]$ 全是孤立图, 则称 G 为**二部图**, 记为 $G=(A,B;E)$. 如果

$$E=\{(u,v)\mid\ \forall(u\in A)(v\in B)\},$$

则称 $G=(A,B;E)$ 为**完全二部图**, 常记为 $K_{\alpha,\beta}$, 其中 $\alpha=|A|$ 和 $\beta=|B|$.

定理 1.3.7 一个图是二部图当且仅当它没有奇长圈.

如果 V 或 E 的一个子集中的任意两个元素在图 $G=(V,E)$ 中都是不相邻的, 则称这个子集为**独立的**. E 的独立子集也称为**对集**或**匹配**. 如果一个对集导出一个支撑子图, 则称之为**完满的** (或**完美的**). 对于 $a\in V$, 令

$$N_a=\{v\mid\forall v\in V, v\ \text{adj}\ a\}$$

和对于 $A\subseteq V$, 记

$$N(A)=\bigcup_{a\in A}N_a\setminus A.$$

定理 1.3.8 一个二部图 $G=(X,Y;E)$ 有一个完美对集当且仅当 $\forall A\subseteq X$ 和 $\forall A\subseteq Y$ 有 $|N(A)|\geqslant|A|$.

已经知道, 任何一个图均可在三维欧氏空间中实现. 用点表示节点, 用曲线 (实际上直线也是允许的) 表示边, 使得任何两条代表边的线除端点可能公共外 (这时

两边有公共端点), 不再有任何公共点. 图的这种表示称为它在这个空间上的一个**嵌入**. 然而, 不是所有的图均有在平面上的嵌入. 如果有这种嵌入, 则称它为**可平面的**.

在图 G 上的一个**双分**就是其上这样一个运算, 使得 $G=(V,E)$ 变为 $(V+\{w\},(E\setminus\{(u,v)\})+\{(u,w),(w,v)\})$. 自然, 它的逆也是有意义的. 如果一个图可以从另一个图经过一系列的双分而得到, 则称它们是**同胚的**.

定理 1.3.9　一个图是可平面的当且仅当它没有子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚.

对于两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$, 如果存在一个双射 $\tau: V_1\to V_2$, 使得 $\forall u,v\in V_1$,

$$(u,v)\in E_1 \Leftrightarrow (\tau(u),\tau(v))\in E_2, \tag{1.3.4}$$

则称它们是**同构的**. 由 (1.3.4) 式所确定的双射 τ 称为 G_1 和 G_2 间的一个**同构**. 若 $G_1=G_2=G$, 则这时的同构被称为 G 上的**自同构**. 一般来说, 在前面曾提到过的问题中, 判定两个图同构与否也许是最困难的.

类似地, 可以定义有向图, 用 $D=(V,A)$ 表示, 其中 V 为**节点集**, A 是一个二元关系, 使得 $A\subseteq V\times V=\{\prec u,v\succ \mid \forall u\in V,\forall v\in V\}$, 称为**弧集**. 上面所有的讨论均可类似地用于有向图. 特别地, 任何一个偏序集 $P=(M;\preceq)$ 均可用一个有向图表示, 记为 $\mathrm{Dos}=(M,\mathrm{Aos})$, 其中

$$\prec x,y\succ\in \mathrm{Aos}\Leftrightarrow (x\preceq y)\wedge(\neg z, x\prec z\prec y),$$

或者说, x 被 y **覆盖**, $x,y\in M$. 如果一个 ν 阶图伴随一个从它的节点集到整数集 (几乎总是 $\{1,2,\cdots,\nu\}$) 的单射 (双射), 则称它为**标定的**. 在标定之下, 节点的象被称为这个节点的**标记**. 当然, 二标定 (或有向) 图之间的同构必须考虑节点上的标记 (边上的方向).

一个**网络** N 就是这样的一个图 $G=(V,E)$, 使得在 E 上有一个实函数 $w(e)\in\mathbf{R}, e\in E$. 因此, 记 $N=(G;w)$. 通常, 在不引起混淆时, 也将网络 N 称为图 G.

一个网络 $N=(G;w)$, $G=(V,E)$ 和 $w(e)=-w(e)\in Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$, 即 $\bmod n (n\geqslant 1)$ 为整数群. 例如, $Z_1=\{0\}$ 和 $Z_2=B=\{0,1\}$ 等. 设 $x_v=-x_v\in Z_n (v\in V)$ 为变量. 讨论群 Z_n 上的方程

$$x_u+x_v=w(e)\ (\bmod n),\quad e=(u,v)\in E. \tag{1.3.5}$$

定理 1.3.10　方程 (1.3.5) 在群 Z_n 上有解当且仅当在 N 上不存在一个圈 C, 使得

$$\sum_{e\in C} w(e)\neq 0\ (\bmod n). \tag{1.3.6}$$

证 必要性. 假设 C 是 N 上的一个圈且满足 (1.3.6) 式. 由于方程 (1.3.5) 限制在 C 上的部分无解知, 方程 (1.3.5) 也不会有解. 因此, 在 N 上不存在这样的圈.

充分性. 令 $x_0 = a \in Z_n$, 对任选的始节点 $v_0 \in V$. 若第 i 步选 $v_i \in V$ 且得 $x_i = a_i$. 设 $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$ 且 v_{i+1} 还未用过 (否则, 退一步作为 i). 在第 $i+1$ 步选 v_{i+1} 且得 $a_{i+1} = a_i + w(e_i)$. 如果得到一个圈 $\{e_k, e_{k+1}, \cdots, e_{k+l}\}$, $e_j = (v_j, v_{j+1})(k \leqslant j \leqslant k+l, v_{k+l+1} = v_k)$, 则由条件 (1.3.6) 有

$$
\begin{aligned}
a_{k+l+1} &= a_{k+l} + w(e_{k+l}) \\
&= a_{k+l-1} + w(e_{k+l-1}) + w(e_{k+l}) \\
&= \cdots\cdots \\
&= a_k + \sum_{j=k}^{k+l} w(e_j) = a_k.
\end{aligned}
$$

若还有节点未达到, 可以在除去已用过边的网络上, 从任何一个选过的节点开始, 继续这个过程. 由有限递归原理 (Liu, Y.P.[35]), 总可得方程 (1.3.5) 的一组解. ▯

当 $n=2$ 时, 定理 1.3.10 有多方面的应用. 在文献 (Liu, Y.P.[33]) 中可以看到一些. 同时, 还可推广到乘法群上, 不过方程不再是线性的.

1.4 群与空间

一个群, 用 $\Gamma = (X, \diamondsuit)$ 表示, 就是一个集合 X 连同一个二元关系 γ: $X \times X \to X$, 也许用 $x\diamondsuit y$ 代表 $\prec x, y \succ \gamma$, 而将 $\diamondsuit$ 视为运算更方便, 使得如下的三条定律得到满足:

群性 1 (结合律) $\forall x, y, z \in S$, $(x\diamondsuit y)\diamondsuit z = x\diamondsuit(y\diamondsuit z)$.

群性 2 (幺元律) $\exists 1_\Gamma$(或简记为 1) $\in S, \forall x \in S$, $x\diamondsuit 1_\Gamma = x$.

群性 3 (逆元律) $\forall x \in S, \exists y \in S$, $x\diamondsuit y = 1_\Gamma$.

群性 2 中的元素 1 被称为*右幺元*, 群性 3 中的 y 为 x 的*右逆*. 类似地, 可以定义*左幺元*和一个元素的*左逆*. 可以证明它们全是唯一的, 而且左的与右的相等. 因此, 可以称 1 为*幺元*, 称 x^{-1} 为 x 的*逆*.

一个群 $\Gamma = (X, \diamondsuit)$ 的阶就是 $|X|$. 可以看出 $(1, \diamondsuit)$ 是一个群, 称之为*平凡群*或*幺群*. 在本书中, 如无特别说明, 总是用 $\Gamma = X$ 表示群 $\Gamma = (X, \diamondsuit)$. 如果一个群 Γ 还满足下面的群性 4, 则称它为 Abel *群*.

群性 4 (交换律) $\forall x, y \in \Gamma, x\diamondsuit y = y\diamondsuit x$.

有两种常用方式来表示群的运算, 一个是*加号*, 即用 $x+y$ 代替 $x\diamondsuit y$. 这时的幺元为 0_Γ (或 0), x 的逆为 $-x$. 特别是对于 Abel 群是这样. 另一个就是*乘号*, 即

用 $x \cdot y$ (或 xy) 代替 $x\Diamond y$. 这时的幺元为 1_Γ (或 1), x 的逆为 x^{-1}. 通常以此表示一般的群.

令 $\Gamma=(X,\cdot)$ 是一个群和 $Y\subseteq X$. 若 $\Lambda=(Y,\cdot)$ 也是一个群, 则称 Λ 为 Γ 的子群, 也用 $\Lambda\subseteq\Gamma$ 表示. 当然, 幺群是任何群的子群. 任何一个群均为它本身的子群.

定理 1.4.1 $\forall\varnothing\neq Y\subseteq X$,

$$\Lambda=(Y,\cdot)\subseteq\Gamma=(X,\cdot)\Leftrightarrow\forall x,y\in Y,xy^{-1}\in Y.$$

令 $\Gamma_i=(X_i,\cdot)\subseteq\Gamma=(X,\cdot)(i\in I)$. 容易看出, 它们的交

$$\bigcap_{i\in I}\Gamma_i=\left(\bigcap_{i\in I}X_i,\cdot\right)\subseteq\Gamma.$$

对于 $S\subseteq X$, 所有包含 S 的子群的交, 用 $\langle S\rangle$ 表示, 称为 Γ 中由 S 生成的子群. 子群 $\langle\bigcup_{i\in I}X_i\rangle$, 用 $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ 表示, 称为子群 $\Gamma_i\in I$ 的联. 令 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为由 Γ 的所有子群组成的集合.

由 1.1 节中的关系性 1~ 关系性 3 和定理 1.1.13 易知, $(\boldsymbol{\Gamma},\subseteq;\cup,\cap)$ 是一个格, 或更确切地, 是一个完全格.

因为 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的任何一个子集在 $\boldsymbol{\Gamma}$ 中既有最大下界, 即其中所有子群的交, 又有最小上界, 即其中所有子群的联.

群 Γ 的一个子群 Λ, 若 Λ 满足如下的等价条件之一:

$$\begin{aligned}\forall x\in\Gamma,\ x\Lambda=\Lambda x&\Leftrightarrow\forall x\in\Gamma,x^{-1}\Lambda x=\Lambda\\&\Leftrightarrow\forall x\in\Gamma,\forall y\in\Lambda,x^{-1}yx\in\Lambda,\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

则称 Λ 为 Γ 的正规子群, 记为 $\Lambda\lhd\Gamma$.

容易看出, 一个 Abel 群的任何子群皆正规. 然而, 一般来说, 对于非 Abel 群确有子群不是正规的. 也可以看出, 一个群的所有正规子群的集形成一个完全格, 其中, 包含关系为序, 联和交为两个运算.

对于 $N\lhd\Gamma$, $\Gamma=(X,\cdot)$, 可以按如下方式确定 X 上的一个关系, 用 $\sim_N$ 表示: $\forall x,y\in X$,

$$x\sim_N y\ \Leftrightarrow\ \exists h\in N,x=hy.\tag{1.4.2}$$

容易验证, $\sim_N$ 是集合 X 上的一个等价, 由此, 可以定义在 Γ 中 N 的商群为

$$\Gamma/N\ =\ (X/\sim_N;\cdot),\tag{1.4.3}$$

其中, $(Nx)(Ny)=N(xy)$. 商群 Γ/N 的阶称为 N 在 Γ 中的指标.

令 Γ 和 Λ 是两个群. 一个函数 $\alpha: \ \Gamma \to \Lambda$, 如果

$$\forall x, y \in \Gamma, \ \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y), \tag{1.4.4}$$

则称之为从 Γ 到 Λ 的一个**同态**.

由于 $o: \ \Gamma \to 1_\Lambda$ 是一个同态且称之为**零同态**. 从 Γ 到 Λ 的所有同态的集合 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \Lambda)$ 总是非空的. 一个群 Γ 到它本身的同态称为它的**自同态**. 幺函数 $\iota: \ \Gamma \to \Gamma$ 就是 Γ 的一个自同态.

对于 Γ 到 Λ 的一个同态 α, 令

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\ \alpha = \alpha(\Gamma) = \{\alpha(x) \mid \forall x \in X\}, \\ \mathrm{Ker}\ \alpha = \{x \mid \forall x \in X, \alpha(x) = 1_\Lambda\}, \end{cases} \tag{1.4.5}$$

它们分别称为 α 的**象**和**核**. 由定理 1.4.1, 容易验证 $\mathrm{Im}\ \alpha \subseteq \Lambda$ 和 $\mathrm{Ker}\ \alpha \triangleleft \Gamma$. 如果一个从 Γ 到 Λ 的同态 α 满足 $\mathrm{Ker}\ \alpha = 1_\Gamma$, 则称 α 为**单同态**. 如果从 Γ 到 Λ 的一个同态 α 满足 $\mathrm{Im}\ \alpha = \Lambda$, 则称 α 为**满同态**.

对于两个群 Γ 和 Λ, 若有一个从 Γ 到 Λ 的一个同态, 它既是单的又是满的, 则称之为一个**同构**. 若 Γ 到 Λ 有一个同构, 则称它们是**同构的**, 并且记为 $\Gamma \cong \Lambda$.

从 Γ 到它本身的一个同构被称为 Γ 的**自同构**. 用群性 1~ 群性 3 可以容易地检验 Γ 的所有自同构形成一个群, 称之为 Γ 的**自同构群**, 用 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 表示.

定理 1.4.2 (第一同构定律) $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \Lambda)$,

$$\Gamma / \ \mathrm{Ker}\ \alpha \cong \ \mathrm{Im}\ \alpha.$$

基于定理 1.4.2, 可以称 $\Gamma/\mathrm{Ker}\ \alpha$ 为 α 的**上象**. 如果 $N \triangleleft \Gamma$, 则映射 $\phi : x \mapsto Nx$ 是从 Γ 到 Γ/N 的一个满同态, 其中, $\mathrm{Ker}\ \phi = N$. 称 ϕ 为**标准同态**.

两个群 Γ 和 Λ,

$$\Lambda = (X, \cdot) \subseteq (Y, \cdot) = \Gamma,$$

令 $\Gamma\Lambda = (XY, \cdot)$, 其中,

$$XY = \{xy \mid \forall x \in X, \forall y \in Y\}.$$

已经知道

$$\forall \Lambda \subseteq \Gamma, N \triangleleft \Gamma \Rightarrow \Lambda \bigcap N \triangleleft \Lambda.$$

定理 1.4.3 (第二同构定律) $\forall \Lambda \subseteq \Gamma, \forall N \triangleleft \Gamma$,

$$\Lambda/(N \bigcap \Lambda) \cong N\Lambda/N.$$

令 N 和 Q 是 Γ 的两个正规子群和 $N \subseteq Q$, 则已经知道 $Q/N \ \triangleleft \ \Gamma/N$.

定理 1.4.4 (第三同构定律)　$\forall N, Q \lhd \Gamma$,

$$N \subseteq Q \Rightarrow (\Gamma/N)/(Q/N) \cong \Gamma/Q.$$

令 Φ 是一个群, S 是一个非空集, $\sigma : S \to \Phi$ 是一个函数. 如果对于每个函数 $\alpha : S \to \Gamma$ 都有唯一一个同态 $\beta : \Phi \to \Gamma$, 使得 $\alpha = \beta\sigma$, 则称 Φ, 或者更确切地, (Φ, σ), 在 S 上是*自由的*. 一个群, 如果存在一个集合, 使它在这个集合上是自由的, 则称它为*自由群*. 由这个定义可以导出, σ 必为一个单射, 而且 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 生成群 Φ. 事实上, 可以证明对任何非空集 S, 存在一个群 Φ 和一个函数 $\sigma : S \to \Phi$, 使得 Φ 在 S 上是自由的, 而且 $\Phi = \langle\ \mathrm{Im}\ \sigma\rangle$.

定理 1.4.5　如果 Φ_1 在 S_1 上是自由的, Φ_2 在 S_2 上是自由的, 则

$$\Phi_1 \cong \Phi_2 \Leftrightarrow |\ S_1\ | = |\ S_2\ |.$$

定理 1.4.5 使得能够定义一个自由群的*秩*为所有自由的集合的基数. 进而可以知道, 任何一个群都是某自由群的象. 这样的象被称为这个群的一个表示. 更准确地, 所谓群 Γ 的一个*自由表示*, 是指这样的一个满同态 $\pi : \Phi \to \Gamma, \Phi$ 是自由群. 由定理 1.4.2 有 $\Phi/\mathrm{Ker}\ \pi \cong \Gamma$. $\mathrm{Ker}\ \pi$ 的元素被称为表示的*关系元*, 从而任何一个群都可以用*生成元*和关系元所表征. 即使群的表示已知, 判定两个群同构与否, 一般来说, 仍并非容易, 因为一个群可以有不同类型的表示.

所谓 F 上的一个*空间* (准确地说, *向量空间*或*线性空间*), 常记为 $(\mathcal{X}, F; +, \cdot)$ (或简记为 $\mathcal{X}$), 就是指一个 Abel 群 $(\mathcal{X}, +)$, 或同样地简记为 $\mathcal{X}$, 伴之以一个域 $(F, +, \cdot)$, 或简记为 F, 并满足下面的 4 条公理: 空间性 1～ 空间性 4, 其中, 称二元运算 "+" 为*向量和*, 称 "·" 为*标量积*. 在 Abel 群 $\mathcal{X}$ 上的加法和在域 F 上的加法用同样的记号. 标量积 $a \cdot A$, 或简记为 aA, 是对于 $a \in F$ 和 $A \in \mathcal{X}$ 的, 而且与 F 中的乘法用相同的记号. $\mathcal{X}$ 中的元称为*向量*, F 中的元称为*标量*.

空间性 1　$\forall a \in F, \forall A, B \in \mathcal{X}, a(A + B) = aA + aB.$

空间性 2　$\forall a, b \in F, \forall A \in \mathcal{X}, (a + b)A = aA + bA.$

空间性 3　$\forall a, b \in F, \forall A \in \mathcal{X}, (ab)A = a(bA).$

空间性 4　$\forall A \in \mathcal{X}, 1A = A.$

似乎在空间的向量与标量之间需要说明的仅有在符号上的区别是分别用 $0_{\mathcal{X}}$ 和 0_F 来表示 $\mathcal{X}$ 和 F 中的零元. 然而, 由公理空间性 1～ 空间性 4 可以看出, $\forall A \in \mathcal{X}, 0_F A = 0_{\mathcal{X}}$ 和 $\forall a \in F,\ a0_{\mathcal{X}} = 0_{\mathcal{X}}$, 这种区别总是可以略之不计的, 并简单地用 0 表示 0_F 和 $0_{\mathcal{X}}$. 域 F 上的空间 $\mathcal{X}$ 的一个子集 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, 若 $\mathcal{Y}$ 本身也是一个空间, 并且其中的运算与 $\mathcal{X}$ 的相同, 则称 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一个*子空间*, 记为 $\mathcal{Y} \subseteq_{\mathrm{vect}} \mathcal{X}$ (或在不致混淆时, 简记为 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$). 零元 0 属于任何空间, 而且它本身也是一个空间,

称之为**零空间** 或**平凡空间**, 也用 0 表示. 任何一个非零二阶向量与 0 形成一个子空间, 并记为 $\mathcal{J}$.

定理 1.4.6 $\forall \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$,

$$\mathcal{Y} \subseteq_{\text{vect}} \mathcal{X} \Leftrightarrow (\forall A, B \in \mathcal{Y}, A + B \in \mathcal{Y}) \wedge (\forall a \in F, A \in \mathcal{Y}, aA \in \mathcal{Y}).$$

证 必要性是直接的. 只证充分性. 因为 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, 由后一个说法可知空间性 2～ 空间性 4 成立. 由前一个说法可知空间性 1 成立, 从而充分性得证. ♮

当然, 对于空间也可以与群一样, 引进两个运算: $\cap$(即交) 和 $\cup$ (即联)(见 1.1 节), 并由此得到一个格 $(2^{\mathcal{X}}, \subseteq; \cup, \cap)$. 自然, 它也是完全的.

下面只讨论 $F = \text{GF}(2)$, 即二元域的情形. 这时的空间被称为**二分空间**或**二元空间**. 对于任何 $A \in \mathcal{X}$ 总有 $A + A = 0$, 零向量, 或者说是特征为 2 的. 设 $\mathcal{X} = 2^X$ 是由 X 的所有元素生成的自由 Abel 群 $\langle x | \, \forall x \in X \rangle$, 则一个向量同时也表示 X 的一个子集. 总是用同样的记号代表 $\mathcal{X}$ 中的向量和 X 中的子集. 令 $A \in \mathcal{X}$, 则有

$$A = \sum_{x \in X} A_x x = \sum_{x \in A} x, \tag{1.4.6}$$

其中 A_x 称为 A 在 x 上的**系数** 或**分量**. 当然,

$$A_x = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

在空间 $\mathcal{X}$ 上, 定义**内积**, 用 $(A, B)(A,\ B \in \mathcal{X})$ 表示, 为

$$(A, B) = \sum_{x \in X} A_x B_x. \tag{1.4.7}$$

用内积的形式有

$$A_x = (A, x), \quad \forall x \in X. \tag{1.4.8}$$

如果 $A, B \in \mathcal{X}, (A, B) = 0$, 则称 A 和 B 是**正交的**, 并且用 $A \perp B$, 或对称地, $B \perp A$ 表示 (因为 $(A, B) = (B, A)$). 至此可以看出, $\forall A, B \in \mathcal{X}$,

$$(A, B) = 0 \Leftrightarrow \left| A \bigcap B \right| = 0 \ (\text{mod } 2). \tag{1.4.9}$$

若 $(A, A) = 0$, 则称 A 是**偶的**. 令 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 中所有偶向量的集合. 由公理空间性 1～ 空间性 4, 可以验证 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个子空间, 并称之为 X 上的**交错空间**或**辛空间**. 进而还可以看出, 对于给定的 $A \in \mathcal{X}$,

$$A = 0 \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{X}, (A, B) = 0. \tag{1.4.10}$$

或者说, 这里的内积是非退化的.

若一个向量 A 满足 $\forall B\in\mathcal{B},(A,B)=0$, 则称 A 与 $\mathcal{B}$ 正交, 记为 $A\perp\mathcal{B}$.

令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{X}$ 的两个子空间. 若

$$\mathcal{A}=\{A|\ \forall A\in\mathcal{X},A\perp\mathcal{B}\},\tag{1.4.11}$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{X}$ 中的正交空间, 记为 $\mathcal{A}=\mathcal{B}^{\perp}$, 而且由内积的对称性有

$$(\mathcal{B}^{\perp})^{\perp}=\mathcal{B}.\tag{1.4.12}$$

在这一章中, 将会看到与图有关的一些空间. 几乎所有对于这些空间的结果都可延伸到一般的二分空间上.

1.5 注　　记

(1) 首先要提到的是关于一个理论的有效性或者好的标准, 尽可能使一种理论更有效. 所谓一种理论是有效的, 是指可以借助它设计多项式时间, 即计算时间不超过问题阶的一个多项式的算法实现. 线性向量空间的基表示本身就是用有限的向量生成空间中的所有向量, 开辟了定理有效性研究的先河.

(2) 关于算法的设计与分析, 可参见文献 (Aho, A.V.-J.E. Hopcroft-J.D. Ullman[1]) 提供的基础知识. 如果必要, 读者也可以参见诸如文献 (Bellman, R.-K.L. Cook-J.A. Lockett[1], Cook, S.A.[1], Golumbic, M.C.[1], Karp, R.M.[1], Knuth, D. E.[1], Krentel, M.W.[1], Pralts, J.L., Read, R.C.[1]) 等.

(3) 关于算法复杂性的理论, 特别是 NP 完全性理论, 虽然当今发展得十分迅速, 即使是初学者, 书 (Garey, M.R.-D.S. Johnson[1]) 仍不乏适用. 对于这一理论本身尤感兴趣的读者, 也许想读一读奠基性的文章 (Cook, S.A.[1], Karp, R.M.[1]). 关于这一理论的简述, 还可查阅文献 (Hammer, P.L.-Y.P. Liu-B. Simeone[1]).

(4) 将第一版预备知识中有关曲面与多面形部分未纳入本章. 因为与通常的文献不同, 特专门用一章 (即第 2 章) 的篇幅阐明和形式化地推导其缘由, 以减少读者的误解.

(5) 1.2 节在第一版中没有. 自第一版之后, 特别是近年来, 刘彦佩所推行的用局部对称性刻画全局的理念, 导致用集合的剖分表示一般的图和用置换表示一般的地图. 例如, 在专著 (Liu, Y.P.[35,36,44,46]) 中均有反映.

(6) 关于集合与关系, 书 (Birkhoff, G.[1]) 可谓这方面的经典. 事实上, 那里所提供的不仅是集合论, 而且也是布尔代数以及数理逻辑的理论基础.

(7) 在近世代数方面的书中, 多有置换与置换群的内容. 例如, 可参考文献 (Jacobson, N.[1], Gilbert, W.J.[1]), 特别是文献 (Dixon, J.D.-B. Mortimer[1]) 等.

(8) 虽然图与网络的书迄今已有数十本之多，与本书有关的却甚少. 不过，仍可参考文献 (Ore, O[1, 2], Tutte, W.T.[19], Lefschetz, S.[2], Ringel, G.[1], White, A.T.[1], Liu, Y.P.[46]) 等.

(9) 在群与空间方面, 1.4 节是从文献 (Liu, Y.P.[33~44]) 中提炼出来的, 还可参考文献 (MacLane, S.-G. Birkhoff[1], Roman, S.[1], Robinson, D.J.S.[1]) 等.

第 2 章 多面形与曲面

2.1 多 面 形

一个*多边形*, 用 $(a,b,c,\cdots)$ 表示, 就是字母的一个带循环序的有限集. 例如, 平面图的一个面边界就可视为一个多边形. 如果在这个边界上有悬挂边, 则这个悬挂边在多边形上出现两次. 因此, 这里所讨论的多边形是几何学中遇到的多边形的推广和抽象. 通常用字母表示多边形的边. 自然, 代表边的字母在这里是允许重复的, 但至多重复两次. 为了区别方向性, 将每个字母冠以一个二元幂, 用 $+1$ 和 -1 表示. 幂为 $+1$ 的字母, 总是默认为这个字母本身. 为利用时方便起见, 带幂 -1 的字母被称为这个字母的*逆*. 这里的逆满足下面的两个规则.

逆规则 1 对于任何一个字母 a 都有 $(a^{-1})^{-1}=a$.

逆规则 2 对于任何两个字母 a 和 b 都有 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ 或 $(a,b)^{-1}=(b^{-1}, a^{-1})$.

给定两个多边形 A_1 和 A_2. 如果通过下面的无异性可以从一个变到另一个, 则称它们是*相同的*.

无异性 1 对于 $a\in A_1$, 在 A_1 中交换 a 两次出现的位置, 或用 a^{-1} 代替 a, 即得 A_2.

无异性 2 对于 $a,b\in A_1$, 在 A_1 中交换 a 和 b, 即得 A_2.

令 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_l)$ 为一个多边形, 则多边形

$$(a_2,a_3,\cdots,a_1),\cdots,(a_l,a_1,\cdots,a_{l-1})$$

分别称为 A 的*循环左移* $1, 2, \cdots, l-1$ 位. 相反地, *循环右移* $1, 2, \cdots, l-1$ 位.

无异性 3 A_2 可由 A_1 通过循环左移 (或循环右移) 得到.

多边形 $(a_l,\cdots,a_2,a_1)$ 被称为多面形 $(a_1,a_2,\cdots,a_l)$ 的*反转*, 用

$$(a_1,a_2,\cdots,a_l)^{\mathrm{rv}}$$

表示.

无异性 4 $A_2=(A_1)^{\mathrm{rv}}$.

多边形 $(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_l^{-1})$, 用 $(a_1,a_2,\cdots,a_l)^{\mathrm{cv}}$ 表示, 被称为多面形

$$(a_1,a_2,\cdots,a_l)$$

的*逆反*.

无异性 5 $A_2 = (A_1)^{\text{cv}}$.

将多边形 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 的逆定义为 $A^{\text{iv}} = (a_l^{-1}, \cdots, a_2^{-1}, a_1^{-1})$.

命题 2.1.1 对任何多边形 A 有

$$A^{\text{iv}} = (A^{\text{rv}})^{\text{cv}} = (A^{\text{cv}})^{\text{rv}}. \tag{2.1.1}$$

证 仅由定义即可得命题的结论.

基于命题 2.1.1, 从逆规则 2 即可知 $A^{\text{iv}} = A^{-1}$.

如果多边形的一个集合, 使得其中任何一个字母都恰出现两次, 就称这些多边形*二重覆盖*它们中所有出现过的字母集合.

一个*多面形* P 就是多边形这样的一个集合, 记为 $\mathcal{C} = \{C_i | 1 \leqslant i \leqslant k\}$ $(k \geqslant 1)$, 使得它们形成一个二重覆盖, 它们的任何一个真子集都不是二重覆盖, 其中, C_i 被称为多面形 P 的一个*面*.

多面形的这种组合表示, 曾出现在文献 (Edmonds, J.R.[1]) 中. 之后, 人们发现近 70 年前, 在文献 (Heffter, L.[1]) 中出现的是其对偶形式. 这就是为什么现在称为多面形的Heffter-Edmonds *模型*.

令 $P = \{C_i | 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 为一个多面形和 $X = X_P$, 即 P 中所有字母的集合. X 中的元素 (字母) 被称为 P 的*棱*. 每个棱在 P 中两次出现的同幂或异幂性被称为这个棱的*状态*. 将二元群 $B = \{0, 1\}$ 左置于 X, 使 $x \in X$ 变为 $\{x^+, x^-\}$. x^+ 和 x^- 被称为两个*半棱*或*端*. 为方便起见, 总是将 x^+ 用 x 代替, 将 x^- 用 x^{-1} 或 $-x$ 代替以适应运算. 每一半棱 (端) $+x$ 或 $-x$ 被分为两侧, 用 $+x$ 和 $+x'$, 或 $-x$ 和 $-x'$ 表示. 这样, 一个棱就变为

$$\{+x, +x', -x, -x'\}, \text{ 或简单地, } \{x, x', x^{-1}, x^{-1'}\},$$

从而, $\{+x, +x'\}$, 或同样地, $\{-x, -x'\}$ 就是半棱. 集合

$$\mathcal{X}(P) = \sum_{x \in P} (\{x^+, x^{-1}\} + \{x+, x^{-1}\}') \tag{2.1.2}$$

被称为多面形 P 的*基础集*. 基础集的元素也称棱的*四分元*.

注 2.1.1 (1) 对于 $x \in X$ 和 $x \in \mathcal{X}_P$, x 的意义不同. 前者为字母, 而后者则是棱的一个四分元.

(2) 对于 $x \in \mathcal{X}_P$, $'$ 和 $^{-1}$ 都可视为基础集上的置换, 即

$$' = \prod_{x \in X + X^{-1}} (x, x') \quad \text{和} \quad ^{-1} = \prod_{x \in X + X'} (x, x^{-1}), \tag{2.1.3}$$

其中 $X' = \{x' | \forall x \in X\}$, $X^{-1} = \{x^{-1} | \forall x \in X\}$, $X = X_P$.

(3) 对于 $x, y \in \mathcal{X}_P$ 有 $(xy)' = y'x'$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ 和 $x'^{-1} = x^{-1\prime}$.

多面形 P 的一个面 A 总视为伴随 A^{-1} 在基础集上.

命题 2.1.2　令 P 是一个多面形, 它的面集为 $\mathcal{A}$, 则 P 由基础集上的置换 π_P 依如下方式确定:

$$\pi_P = \prod_{A \in \mathcal{A}} (A)(A^{-1}), \tag{2.1.4}$$

其中, 一个字母的两个同幂的出现用 $'$ 区别.

证　因为 (2.1.4) 式中出现的所有循环序形成基础集的一个剖分, 根据 1.2 节中所讨论的, 即可得命题的结论. ♮

令 $\sigma = '$ 和 $\delta = ^{-1}$ 为 (2.1.3) 式所示基础集 $\mathcal{X}_P$ 上的两个置换, 即对于 $x \in \mathcal{X}_P$,

$$\sigma(x) = \begin{cases} y', & x = y, \\ y, & x = y', \end{cases} \tag{2.1.5}$$

对于 $x \in \mathcal{X}_P$,

$$\delta(x) = \begin{cases} y^{-1}, & x = y, \\ y, & x = y^{-1}, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

则 $\pi_P^* = \pi_P \sigma \delta$ 也是 $\mathcal{X}_P$ 上的一个置换.

引理 2.1.1　在 $\mathcal{X}_P$ 上有 $\delta \pi_P = \pi_P^{-1} \delta$.

证　由于 $\pi_P \delta x = \pi_P x^{-1} = (\pi_P^{-1} x)^{-1} = \delta(\pi_P^{-1} x) = (\delta \pi_P) x$, 考虑到 $x \in \mathcal{X}_P$ 的任意性, 即得引理结论. ♮

引理 2.1.2　在 $\mathcal{X}_P$ 上有 $\sigma \pi_P^* = \pi_P^{*\,-1} \sigma$.

证　只要考虑到

$$\begin{aligned} \sigma \pi_P^* &= \sigma \pi_P \sigma \delta = \sigma(\pi_P \delta)\sigma \ (\text{引理 } 2.1.1) \\ &= \sigma(\delta \pi_P^{-1})\sigma = (\sigma^{-1}\delta^{-1}\pi_P^{-1})\sigma = \pi_P^{*\,-1}\sigma, \end{aligned}$$

引理即得证. ♮

引理 2.1.3　对于 $x \in \mathcal{X}_P$, 两个轨道 $(x)_{\pi_P^*}$ 和 $(x')_{\pi_P^*}$ 是共轭的且无共元.

证　由引理 2.1.2, 这两个轨道有相同的类型. 由定理 1.2.6, 它们是共轭的. 因为 $x' \notin \{x\}_{\pi_P^*}$, 二者无共元. ♮

定理 2.1.1　置换 π_P^* 确定 $\mathcal{X}_P$ 上的一个多面形.

证　在引理 2.1.3 的基础上, 忽略 $^{-1}$ 且将 $'$ 用 $^{-1}$ 代替之后, 置换 π_P^* 轨道的每一个共轭对确定一个多边形. 由于 π_P 确定一个多面形, 所有这些多边形也构成一个多面形. ♮

记 P^* 为定理 2.1.1 中由 π_P^* 所产生的那个多面形, 则称 P^* 为多面形 P 的对偶. 多面形 P^* 的面被称为多面形 P 的顶点.

对于多面形 P, 记 π_P 为确定它在基础集 $\mathcal{X}_P$ 上的那个置换, 则对换

$$(x^{-1}, \pi_P x) = (\delta x, \pi_P x)$$

被称为一个角. 与一个角关联的两个半棱被称为是 V相邻的. 在一个多面形所有半棱的集合上, 由 V 相邻通过附加传递律而得到的等价关系, 被称为 V等价.

定理 2.1.2　在一个多面形上, 其半棱的一个集合形成一个顶点当且仅当它在 V 等价之下是一个等价类.

证　事实上, π_P^* 中循环置换的每一个共轭对就是在 V 等价之下的一个等价类. 由此, 即可导出定理的结论. ♮

例 2.1.1　记 P 为仅由一个多边形 $(ae^{-1}b^{-1}cdefdb^{-1}afc^{-1})$ 组成的那个多面形. 确定 P 的置换为

$$\begin{aligned}\pi_P = &(ae^{-1}b^{-1}cde'fdb'^{-1}a'f'c'^{-1})\\ &\cdot(a^{-1}c'f'^{-1}a'^{-1}b'd^{-1}f^{-1}e'^{-1}d^{-1}c^{-1}be),\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\pi_P^* = &(ab'c)(a'c'b)(df^{-1}c'^{-1})(d'c^{-1}f'^{-1})\\ &\cdot(a^{-1}f'e'^{-1})(a'^{-1}e^{-1}f)(b^{-1}d'^{-1}e')(b'^{-1}e'd^{-1}).\end{aligned}$$

在 π_P^* 上, 通过忽略幂 -1, 然后用 $^{-1}$ 代替 $'$ 得

$$P^* = (ab^{-1}c)(dfc^{-1})(af^{-1}e^{-1})(bd^{-1}e^{-1}).$$

定理 2.1.3　对于两个多面形 P 和 Q, P 是 Q 的对偶当且仅当 Q 是 P 的对偶. 换言之, $P^{**} = P$.

证　由于

$$\pi_P^{**} = (\pi_P\sigma\delta)\delta\sigma = \pi_P(\sigma\delta\delta\sigma) = \pi_P(\sigma\sigma) = P,$$

定理的结论即可从定理 2.1.1 导出. ♮

2.2 支　柱

多面形 $P = \{C_i|1 \leqslant i \leqslant k\}$ 的支柱就是由图 $U = (V_U, E_U)$ 所导出的以 w 为 E_U 上权函数的一个网络, 其中 $V_U = \{C_i|1 \leqslant i \leqslant k\}$ 和 $(C_i, C_j) \in E_U$ 当且仅当 C_i 与 $C_j(1 \leqslant i, j \leqslant k)$ 有公共字母, 以及

$$w(e) = \begin{cases} 0, & \text{两次出现异幂}, \\ 1, & \text{否则} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

对于 $e \in E_U$.

对偶多面形 P^* 的支柱被称为多面形 P 的**支架**. 自然, 支架也是一个网络.

例 2.2.1　在例 2.1.1 中的多面形 P 及其对偶 P^* 的支柱由图 2.2.1 给出.

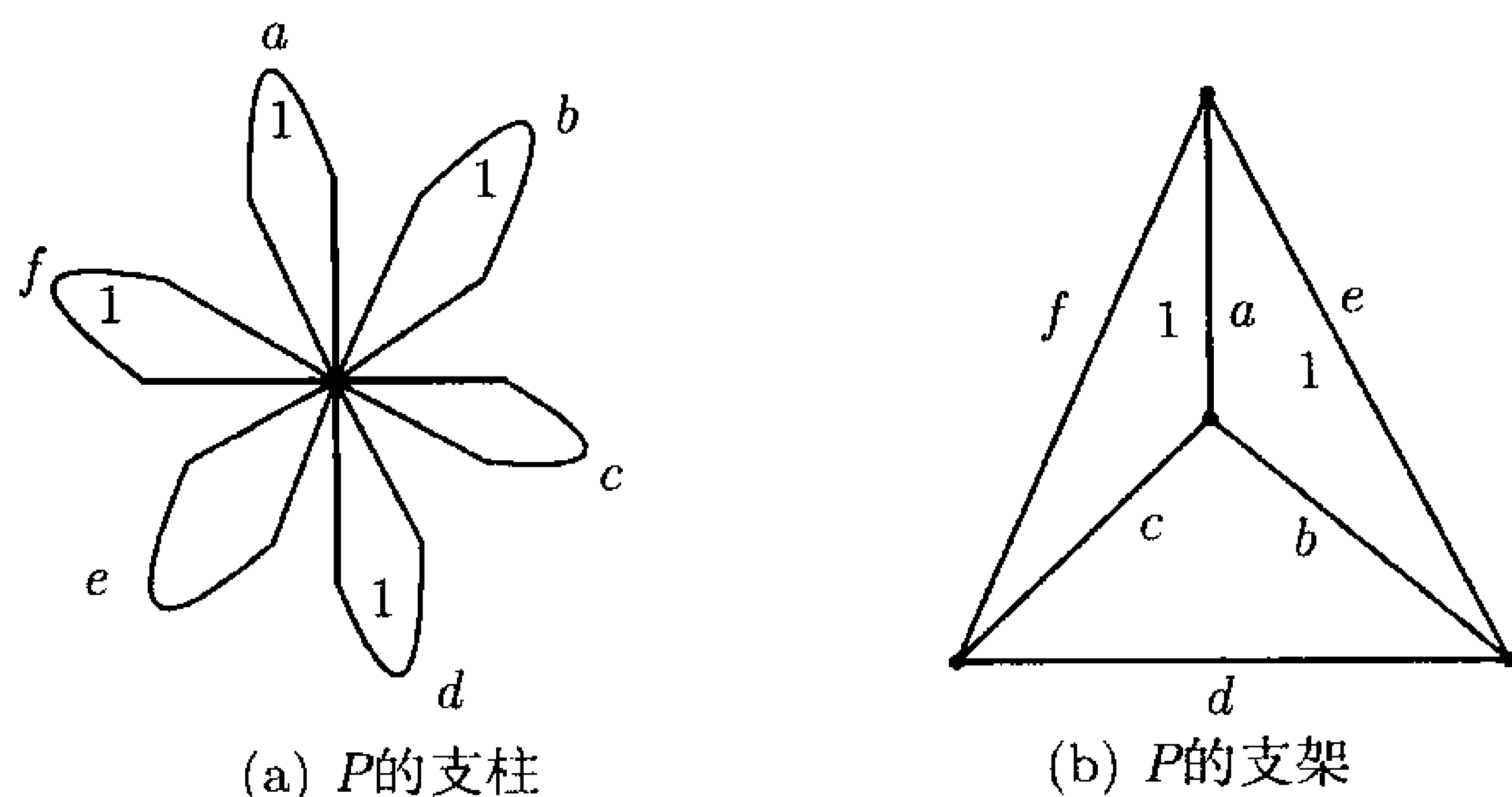


图 2.2.1　支柱与支架

如果在一个多面形中, 存在对于其每个面的定向, 顺时针或逆时针, 使得每个字母的两次出现异幂 (即异向), 则称这个多面形是**可定向的**; 否则, 称为是**不可定向的**.

注 2.2.1　一个依顺时针走向的多边形是依逆时针走向的逆. 由无异性 4, 无异性 5 和命题 2.1.1, 这两种形式无异.

对于一个网络 $N = (G; w)$ ($G = (V, E)$, $w(e) \in \mathrm{GF}(2)$, $e \in E$), $x_v \in V$ 为复量的方程组

$$x_u + x_v = w(e) \pmod 2 \tag{2.2.2}$$

对于所有 $(u, v) \in E$ 被称为 N 的**伴随方程**.

引理 2.2.1　如果多面形 $P = \{C_i | 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是可定向的, 则其支柱的伴随方程 (2.2.2) 有解.

证　首先, 因为 P 是可定向的, 可设 P 中每个字母的两次出现异幂. 由于支柱上每条边的权均为 0, 方程 (2.2.2) 有解 $x_i = 0$ 对于 $C_i \in V_P (1 \leqslant i \leqslant k)$.

然后, 考虑到在顺时针与逆时针之间改变一个面的定向, 同时将其上边的权再 $0 \sim 1$ 互换, 不改变方程 (2.2.2) 的相容性, 即可得引理结论.　♮

将一个网络所有权为 1 的边组成的集合称为这个网络的 1 集.

引理 2.2.2　如果一个网络的伴随方程 (2.2.2) 有解, 则这个 1 集是此网络的一个上循环.

证　设方程 (2.2.2) 有一个解. 由于在解中每个变量非 0 则 1, 这个网络的节点根据其相应的变量取值为 0 或 1 分成两类. 因为权为 0 的边的两端在同一类, 两类节点间的边所形成的上循环就是这个网络的 1 集, 即得引理结论.　♮

引理 2.2.3 如果网络上的 1 集是上循环, 则这个网络没有奇权圈.

证 由定理 1.3.10 当 $n = 2$ 时的情形, 即得引理结论. ♮

引理 2.2.4 如果一个网络无奇权圈, 则这个网络无奇权基本圈.

证 因为基本圈也是圈, 由引理 2.2.3 可得引理结论. ♮

引理 2.2.5 如果一个多面形的支柱无奇权基本圈, 则在这个支柱上收缩所有权为 0 的边得到一个二部图.

证 考虑到权为 0 的边的收缩不改变圈权的奇偶性, 这个所有边权均为 1 的图无奇长圈. 由定理 1.3.7, 它是二部图. ♮

引理 2.2.6 如果在一个多面形 P 的支柱上收缩所有权为 0 的边得到一个二部图, 则 P 是可定向的.

证 由二部性, 这个支柱的节点可剖分为两类. 同一类中两个节点只能用偶权路连接. 通过转换其中一类中的所有节点的定向, 而另一类的节点都保持原定向不变, 即得 P 的一个所有变得权均为 1 的支柱, 从而, P 是可定向的. ♮

定理 2.2.1 多面形 $P = \{C_i | 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是可定向的当且仅当下面的说法之一成立:

(1) 在它的支柱上收缩所有权 0 的边得到一个二部图；

(2) 在它的支柱上没有奇权基本圈；

(3) 在它的支柱上没有奇权圈；

(4) 在它的支柱上, 1 集是上循环；

(5) 在它的支柱上, 伴随方程 (2.2.1) 是相容的.

证 令 $\tau = (123456)$ 为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的一个置换. 对于 (i), 必要性来自引理 $2.2.i \sim$ 引理 $2.2.\tau^4(i)$, 充分性来自引理 $2.2.\tau^5(i)$, 其中, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. ♮

基于定理 2.2.1 中 (2), 上面的所有说法都是可有效识别的. 因此, 判别一个多面形的可定向性可有效地实现, 虽然用 Heffter-Edmonds 可定向定义本身不能有效地判别一个多面形的可定向性.

2.3 支　　架

对于多面形 P, 令 $J = \{\pi_P, \delta, \sigma\}$, 用 Ψ_P 表示由 J 所生成的群.

引理 2.3.1 对于多面形 P, Ψ_P 在基础集 $\mathcal{X}_P$ 上恰有一个轨道当且仅当 P 的支柱是连通的.

证 首先, 记 $y = \psi x (x, y \in \mathcal{X}_P,\ \psi \in \Psi_P)$. 因为 ψ 可以表示成如下形式:

$$\prod_{j=1}^{s} (\pi_P)^{i_j} \delta^{m_j} \sigma^{n_j},$$

其中 $i_j \geqslant 0(1 \leqslant j \leqslant s)$ 皆整数, $m_j, n_j(1 \leqslant j \leqslant s)$ 皆二元数, 即 0 或 1. 可以看出, 在 P 的支柱上有长为 $s-1$ 的、从与 x 关联的节点到与 y 关联的节点的一条径. 这就得到引理的必要性.

然后, 记 $L = (a_1a_2a_3 \cdots a_s)$ 为在 P 的支柱上的一条径,

$$a_i = \{x_i, \sigma x_i, \delta x_i, \sigma\delta x_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, s,$$

使得 $(\pi_P)^{l_i}\sigma\delta x_i = x_{i+1}(i = 1, 2, 3, \cdots, s-1)$. 对于 $x = x_1$ 和 $y = \delta x_s$ 有 $y = \psi x(\psi \in \Psi_P)$, 其中,

$$\psi = \delta(\pi_P)^{l_{s-1}}\sigma\delta \cdots (\pi_P)^{l_2}\sigma\delta(\pi_P)^{l_1}\sigma\delta.$$

由选择 x 和 y 的任意性, Ψ_P 在 $\mathcal{P}_P$ 上恰有一个轨道. 这就得到引理的充分性. ♮

引理 2.3.2 多面形 P 的支柱总是连通的.

证 用反证法. 假设 P 的支柱不是连通的. 不失一般性, 令 A 和 B 是它的两个连通片. 因为 A 的边集是 P 的棱集的一个真子集, P 有一个真子集本身也是多面形. 与 P 是多面形矛盾. ♮

引理 2.3.3 对于多面形 P, Ψ_P 在基础集 $\mathcal{X}_P$ 上恰有一个轨道.

证 这是引理 2.3.1 和引理 2.3.2 的一个直接推论. ♮

引理 2.3.4 对于多面形 P, 由 $\{\pi_P, \sigma\delta\}$ 生成的群在 $\mathcal{X}_P$ 上至多有两条轨道.

证 令 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 为由 $\{\pi_P, \sigma\delta\}$ 生成的群. 因为

$$\pi_P, \pi_P^* \in \Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}} \quad 和 \quad \pi_P(\sigma\delta x) = (\pi_P\sigma\delta)x,$$

对任何一个棱 $\{x, \sigma x, \delta x, \sigma\delta x\}$ 有 x 和 $\sigma\delta x$ 在 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 的同一个轨道上, 从而 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 的每条轨道至少含 $|(\mathcal{X})_P|/2$ 个元素. 这就意味着 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 至多有两条轨道. ♮

引理 2.3.5 如果多面形 P 是可定向的, 则群 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 在 $\mathcal{X}_P$ 上恰有两条轨道.

证 因为 P 是可定向的, $\{x\}_{\pi_P\sigma\delta}$ 和 $\{\sigma x\}_{\pi_P\sigma\delta}$ 在 $\mathcal{X}_P$ 上不同轨道中. 由引理 2.3.4, 即得引理结论. ♮

定理 2.3.1 多面形 P 是可定向的当且仅当由 $\{\pi_P, \sigma\delta\}$ 生成的群在 $\mathcal{X}_P$ 上恰有两个轨道.

证 引理 2.3.5 给出了必要性. 反之, 设群 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 有两个轨道. 因为只要存在 x 和 σx 应在 $\mathcal{X}_P$ 上的不同轨道, 集合 $\{(y)_{\pi_P^*} | y \in \{x\}_{\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}}\}$ (同样地, $\{(y)_{\pi_P^*} | y \in \{\sigma x\}_{\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}}\}$) 形成 P, 其中, $\pi_P^* = \pi_P\sigma\delta$. 如果将 $\sigma\delta x$ (δx) 视为 x^{-1} $((\sigma x)^{-1})$, 由于每条棱在 P 中出现两次且异幂, P 是可定向的. 这就得到充分性. ♮

定理 2.3.2 多面形 P 是可定向的当且仅当它的对偶是可定向的.

证　因为 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}=\Psi_{\{\pi_P\sigma\delta,\sigma\delta\}}$, 由定理 2.3.1 可得定理结论. ♮

在定理 2.3.2 的基础上, 多面形的可定向性可以仅由支架来确定, 像定理 2.2.1 只用支柱一样.

定理 2.3.3　多面形 P 是可定向的当且仅当下面的说法之一成立:

(1) 在它的支架上收缩所有权 0 的边得到一个二部图;

(2) 在它的支架上没有奇权基本圈;

(3) 在它的支架上没有奇权圈;

(4) 在它的支架上, 1 集是上循环;

(5) 在它的支架上, 伴随方程 (2.2.1) 是相容的.

证　因为多面形 P 的支架就是它的对偶 P^* 的支柱, 由定理 2.3.2 和定理 2.2.1 可得定理结论. ♮

由定理 2.2.1 和定理 2.3.3 即可导出下面的 5 个推论.

推论 2.3.1　对于多面形 P, 在它的支柱上收缩所有权 0 的边得到一个二部图当且仅当在它的支架上然.

推论 2.3.2　对于多面形 P, 在它的支柱上没有奇权基本圈当且仅当在它的支架上然.

推论 2.3.3　对于多面形 P, 在它的支柱上没有奇权圈当且仅当在它的支架上然.

推论 2.3.4　对于多面形 P, 在它的支柱上 1 集是上循环当且仅当在它的支架上然.

推论 2.3.5　对于多面形 P, 在它的支柱上伴随方程 (2.2.1) 是相容的当且仅当在它的支架上然.

在定理 2.2.1(或定理 2.3.3) 的基础上, 允许设计有效的算法, 以确定一个多面形是可定向还是不可定向.

一个*二元网络* (即边上带二元权的网络) 被称为是*平衡的*, 当它满足定理 2.3.3(或定理 2.1.1) 中的 (1)~(5) 之一.

令 $P=\{C_i|1\leqslant i\leqslant s\}$ 是一个多面形, 它的支柱和支架分别为 S_P 和 T_P.

定理 2.3.4　一个多面形的支柱 S_P 和支架 T_P 具有相同的*平衡性*(即平衡或不平衡的性质).

证　由定理 2.2.1 和定理 2.3.3, 即得定理结论. ♮

定理 2.3.4 使得能够只讨论支柱和支架之一, 以后总是支架就足以确定一个多面形的可定向性.

对于多面形 $P=\{C\}$ 的支架 T_P, 设 S 是其上的一个上循环, 则 P 的顶点集 V 被 S 分为两部分: A 和 $B=V-A$. 将交换 S 中边的权于 1 与 0 之间, 接着改变

所有 $C_v^*(v \in A$(或 B)) 为 $C_v^{*\text{iv}}$ 的运算被称为对 S 作开关, 其中 C_v^* 为由所有与顶点 v 关联的边组成的多边形.

定理 2.3.5 令 P' 为在多面形 P 上作一次开关所得到的, 则 P' 也是一个多面形, 并且与 P 无异.

证 由无异性 4, 无异性 5 以及命题 2.1.1, 即得定理结论. ♮

推论 2.3.6 在一个多面形上, 开关不改变其支架的平衡性.

在一个二元网络上, 如果一个边的子集 S 中所有边的权均为 1, 则称 S 为一个满 1 子集. 若这个子集是一个上循环或循环, 自然就衍生出满 1 上循环或满 1 循环.

定理 2.3.6 一个多面形总有一个在支架上无满 1 上循环的多面形与它无异.

证 如果在支柱上有一个满 1 上循环, 则由定理 2.3.5, 对这个满 1 上循环作开关, 所得的多面形与原多面形无异, 但在其支架上满 1 上循环数少 1. 根据文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理, 即得定理结论. ♮

引理 2.3.6 对于多面形 P 的对偶 P^*, Ψ_{P^*} 在 $\mathcal{X}_{P^*}$ 上有两个轨道当且仅当 Ψ_P 在 $\mathcal{X}_P$ 上然.

证 因为 $\Psi_P = \Psi_{P^*}$, 即得引理结论. ♮

定理 2.3.7 两个多面形无异当且仅当它们的对偶然.

证 在定理 2.2.1 和定理 2.3.3 的基础上, 由定理 2.3.2, 即得定理结论. ♮

引理 2.3.7 对于任意多面形 P, 它的支架总是连通的.

证 因为 $\Psi_P = \Psi_{P^*}$, 由引理 2.3.1 和支柱与支架间的对偶性, 即得引理的结论. ♮

虽然不可定向性可以由可定向性确定, 下面的定理提供如何直接确定不可定向性.

定理 2.3.8 一个多面形 P 是不可定向的当且仅当存在一个元素 $x \in \mathcal{X}_P$, 使得 x 和 σx 同属 $\{\pi_P, \sigma\delta\}$ 所生成的群在 $\mathcal{X}_P$ 上的一个轨道.

证 由引理 2.3.4 和引理 2.3.5, 考虑到如果 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 有两条轨道, x 和 σx 必属 $\Psi_{\{\pi_P,\sigma\delta\}}$ 的不同轨道, 定理的结论得证. ♮

定理 2.3.8 使得能够设计一个线性时间算法, 判定一个多面形的不可定向性.

定理 2.3.9 通过开关运算不改变一个多面形的不可定向性.

证 由可定向的定义即得定理的结论. ♮

引理 2.3.8 对于一个多面形 P, 总有一个支柱上无满 1 上循环的多面形 P' 与 P 无异.

证 利用与定理 2,3.6 的证明中类似的办法, 即可得引理结论. ♮

在引理 2.3.8(同样地, 定理 2.3.6) 中的这种多面形 P' 被称为典型的. 由引理 2.3.8 可见, 在无异的关系下, 只讨论典型多面形就足以区别所有的多面形.

令 T 为支架上与每个上循环都至少有一条公共边的极小集. 事实上, T 是支架上的一个支撑树. 由定理 2.3.5, T 还是一个满 0 树(即树的所有边权皆 0).

引理 2.3.9 任何一个多面形 P 都与某个典型多面形无异.

证 由引理 2.3.8 和定理 2.3.5, 即得引理结论. ♮

引理 2.3.9 使得能够有效地从无异多面形中求出一个典型的.

定理 2.3.10 一个典型多面形是可定向的当且仅当每个字母的两次出现异幂. 一个典型多面形是不可定向的当且仅当两次出现同幂字母的集合非空且不含上循环.

证 第一个说法是从定理 2.2.1(3) 导出的, 第二个说法是基于定理 2.3.3(3) 和定理 2.3.6 的. ♮

虽然对于不同树, 两个典型多面形可以无异, 但只要一个支撑树选定, 由引理 2.3.9, 定理 2.3.10 使得能够区别所有典型多面形.

定理 2.3.11 同一图上的两个多面形是不同的当且仅当它们有一对相应面不同.

证 利用定理 2.3.10 和定理 2.3.7, 即可得定理结论. ♮

推论 2.3.7 同一个图上两可定向典型(自然对同一个树)多面形不同当且仅当它们的对偶有一对相应面不同.

证 这是定理 2.3.10 和定理 2.3.7 的一个直接结果. ♮

定理 2.3.12 同一个图上两不可定向典型(自然对同一个平面树)多面形不同当且仅当它们的同幂棱(字母)的集合不同.

证 由定理 2.3.4 和定理 2.3.10, 即可得定理结论. ♮

因为已经知道 π_P 中的循环置换是 P 的面, π_{P^*} 中的循环置换是 P 的顶点, δ 中的循环置换是棱, 可以定义 Euler 示性数. 令 $\nu(P)$, $\epsilon(P)$ 和 $\phi(P)$ 分别为 P 上的顶点数、棱数和面数, 则 $\mathrm{Eul}(P) = \nu(P) - \epsilon(P) + \phi(P)$ 被称为 P 的 Euler 示性数.

定理 2.3.13 多面形 P 是不可定向的当且仅当其对偶 P^* 然. 对于任意多面形 P 有$\mathrm{Eul}(P) = \mathrm{Eul}(P^*)$.

证 第一个说法源自定理 2.3.2, 第二个说法源自 $\nu(P) = \phi(P^*)$ 和 $\epsilon(P) = \epsilon(P^*)$. ♮

2.4 初 等 等 价

对于多面形 $P = \{(A_i)|i \geqslant 1\} \in \boldsymbol{P}$, 下面的三种运算连同它们的逆被称为*初等变换*. 从拓扑学的观点, 它们都可以看成多面形所在曲面间的拓扑变换.

运算 0　对于 $(A) = (Xaa^{-1}Y) \in \boldsymbol{P}$,

$$(A) \Leftrightarrow (XY),$$

其中, 至少 X 和 Y 之一非空, 如图 2.4.1 所示.

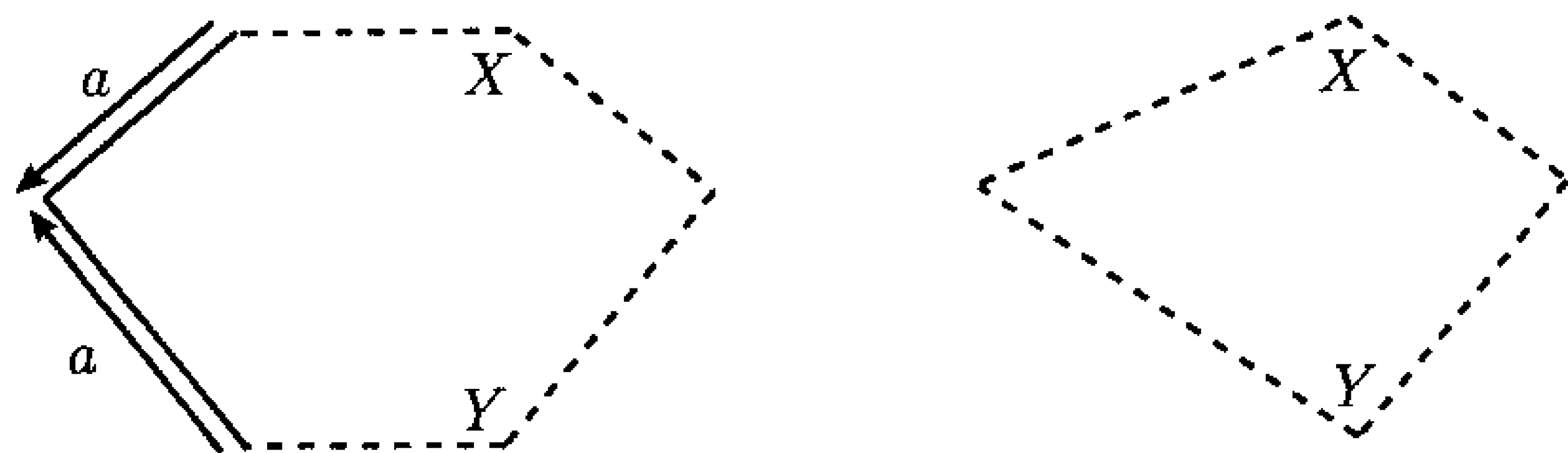


图 2.4.1　运算 0: $Aaa^{-1} \Leftrightarrow A$

运算 1　对于面 $(A) = (XabYab) \in P$(或 $(XabYb^{-1}a^{-1})$),

$$(A) \Leftrightarrow (XaYa)(\text{或 } XaYa^{-1}),$$

如图 2.4.2 所示.

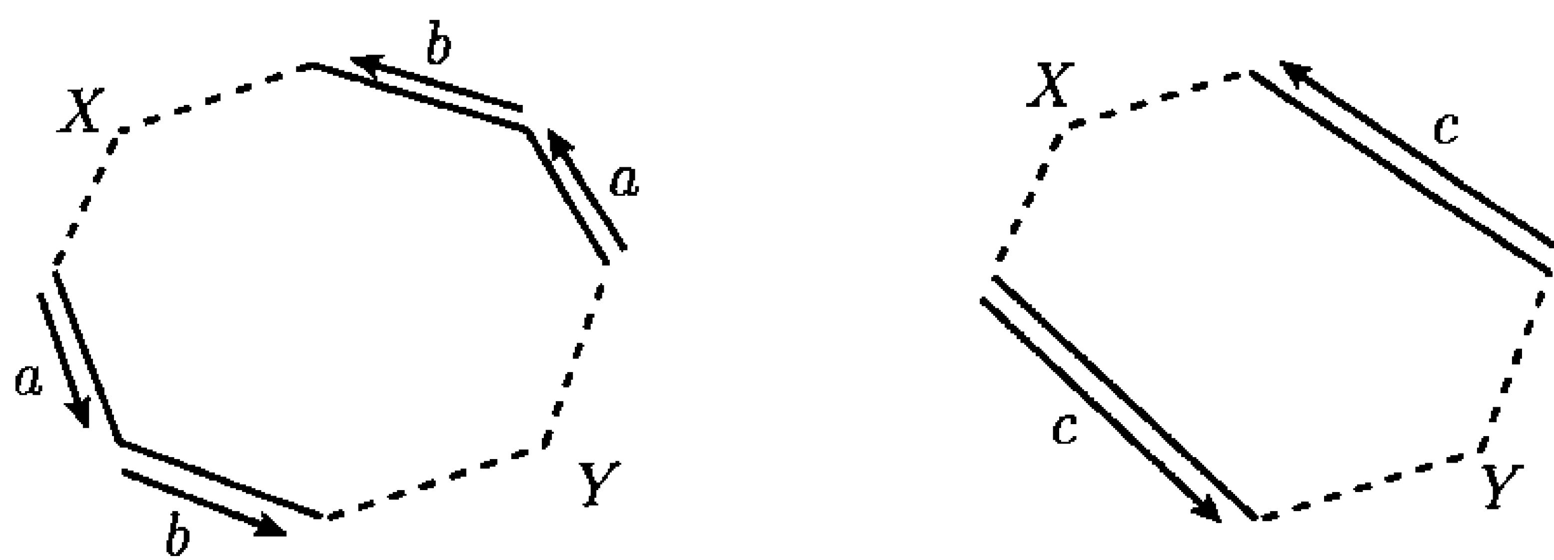


图 2.4.2　运算 1: $AabBab \Leftrightarrow AcBc$

运算 2　对于面 $(A) = (Xa)$, $(B) = (a^{-1}Y) \in P$,

$$(XY) \Leftrightarrow (\{(A), (B)\}),$$

其中 X 和 Y 至少一个非空而且不含 (X) 和 (Y) 至少一个本身为多面形 (即属于 $\boldsymbol{P}$), 如图 2.4.3 所示.

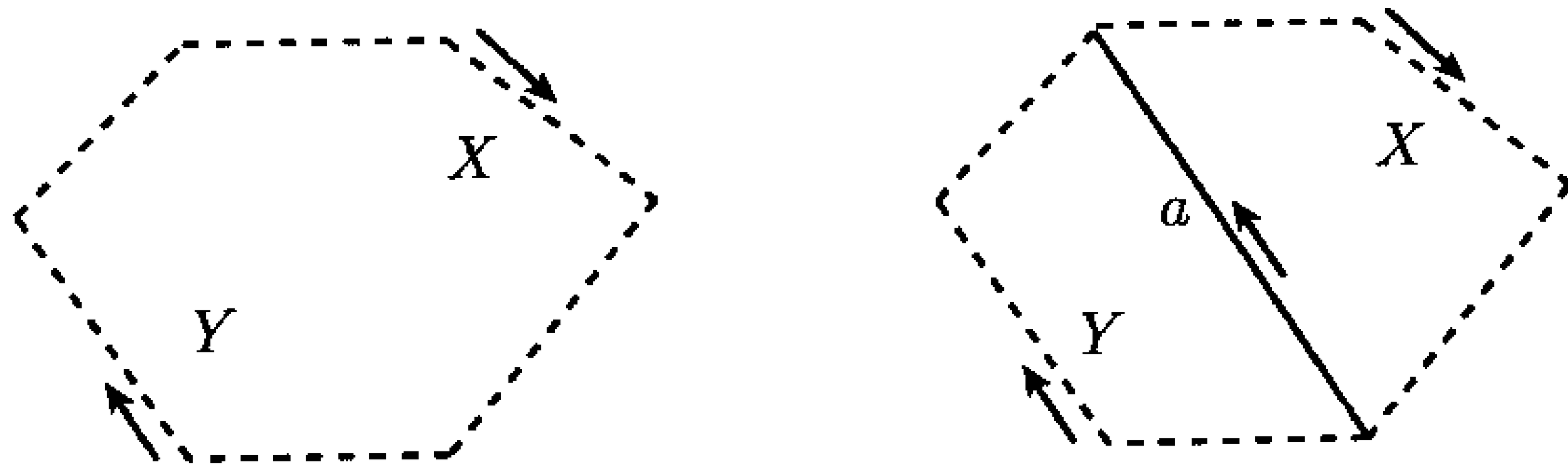


图 2.4.3　运算 2: $(XY) \Leftrightarrow \{(Xa), (a^{-1}Y)\}$

如果多面形 P 可以由多面形 Q 通过初等变换得到, 则称它们初等等价, 用 $P \sim_{\rm el} Q$ 表示. 在拓扑学中, 初等等价就是在二维意义下的拓扑等价.

定理 2.4.1 对于 $P \in \boldsymbol{P}$, 如果 $P=(XY)$ 且至少 (X) 和 (Y) 之一也属于 $\boldsymbol{P}$, 则对任何 $a \notin A_P$ 有 $P \sim_{\text{el}} (XaYa^{-1})$, 如图 2.4.4 所示.

证 由运算 0 有

$$\begin{aligned}
&P \sim_{\text{el}} (Xaa^{-1}Y) \text{ (无异性 3)}\\
&= ((X)(aa^{-1}Y)) \text{ (无异性 1, 无异性 2)}\\
&= ((X)(aYa^{-1})) = (XaYa^{-1}).
\end{aligned}$$

为简便起见, 通常也将定理 2.4.1 视为运算 3, 如图 2.4.4 所示.

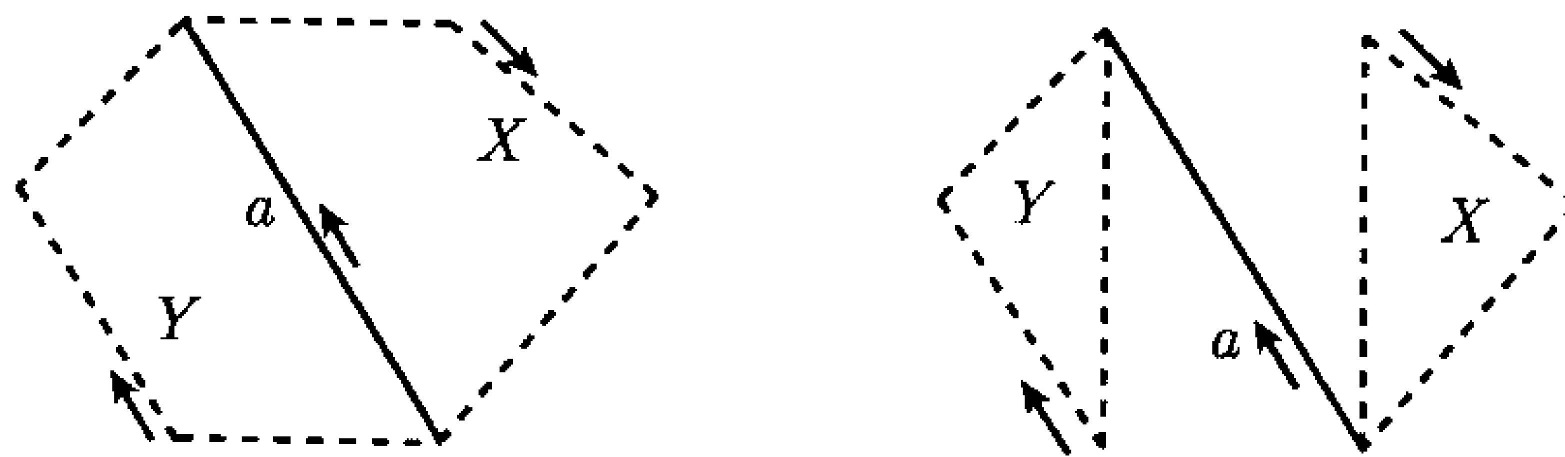


图 2.4.4 运算 3: $\{(A),(B)\} \Leftrightarrow (XaYa^{-1})$

定理 2.4.2 对于任何多面形 $P \in \boldsymbol{P}$, 存在多面形 $Q=(X) \in \boldsymbol{P}$, 其中 X 为某线性序, 使得 $P \sim_{\text{el}} Q$.

证 令 $P=\{(A_i)|1 \leqslant i \leqslant k\}$. 如果 $k=1$, Q 就是 P 本身. 如果 $k \geqslant 2$, 由于 P 是多面形, 存在 $A,B \in P$, 使得允许用运算 2, 如此可得多面形 $P' \sim_{\text{el}} P$, 但 P' 比 P 少一个面. 然后, 由文献 (Liu, Y.P.[35 或 36])中的有限递归原理可得 $Q=(X) \in \boldsymbol{P}$.

注 2.4.1 在定理 2.4.2 中, 线性序 X 不含任何循环序, 如 $aa^{-1}=(aa^{-1})$.

基于定理 2.4.2, 为了确定多面形集 $\boldsymbol{P}$ 在初等等价的分类, 只局限于单面形就够了. 同时, 也就得到了多面形所在的曲面在拓扑等价值下的分类. 这又是寻求单面形之间的将会用到的一些等价变换.

引理 2.4.1 令 $Q=(AxByCx^{-1}Dy^{-1}) \in \boldsymbol{P}$, 则

$$Q \sim_{\text{el}} (ADxyBx^{-1}Cy^{-1}). \tag{2.4.1}$$

证

$$\begin{aligned}
&Q \sim_{\text{el}} ((Axz)(z^{-1}ByCx^{-1}Dy^{-1})) \text{ (运算 2)}\\
&\sim_{\text{el}} (zADy^{-1}z^{-1}ByC) \text{ (运算 2)}\\
&= (ADxyBx^{-1}Cy^{-1}).
\end{aligned}$$

引理 2.4.2 令 $Q=(AxByCx^{-1}Dy^{-1}) \in \boldsymbol{P}$, 则

$$Q \sim_{\text{el}} (BAxyx^{-1}DCy^{-1}). \tag{2.4.2}$$

证

$$\begin{aligned} Q &\sim_{\rm el} ((x^{-1}Dy^{-1}Axz)(ByCz^{-1})) \text{ (运算 2)} \\ &\sim_{\rm el} (BAxzx^{-1}DCz^{-1}) \text{ (运算 2)} \\ &= (BAxyx^{-1}DCy^{-1}). \end{aligned}$$

♮

定理 2.4.3　令 $Q = (AxByCx^{-1}Dy^{-1}) \in \boldsymbol{P}$, 则

$$Q \sim_{\rm el} (ADCBxyx^{-1}y^{-1}). \tag{2.4.3}$$

证　先用引理 2.4.2, 再用引理 2.4.1, 即可得引理结论. ♮

根据定理 2.4.3, 如果在多面形 $ADCB$ 中, 将 A 用 EA 代替, 则即可导出如下结论.

推论 2.4.1　对于 A, B, C, D 和 E, 使得 $Q = (AxByCx^{-1}Dy^{-1}E) \in \boldsymbol{P}$, 则有

$$Q \sim_{\rm el} (ADCBExyx^{-1}y^{-1}). \tag{2.4.4}$$

定理 2.4.4　令 $Q = (AxBx) \in \boldsymbol{P}$, 则 $Q \sim_{\rm el} (AB^{-1}xx)$.

证

$$\begin{aligned} Q &\sim_{\rm el} ((Axz)(z^{-1}Bx)) \\ &= ((zAx)(x^{-1}B^{-1}z)) \text{ (运算 2)} \\ &\sim_{\rm el} (zAB^{-1}z) \text{(运算 2)} \\ &= (AB^{-1}xx). \end{aligned}$$

♮

根据定理 2.4.4, 如果在多面形 (AB^{-1}) 中用 CA 代替 A, 则即导出如下结论.

推论 2.4.2　对于 $Q = (AxBxC) \in \boldsymbol{P}$ 有

$$Q \sim_{\rm el} (AB^{-1}Cxx). \tag{2.4.5}$$

定理 2.4.5　对于任何 A, B 和 C 在一个多面形中有意义有

$$(ABxCx^{-1}) \sim_{\rm el} (BAxCx^{-1}).$$

证　首先有

$$\begin{aligned} (ABxCx^{-1}) &\sim_{\rm el} ((Bxy)(y^{-1}Cx^{-1}A)) \text{ (运算 2)} \\ &= ((yBx)(x^{-1}Ay^{-1}C)) \text{ (无异性 3)} \\ &\sim_{\rm el} (yBAy^{-1}C) \text{ (运算 2)} \\ &= (BAy^{-1}Cy) \text{ (无异性 3)}. \end{aligned}$$

然后, 用 x 代替 y^{-1}, 由无异性 1 即得定理结论. ♮

定理 2.4.6 对任何 A, B C 和 D 在一个多面形中有意义有

$$(AxBx^{-1}CyDy^{-1}) \sim_{\text{el}} (ACxDx^{-1}yBy^{-1}).$$

证 首先有

$$\begin{aligned}(AxBx^{-1}CyDy^{-1}) &\sim_{\text{el}} ((Axz)(x^{-1}CyDy^{-1})) \text{ (运算 2)}\\ &= ((zAx)(x^{-1}CyDy^{-1}z^{-1}B)) \text{ (无异性 3)}\\ &\sim_{\text{el}} (zACyDy^{-1}z^{-1}B) \text{ (运算 2)}\\ &= (ACyDy^{-1}z^{-1}Bz) \text{ (无异性 3)}.\end{aligned}$$

然后, 用 y 代替 z^{-1}, 由无异性 1, 即得定理结论. ♮

定理 2.4.7 对任何 A, B C 和 D 在一个多面形中有意义, 则

$$(AxBx^{-1}CyDy^{-1}) \sim_{\text{el}} (ACyxBx^{-1}Dy^{-1}).$$

证 首先有

$$\begin{aligned}(AxBx^{-1}CyDy^{-1}) &\sim_{\text{el}} ((x^{-1}Cyz)(z^{-1}Dy^{-1}AxB)) \text{ (运算 2)}\\ &= ((Cyzx^{-1})(xBz^{-1}Dy^{-1}A)) \text{ (无异性 3)}\\ &\sim_{\text{el}} (CyzBz^{-1}Dy^{-1}A) \text{ (运算 2)}\\ &= (ACyzBz^{-1}Dy^{-1}) \text{ (无异性 3)}.\end{aligned}$$

然后, 用 x 代替 z, 即得定理结论. ♮

从定理 2.4.5~ 定理 2.4.7 中, 引出一些交换规则以备适当利用.

2.5 曲面的分类

现在将*曲面*定义为单面形的集合. 因为单面形就是在第一版的预备知识中所说的偶多边形, 它所表示的就是无边缘的紧 (有界闭) 二维流形. 记 $\boldsymbol{S}$ 为所有曲面的集合, 可见 $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{P}$. 本节的目的在于导出在拓扑等价 (如前所述的初等等价) 意义下的曲面分类.

曲面性 1 对于 $(ABaa^{-1}) \in \boldsymbol{S}$,

$$(ABaa^{-1}) \Leftrightarrow (AB).$$

若 $(A), (B) \in \boldsymbol{S}$,

$$(AaBa^{-1}) \Leftrightarrow (AB).$$

曲面性 2 对于 $(AabBb^{-1}a^{-1}) \in \boldsymbol{S}$,

$$(AabBb^{-1}a^{-1}) \Leftrightarrow (AaBa^{-1}),$$

或对于 $(AabBabC) \in \boldsymbol{S}$,

$$(AabBabC) \Leftrightarrow (AaBaC).$$

曲面性 3 对于 $(AaBbCa^{-1}Db^{-1}) \in \boldsymbol{S}$,

$$(AaBbCa^{-1}Db^{-1}) \Leftrightarrow (ADCBaba^{-1}b^{-1}).$$

曲面性 4 对于 $(AaBa) \in \boldsymbol{S}$,

$$(AaBa) \Leftrightarrow (AB^{-1}aa).$$

根据 2.4 节所讨论的可以看出, 所有这些曲面性都给出了曲面上的拓扑变换. 下面就以它们为出发点, 导出作为无边缘的紧二维流形 (曲面) 的分类.

定理 2.5.1 令 $Q = (Axyx^{-1}y^{-1}zz) \in \boldsymbol{S}$, 则 $Q \sim_{\rm el} (Axxyyzz)$.

证 因为 $(A) \in \boldsymbol{S}$, 允许只讨论 $Q = (xyx^{-1}y^{-1}zz)$. 对于 z, 用曲面性 4 有

$$\begin{aligned}
Q &\sim_{\rm el} (xyzyxz)\ (\text{无异性 } 3)\\
&= (xzxyzy)\ (\text{对 } y \text{ 用曲面性 } 4)\\
&\sim_{\rm el} (xzxz^{-1}yy)\ (\text{无异性 } 3)\\
&= (z^{-1}yyxzx)\ (x \text{ 用曲面性 } 4)\\
&\sim_{\rm el} (z^{-1}yyz^{-1}xx)\ (\text{无异性 } 3)\\
&= (xxz^{-1}yyz^{-1})\ (\text{对 } z \text{ 用曲面性 } 4)\\
&\sim_{\rm el} (xxy^{-1}y^{-1}z^{-1}z^{-1})\ (\text{无异性 } 1)\\
&= (xxyyzz).
\end{aligned}$$

♮

引理 2.5.1 若 $Q \in \boldsymbol{S}$ 可定向而非形如

$$(AxByCx^{-1}Dy^{-1}E), \tag{2.5.1}$$

则 Q 必形如 $(Axx^{-1}B)$.

证 因为 Q 非形如 (2.5.1) 式, 所以由可定向性, 在 Q 中存在 y, 使得相继段 yAy^{-1} 最短. 如果 A 是空的, 则 Q 已经为所要求的形式. 否则, 由可定向性, 在 A 中存在相继段 zBz^{-1} 更短, 与 yAy^{-1} 最短矛盾. 因此, 只能 A 是空的, 即得引理结论. ♮

定理 2.5.2 若 $Q \in \boldsymbol{S}$ 可定向而非形如 (2.5.1) 式, 则 $Q \sim_{\text{el}} (xx^{-1})(= O_0)$.

证 由引理 2.5.1, Q 必形如 $(Axx^{-1}B)$. 如果 A 和 B 均空, 则 $Q \sim_{\text{el}} (xx^{-1})$ 即得欲求; 否则, $Q \sim_{\text{el}} (AB)$. 因为 (AB) 仍满足定理的条件, 用文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理, 直至 $(xx^{-1}) \sim_{\text{el}} Q$. ♮

定理 2.5.3 若 $Q \in \boldsymbol{S}$ 可定向且形如 (2.5.1) 式, 则存在一个整数 p, 使得 $Q \sim_{\text{el}} S_p$, 其中,

$$S_p = \left(\prod_{i=1}^{p} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}\right) \tag{2.5.2}$$

仅对于 $p \geqslant 1$.

证 因为 Q 形如 (2.5.1) 式, 由无异性 3, $Q = (EAxByCx^{-1}Dy^{-1})$. 由曲面性 3, $Q \sim_{\text{el}} (EADCBxyx^{-1}y^{-1})$. 因为 $(EADCB) \in \boldsymbol{S}$, 如果 $(EADCB)$ 非形如 (2.5.1) 式, 则由定理 2.5.2, $Q \sim_{\text{el}} S_1$, 即 $p = 1$ 的情形. 否则, 用文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理, 必终止于某整数 $p \geqslant 2$, 即得定理结论. ♮

形如 (2.5.2) 式的曲面 $S_p(p \geqslant 1)$ 被称为亏格 p 的可定向**标准曲面**. 由定理 2.5.2, $S_0 = O_0 = (xx^{-1})$ 称为亏格 0 的可定向标准曲面, 或称为**球面**, S_1 称为**环面**, S_2 称为**双环**. 一般地, S_p $(p \geqslant 3)$ 称为 p **环**.

引理 2.5.2 一个曲面 $Q \in \boldsymbol{S}$ 是不可定向的当且仅当存在 $x \in A_Q$, 使得 Q 形如 $(AxBxC)$.

证 用反证法. 假若在 Q 中无这样的 x, 则任何 $x \in A_Q$ 的两次出现均异幂. 这就意味着 Q 为可定向的, 与 Q 的不可定向条件矛盾. ♮

引理 2.5.3 若 $Q \in \boldsymbol{S}$ 是不可定向的, 则存在两个整数 $l \geqslant 0$ 和 $t \geqslant 1$, 使得

$$Q \sim_{\text{el}} \left(\prod_{i=1}^{l} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \prod_{j=1}^{t} z_j z_j\right).$$

证 由引理 2.5.2, Q 形如 $(AxBxC)$. 由无异性 3, $Q = (CAxBx)$. 由曲面性 4, $Q \sim_{\text{el}} (CAB^{-1}xx)$. 因为 $(CAB^{-1}) \in \boldsymbol{S}$, 由引理 2.5.2 和有限递归原理 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页), 存在 $t \geqslant 1$, 使得

$$Q \sim_{\text{el}} \left(D \prod_{i=1}^{t} x_i x_i\right),$$

其中, $(D) \in \boldsymbol{S}$. 因为 (D) 可定向, 由定理 2.5.2 和定理 2.5.3, 存在 $l \geqslant 0$, 使得 $(D) \sim_{\text{el}} S_l$. 由 (2.5.2) 式, 即可得引理结论. ♮

定理 2.5.4 若 $Q \in \boldsymbol{S}$ 是不可定向的, 则存在一个整数 $q \geqslant 1$, 使得 $Q \sim_{\text{el}} \tilde{S}_q$,

其中,

$$\tilde{S}_q = \left(\prod_{i=1}^{q} x_i x_i\right). \tag{2.5.3}$$

证　由引理 2.5.3 和定理 2.5.1 有

$$Q \sim_{\mathrm{el}} \left(\prod_{j=1}^{2l} y_j y_j \prod_{i=1}^{t} x_i x_i\right).$$

这就得 $q = 2l + t$. 因为 $l \geqslant 0$ 和 $t \geqslant 1$, 则有 $q \geqslant 1$.　♮

形如 (2.5.3) 式的曲面 $\tilde{S}_q(q \geqslant 1)$ 被称为亏格 q 的不可定向*标准曲面*. 特别地, $\tilde{S}_1$ 称为*射影面*, $\tilde{S}_2$ 称为 Klein *瓶*. 一般地, $\tilde{S}_q(q \geqslant 3)$ 称为 q*叉帽*.

2.6　图的曲面嵌入

将图在曲面上的拓扑表示作为点集, 即将节点视为点, 将边视为直线段, 连续地单射到一个拓扑空间. 这个单射的象被称为一个*嵌入*. 或者更确切地, 此图在这个空间中的一个嵌入. 就以欧几里得空间而论, 给定一个图, 不是任何一个空间都有它的一个嵌入. 例如, 不是任何一个图都能嵌入到平面 (二维空间) 上, 但已经证明任何一个图都可嵌入到三维空间上.

如果在这个单射上, 再附上允许不同边的内点到同一点 (即*重点*), 则这时的象被称为*浸入*. 由平面闭曲线的 Jordan 公理, 任何一个图均可浸入到平面上. 在一个浸入中, 如果没有重点, 自然这个浸入就是一个嵌入.

这里考虑图所嵌入的对象不是欧几里得空间, 而是一类二维流形. 它是紧 (有界闭) 的, 而且没有边缘. 这就是所说的曲面. 不过要注意, 在本书的范围内, 可以将球面与平面等同, 也就是将无穷视为一个点.

设 $\mu(Q)$ 是图 G 在曲面 S 上的一个嵌入, 则 $S - \mu(G)$ 有若干连通片. 有的连通片可以收缩到 0, 也允许是不可收缩的. 因为后者对于当前无意义, 而且增添不必要的繁琐, 不在考虑之列, 除非为说明某种普遍性才提到. 因此, 图 G 的一个嵌入就是一个多面形, 其支架的基准图就是 G.

从现有文献, 如 (Ringel, G.[3]) 中可以看到, 构造一个图的可定向嵌入, 有两种方法, 它们的手法一样, 只是在其中的行进方式略异, 如下面括弧中所示.

手法 2.6.1　*启始*　在每个节点处将所有关联半边选定一个*旋* (即循环序).

行进 1　根据 Jordan 公理, 将图浸入到平面上, 使得在每一个 (一些) 节点处的半边, 依顺时针方向 (其他节点处的半边依逆时针方向) 与选定的旋一致.

行进 2 从任选一边的某端某侧开始, 沿同侧直到回始端侧 (如果两端半边走向不同就从一侧横穿此边到另一侧). 若还有端侧尚未通过, 继任选其中的某端某侧开始行之.

终止 所有端侧都恰通过一次.

图 2.6.1 中, (a) 和 (b) 分别显示如何用这两种方法构造图的可定向曲面嵌入, 其中, 空圈和实圈分别表示代表节点处选的走向为顺和逆时针.

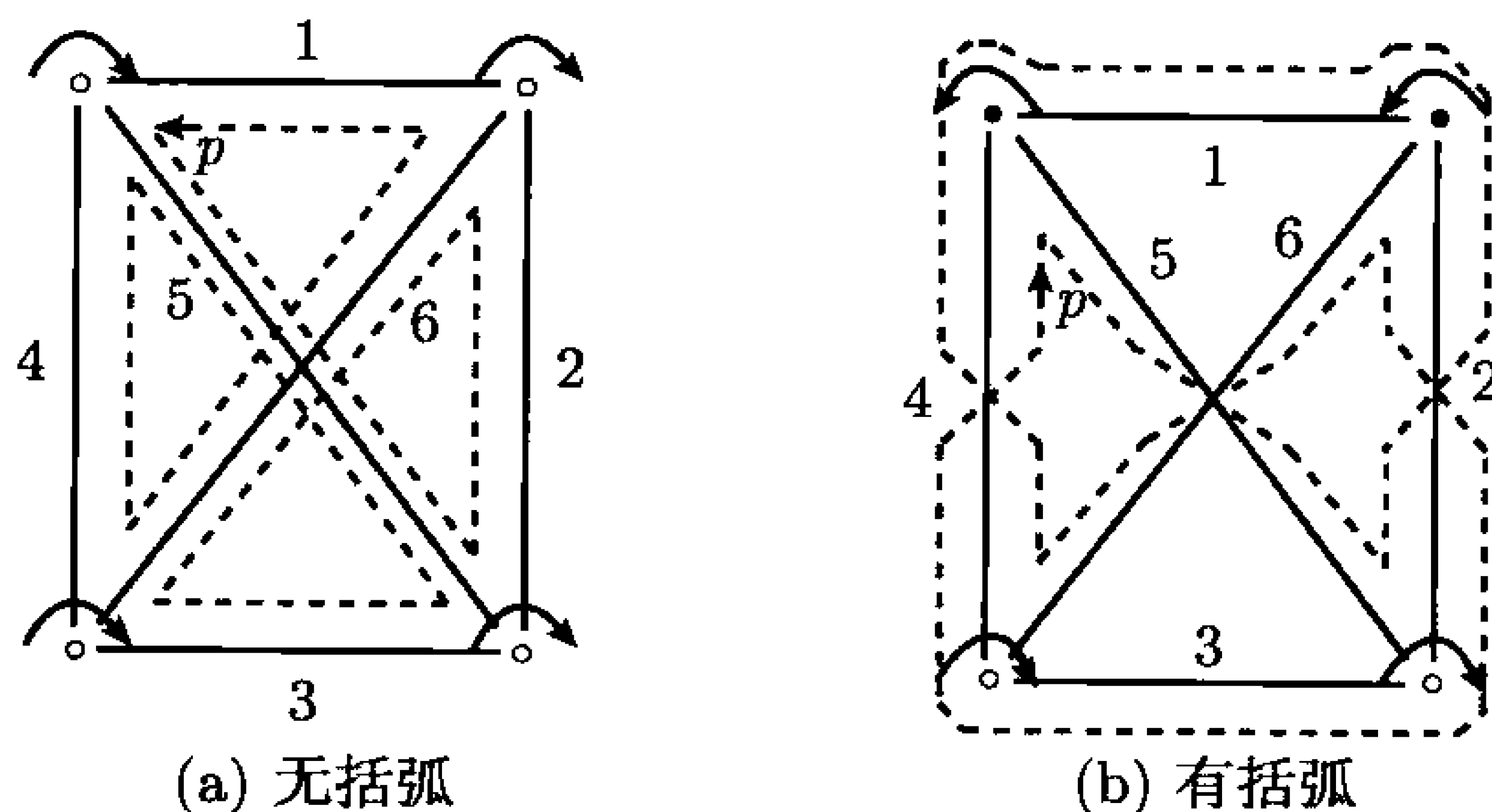


图 2.6.1 嵌入 K_4 到曲面上的两种方式

通过它们可以特别地了解这个手法的普遍可行性. 例如, 在每个节点处的旋都自然会一致. 从任何端侧开始总能回到开始端侧 (强有限递归原理, 参见文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页)), 以及有限步总能终止 (有限递归原理, 也参见文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页)).

为便于论述, 还要明示如下一些事实:

引理 2.6.1 以 v 和 u 为两端的所有曲线段与曲面 S 上一条可收缩闭曲线 C 都至少有一个公共内点当且仅当在 $S-C$ 的一个可收缩连通片中只含 v 和 u 之一.

证 因为 $S-C$ 有一个连通片是可收缩的, C 是双侧的, 由曲面闭曲线公理 (Liu, Y.P.[36], 第 7 页) 即可得引理的结论. ♮

由引理 2.6.1 可知用手法 2.6.1 所得到的是图上迂的一个二重覆盖.

设迂的一个集合 $\mathcal{C}$ 的二重覆盖图 G. 对于 G 的任意两边, 如果存在 $C\in\mathcal{C}$, 使得它们的两个半边 a 和 b 相继, 则称两个半边 a^{-1} 与 b 相合. 然后, 将相合通过传递律扩展为 G 的半边集上的一个等价关系. 如果与一个节点关联的所有半边形成一个等价类, 则称这个节点可迁.

例 2.6.1 为了叙述简便, 如 a 边的正端左侧总是默认为 a, 它的负端右侧为 a'^{-1}, 默认为 a^{-1}. 用手法 2.6.1, 从图 2.6.1(a) 得到

$$P_1=\{(152635^{-1}46^{-1}),(1^{-1}2^{-1}3^{-1}4^{-1})\},$$

从图 2.6.1(b) 得到

$$P_2 = \{(45214^{-1}62^{-1}3), (1^{-1}6^{-1}3^{-1}5^{-1})\}.$$

可以看出, 每个节点都可迁. 例如, 对于 P_1, 由 5 与 4, 4 与 1 以及 1 与 5 相合可知节点 p 可迁; 对于 P_2, 由 5 与 1^{-1}, 1^{-1} 与 4^{-1} 以及 4^{-1} 与 5 相合可知节点 p 也可迁.

引理 2.6.2　手法 2.6.1 所得的图上迂的集合二重覆盖这个图, 在每个节点处都可迁.

证　在行进 2 中, 每完成一次迭代就得到图上的一个迂, 而且半边不重复. 由终止规则, 所得迂的集合为图的一个二重覆盖. 这就是第一个结论.

设 $\mathcal{C}$ 是手法 2.6.1 所得图上迂的集合, $(abc\cdots)$ 为在任一节点处的旋. 由行进 2, 存在 $C \in \mathcal{C}$, 使得 $a^{-1}b \subseteq C$, 从而 a 与 b 相合. 由有限递推原理 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页), $(abc\cdots)$ 本身形成一个等价类. 这就得第二个结论. ♮

引理 2.6.3　图 G 上迂的一个二重覆盖是它的一个嵌入当且仅当它的节点都可迁.

证　设 $\mathcal{C}$ 为 G 上迂的一个二重覆盖. 只要将 G 的每一条边给定一个方向, 也给定 $\mathcal{C}$ 中每个迂一个走向, 使得其上边的出现, 只要与这个边同向, 就记为其代表记号 (字母或数字) 本身; 否则, 记为它的逆. 如果 $\mathcal{C}$ 的支架是连通的, 则 $\mathcal{C}$ 本身就是一个多面形.

必要性. 因为 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个嵌入, $\mathcal{C}$ 是一个多面形, G 就是其支架的基准图, 从而 $\mathcal{C}$ 使 G 的每个节点可迁.

充分性. 对于 G 上迂的一个二重覆盖 $\mathcal{C}$ 使得每个节点可迁, 因为 $\mathcal{C}$ 是一个多面形且其支架的基准图为 G, 从而可知 $\mathcal{C}$ 就是 G 的一个嵌入. ♮

定理 2.6.1　用手法 2.6.1 所得到的都是图的可定向嵌入.

证　由引理 2.6.2 和引理 2.6.3, 用手法 2.6.1 所得到的是图的一个嵌入. 它的可定向性从可使每条边的两次出现异幂得到. ♮

不管怎样, 手法 2.6.1 不能产生图的不可定向嵌入. 因为在不可定向嵌入上, 必有边的两次出现同幂, 这就使得它的支架上, 总有权为 1 的棱. 由此启示, 在选择每个节点关联半边的基础上, 还要分配每边一个二元权, 即 0 或 1, 将图转变为一个网络. 将它称为这个图的联网, 如图 2.6.2(a) 所示.

定理 2.6.1 表明, 手法 2.6.1 中的两种方法所产生的图在曲面上的嵌入同为可定向的, 进而还可以从定理 2.3.5 看出, 这两个嵌入无异. 这就允许今后不必考虑手法 2.6.1 中括弧内的情形.

下面看一看如何能产生一个图的所有可定向与不可定向嵌入.

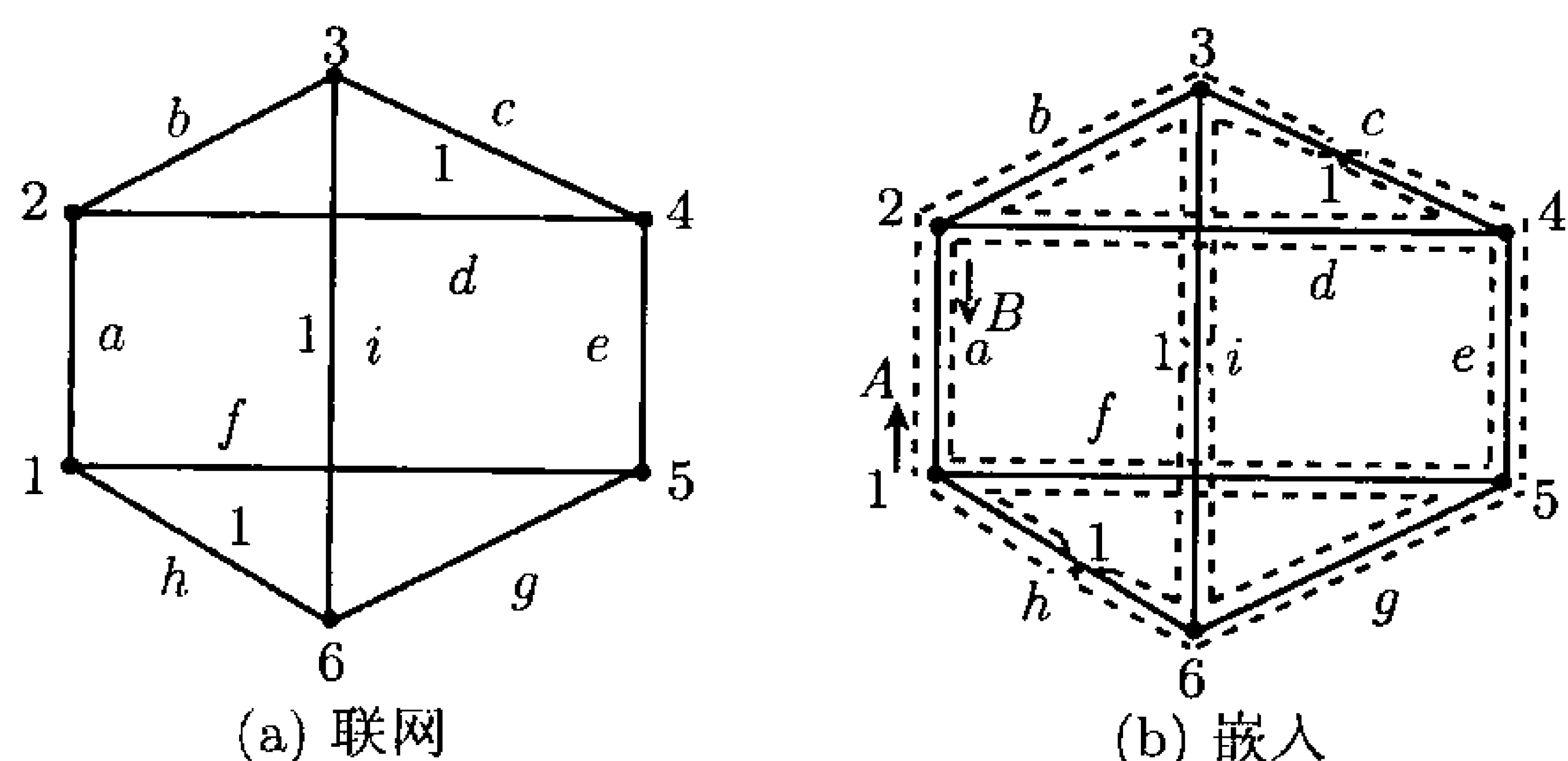


图 2.6.2 图的联网与嵌入

手法 2.6.2 *启始* 将图浸入到平面上, 使得每个节点出的半边, 按顺时针走向与给定的旋一致. 标出权为 1 的边, 无标示的边权自然为 0. 将带标示的边称为**扭边**.

行进 从一条边的未走过的端侧出发, 如果这条边没有标示, 就走到同侧另端; 否则, 到另侧另端. 然后, 直到回出发的端侧.

终止 所有边的端侧都恰走过一次.

例 2.6.2 对于图 2.6.2(a) 所示联网的基准图, 用手法 2.6.2 得到它的一个嵌入 $P=\{A,B\}$, 其中

$$A=(abcdbigfhgec^{-1}ih^{-1}),$$

$$B=(a^{-1}f^{-1}ed).$$

用 $'$ 区别一个字母在同一个面上的两次出现,

$$A=(abcdb'igfhg'ec'^{-1}i'h'^{-1})$$

或

$$(a^{-1}h'i'^{-1}c'e^{-1}g'^{-1}h^{-1}f^{-1}g^{-1}i^{-1}b'^{-1}d^{-1}c^{-1}b^{-1}),$$

和

$$B=(a'^{-1}f'^{-1}e'd') \quad \text{或} \quad (a'd'^{-1}e'^{-1}f'),$$

如图 2.6.2(b) 所示.

多面形 P 的节点集为 $\{1,2,3,4,5,6\}$, 其中,

$$1=(af'^{-1}h) \quad \text{或} \quad (a'h'f^{-1}),$$

$$2=(a'^{-1}bd^{-1}) \quad \text{或} \quad (a^{-1}d'^{-1}b'),$$

$$3=(b'^{-1}ci') \quad \text{或} \quad (b^{-1}ic'),$$

$$4=(c'^{-1}de'^{-1}) \quad \text{或} \quad (c^{-1}e^{-1}d'),$$

$$5=(ef'g^{-1}) \quad \text{或} \quad (e'g'^{-1}f),$$

$$6=(g'i^{-1}h'^{-1}) \quad \text{或} \quad (gh^{-1}i'^{-1}).$$

通过略去幂 -1, 用 $^{-1}$ 代替 $'$, 则有

$$1=(af^{-1}h),\quad 2=(a^{-1}bd),\quad 3=(b^{-1}ci^{-1}),$$
$$4=(ced^{-1}),\quad 5=(e^{-1}g^{-1}f),\quad 6=(ghi^{-1}).$$

可见, 如图 2.6.2(b) 所示带旋的联网就是多面形 P 的支架.

定理 2.6.2　用手法 2.6.2 在图 G 上所得到的是 G 的一个曲面嵌入, 它的联网就是这个嵌入的支架.

证　事实上, 例 2.6.2 已经提示了为证明此定理所需要的普遍性. 手法 2.6.2 不仅可以产生可定向嵌入, 而且还能产生不可定向嵌入. 它们的支架就是相应的联网, 从而定理为真. $\natural$

从定理 2.3.10 和定理 2.3.11 可以看出, 一个图在曲面上的所有嵌入在无异 (即拓扑等价) 之下, 当一个支撑树选定后, 可以分成典型嵌入类.

给定图 G, 令 T 为 G 的一个支撑树, $\overline{T}$, 对于 T 的上树. 记 $\mathcal{D}=2^{\overline{T}}$, 由 $\overline{T}$ 的所有边子集组成的集合. 注意, $\overline{T}$ 中的边数为 G 的 Betti 数, 与 T 的选择无关. 对于 G 的节点集 V, 令 $\mathcal{R}$ 为所有 G 的旋 R 组成的集合, 即 $R=\{\varrho(v)|\forall v\in V\}$, 其中, $\varrho(v)$ 为节点 v 的旋.

图的一个嵌入被称为*典型*的, 如果其相应多面形是典型的. 从而嵌入的拓扑等价类可从多面形的无异类导出.

引理 2.6.4　对于给定的一支撑树 T, 在图 G 曲面嵌入任何一类中都恰有一个典型嵌入.

证　由引理 2.3.9 知 G 的每类嵌入中都有一个是典型的. 由定理 2.3.11 和定理 2.3.12 知只能有一个这样的嵌入. $\natural$

定理 2.6.3　只要给定一个支撑树, 对于 $R\in\mathcal{R}$ 和 $D\in\mathcal{D}$, 二元组 (R,D) 是图的曲面嵌入拓扑等价类的完全不变量.

证　这是定理 2.3.11 和定理 2.3.12 的一个直接结果. $\natural$

对于图 G 的一个支撑树 T, $(R,D)(R\in\mathcal{R},D\in\mathcal{D})$. 令 $\mathcal{E}_T$ 为由 (R,D) 所确定的典型嵌入的集合.

定理 2.6.4　给定图 G 的任何两个支撑树 T' 和 T, 对于任何 $\xi\in\mathcal{E}_T$ 有且仅有一个 $\eta\in\mathcal{E}_{T'}$, 使得 $\xi\sim_{\rm top}\eta$.

证　对于 G 的一个嵌入 μ, 记 $E_0(\mu)$ 为其支柱上所有权 0 边的集合. 如果 $T'\subseteq E_0(\xi)$, 则 $\eta=\xi$; 否则, 设 $a'\in T'$ 且在 ξ 支架上权为 1. 因为 $a'\notin T$, 则在基本权 $C_T(a')$ 上有且仅有 a 在基本上权 $C^*_{T'}(a)$ 上. 通过对 $C^*_{T'}(a)$ 作开关运算得 $\xi_1\sim_{\rm top}\xi$. 然而, 这时 T' 在 ξ_1 支架上权为 0 的边数减少 1. 根据有限递归原理 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 知总能得到 $\eta\in\mathcal{E}_{T'}$, 而且 $\eta\sim_{\rm top}\xi$. 注意到此过程的唯一性, 即得定理的结论. $\natural$

由定理 2.6.4 知定理 2.6.3 提供的嵌入分类不依赖于 T 的选择. 另外, 这一节还可同时提供关于图的曲面可定向和不可定向嵌入存在性定理.

定理 2.6.5 对任何一个有边的图, 存在一个可定向曲面, 使得它在这个曲面上有一个嵌入. 对任何一个图, 但不是树, 存在一个不可定向曲面, 使得它在这个曲面上有一个嵌入.

证 由定理 2.6.3, 用手法 2.6.2, 当联网上所有边的权都取 0 时, 所得的就是一个可定向的嵌入. 因为任何有边的图都有这样的联网, 任何一个有边的图有可定向嵌入. 这就得到第一个结论.

因为一个图如果不是树, 则必有一个圈, 从而它总有一条上树边. 只要将联网上一条上树边的权取为 1, 其他边均为 0, 用手法 2.6.2 所得的就是一个不可定向嵌入. 这就有第二个结论. ♮

对于图 G 在曲面上的嵌入 $\mu(G)$, 记 $\nu(\mu G)$, $\epsilon(\mu G)$ 和 $\phi(\mu G)$ 分别为它的顶点数 (或阶)、棱数 (或度) 和面数.

定理 2.6.6 对于一个给定的曲面 S, 一个图 G 在其上的任何一个嵌入 μ 总有 $\mathrm{Eul}(\mu G) = \nu(\mu G) - \epsilon(\mu G) + \phi(\mu G)$ 只与 S 相关而与 G 无关, 进而

$$\mathrm{Eul}(\mu G) = \begin{cases} 2-2p, & p \geqslant 0, S \text{ 是亏格为 } p \text{ 的可定向曲面}, \\ 2-q, & q \geqslant 1, S \text{ 是亏格为 } q \text{ 的不可定向曲面}. \end{cases} \tag{2.6.1}$$

证 注意到嵌入 μ 是一个多面形, 多面形在初等变换下, Euler 示性数 $\mathrm{Eul}(\mu)$ 不变, 则有 $\mathrm{Eul}(\mu)$ =$\mathrm{Eul}(S)$. 可见, 与 G 无关. 当 S 是亏格 $p \leqslant 0$ 可定向曲面时, 由 (2.5.2) 式知 $\mathrm{Eul}(S) = 2 - 2p$. 当 S 是亏格 $q \leqslant 1$ 不可定向曲面时, 由 (2.5.3) 式知 $\mathrm{Eul}(S) = 2 - q$. 这就得到定理的结论. ♮

2.7 注　记

(1) 关于曲面与多面形, 在拓扑学的书中多有介绍, 如可参见文献 (Massey, W.S.[1]). 不过在所有熟悉的文献中, 从未见到有关定理有效性的讨论. 本章则是从定理有效性的观点, 建立可以有效实现的定理, 应该是便于实施, 也便于理解.

(2) 在 2.1 节中, 以 Heffter-Edmonds 模型为基础, 逐步引入组合化的公理形式, 不仅澄清和简化了构造多面形及其对偶的过程, 还为 2.5 节中关于图的可定向与不可定向嵌入的存在性以及分类的研究提供了理论基础.

(3) 在 2.2 节和 2.3 节中, 特别是定理 2.2.1 和定理 2.3.3 的 5 款, 只有通过 (2) 才使得其他款能有效实现. 其实, 这样的思路源于刘彦佩于 1978 年发表的文章 (Liu, Y.P.[1]), 那里借助的是派生图 (以后的文献称为平面性辅助图). 这里的支柱与支架也是一种辅助图.

(4) 虽然在第一版就提到曲面的多边形表示, 但并未剖析其源由. 在 2.5 节中, 第一次明确了这几个曲面性作为拓扑变换, 使得作为无边缘紧二维流形的曲面在这些拓扑变换下分类.

(5) 应该说, 理论结果的有效性研究仍源自基础数学本身. 例如, 向量空间的基表示、群的生成元与关系元表示、自由群只是无关系元的特例、拟阵的基表示以及图的基本圈和基本上圈表示等. 然而, 即使二部图判别定理的有效化, 似乎也是 1978 年 Liu, Y.P.[1] 之后的事, 足见本书强调此的必要.

(6) 将一个支撑树作为图在曲面上的嵌入的基点, 始于 20 世纪 70 年代末. 例如, 在文献 (Liu, Y.P.[8, 9]) 中, 就是将图的曲面嵌入转化为对于一个支撑树所有上树边的嵌入 (即单面形!), 其源由在于任何树均可嵌入 (胞腔地!) 到球面上, 进而到 (未必胞腔地!) 连通的二维流形上. 为得到图在一般曲面上的胞腔嵌入 (即这里的嵌入), 只需适当安置上树边. 由此可以看出, 它就是今天所用的嵌入联树模型的雏形.

第3章 联树模型

3.1 树与上树

虽然树本身,不仅在图论中,而且在数学别的分支中,是最简单的,而且也是重要的一个课题.这里不能详细讨论其各个方面,仅就树作为图的子图,以简化对于与各种图的可嵌入性,以及确定相应的嵌入等有关问题的处理.

树作为一类图在 1.3 节中已给出了定义,而且它还可以用下面的说法之一确定.这些说法将会在以后用到.

树性 1 一个连通且无圈的图.

树性 2 阶为 ν 度为 $\nu-1$ 的连通图.

树性 3 任何两个节点都有且仅有一路连它们的图.

树性 4 任何一个连通子图皆为树的连通图.

树性 5 基本群是平凡群的图.

当然,它们都容易被证明,而且其中一些 (就作者之印象树性 1~ 树性 3) 可以在任何一本基础图论的教科书中看到.不管怎样,这里还关心树在曲面上的可嵌入性和嵌入.

令 $G=(V,E)$ 是一个图.对于 $v\in V$, $E_v=\{e_1(v),e_2(v),\cdots,e_{\rho(v)}(v)\}$,即与 v 关联的边的集合.在 v 处的*旋*定义为 $\varrho(v)=(e_1(v),e_2(v),\cdots,e_{\rho(v)}(v))$ 所确定的循环序,进而图 G 的*旋*,即 $\varrho(G)=\{\varrho(v)\mid\forall v\in V\}$.如果将每一边任意安排一个方向,和在每一节点处给定一个旋,并且不同的边用不同的字母表示,则在一个树 T 上,可依如下方式确定一个旅行规则:

旅行规则 每当从 $E_v(T)$ 中的一条边 a 达到节点 v,就在 T 上沿着依此节点处的旋,紧接着沿 a 的尚未离 v 向前旅行过的边,继续往前走.

如果选定节点 v_0 为起点,与 v_0 关联的一条边 e_0 为始边,按照旅行规则,在事先给定的旋之下能走就走.若将所通过的边的代表字母记录下来,并且根据走向与边的选定方向相同或相反,分别赋予这个字母以 1 或 -1 作为幂,则旅行结束后可得到一个字,称之为 T 的一个*码*.

引理 3.1.1 凡树的码皆为多面形,并且这个多面形只有一个面.

证 令 c_T 是树 T 的一个码.首先,证 c_T 是 T 上的一个迂.若不然,设终点为 v_1 不等于 v_0.由定理 1.3.2,进入 v_1 的次数比离开 v_1 的次数多 1.由旅行规则,

v_1 不可能是终点. 然后, 证每个字母恰在 c_T 中出现两次. 因为 T 的每条边皆割边, c_T 是一个迂, 故 c_T 每边必恰出现两次. 最后, 由于导出子图 $T[E(c_T)]$ 的连通性, c_T 是一个仅有一个面的多面形. ♮

引理 3.1.2 一个树 T 的码的基准图是 T 本身.

证 设 T' 是 T 的码 c_T 的基准图且 $T' \neq T$. 由 T 的连通性, 有一边 $a \in E(T) \setminus E(T')$ 且在 T 上与节点 $v \in V(T')$ 关联. 由旅行规则, 第一条进入 v 的边也是最后一条离开 v 的边. 这就是说, $E_v(T') = E_v(T)$. 与假设 $T' \neq T$ 矛盾. ♮

令 $\mathcal{T}$ 为所有树的集合. 对于一个树 $T \in \mathcal{T}$, 令 $\mathcal{C}_T$ 为 T 的所有码的集合.

定理 3.1.1 对于任何 $T \in \mathcal{T}$ 和 $c_T \in \mathcal{C}_T$ 有 $c_T \sim_{\mathrm{el}} S_0$.

证 由于任何树皆无圈, 必有一个*显节点* v_1 (或悬挂点). 设 a 是那条与 v_1 关联的边, 则有形式 $c_T = Aaa^{-1}B \sim_{\mathrm{el}} AB$. 由树性 4, AB 的基准图仍为树. 由有限递归原理 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 即得定理结论. ♮

定理 3.1.2 对于任何 $T \in \mathcal{T}$, 不存在 $S \in \mathcal{S}(S \neq S_0)$, 使得 $c_T \sim_{\mathrm{el}} S$.

证 由树性 1, 树 T 在曲面上的任一嵌入只能有一个面, 从而它是 T 的一个码, 并且这个码在等价 $\sim_{\mathrm{el}}$ 的意义下与 T 的旋的选择无关. 由定理 3.1.1, 即得定理结论. ♮

如果 T 是图 $G = (V, E)$ 的一个支撑树, 或者说, G 上的一个树, 则 G 的支撑子图 $T^* = (V, E \setminus E(T))$ 被称为 G 上的一个*上树*. 如果 G 本身是树, 则它的上树只能是 G 的一个支撑孤立子图.

定理 3.1.3 在任何连通图上总有一个树, 从而也有一个上树.

证 如连通图 G 没有圈, 由树性 1, 它本身就是一个树; 否则, 可任选择一个圈, 从 G 中去掉这个圈上的一条边得一个新图. 如果它不再有圈, 则再由树性 1, 它就是一个树. 如若不然, 用这个新图代替 G, 继续上述过程. 由有限递归原理 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 总可求得 G 上的一个树. ♮

引理 3.1.3 令 T 是图 $G = (V, E)$ 上的一个树, T^* 是相应 T 的上树, 则对于 T^* 上的任一条边, 在 $T + e = (V, E(T) + e)$ 上恰有一个圈.

证 设 $e = (u, v)$. 由树性 3, 在 T 上恰有一条路 $P(u, v)$, 从而 $P(u, v) + e$ 只形成一个圈, 即得引理结论. ♮

对于图 $G = (V, E)$, 若 $X \subseteq V$,

$$E_X = \{(u, v) \mid \forall u \in X,\ \forall v \notin X,\ (u, v) \in E\},$$

则 $C^* = C^*(X) = G[E_X]$ 被称为 G 的一个*上循环*. 当 $X = \varnothing$ 或者 $X = V$ 时, $C^*(X)$ 称为*空的*, 也记为 $\varnothing$. 如果一个上循环没有非空真子图, 仍是一个上循环, 则称为*上圈*. 自然, 任何上循环都含一个上圈.

引理 3.1.4 令 T 是 G 上的一个树, T^* 为相应 T 的上树, 则对于 T 的任何一边 e, 在 $T^*+e=(V,E(T^*)+e)$ 中恰有一个上圈.

证 设 $e=(u,v)$. 因为任何一个上圈都有 T 中的一条边, 故在 T^* 中不含任何一个上圈. 又由于 T 的每一条边均为 T 的割边, 则 $T-e$ 至少有两个连通片. 令 A 是含 u 的连通片的节点集. 容易看出, $C^*(A)$ 包含在 T^*+e 中. 如果还有一个上循环 $C^*(B)$ 在 T^*+e 中, 则 $C^*(B)$ 定包含 e. 这时, $C^*(A\cup B\setminus A\cap B)$ 包含 T^* 中的一个上圈. 因 T^* 上无上圈, 故只能 $C^*(A)=C^*(B)$. ♮

由引理 3.1.3 可以称由上树的一边与相应的树所确定的圈为*基本圈*. 类似地, 由引理 3.1.4, 那些由一条树上的边与上树所确定的上圈为*基本上圈*, 进而还可以看出, 不管怎样取图上的树, 基本圈的数目均为 $\epsilon-\nu+1$, 即上树的度, 或称为*基圈数*, 也称为 Betti 数, 记为 $\beta(G)$. 类似地, 基本上圈的数目为*基上圈数*, 记为 $\alpha(G)$. 事实上, $\alpha(G)=\nu-1$, 即 G 上树的度.

定理 3.1.4 连通图 G 的基本群为

$$\pi_1(G)=\langle a_1,a_2,\cdots,a_\beta;--\rangle. \tag{3.1.1}$$

证 由定理 3.1.3, 令 T 是 G 上的一个树. 由定理 3.1.2 知, 凡树均可收缩到一个点. 由引理 3.1.4, 收缩 T 而得到的图仅由 $\beta(G)$ 个环组成, 记它们为 $a_1,a_2,\cdots,a_\beta$. 因此, 任何迂 (或者在拓扑学中称为闭路) 均可由它们所生成. 这就是定理的结论. ♮

也许人们会想到图在曲面上的可嵌入性. 假若一个图可以看成是一个树与一个圈合成的, 其中, 树已嵌入到平面上且伴随一个码. 这个圈可按照在码上出现的次序连接树的所有显节点, 则称它为 Halin 图, 这个圈被称为它的*外边界*. 当然, 所有 Halin 图皆为平面的, 而且还能证明任何 Halin 图都可嵌入到亏格为 $q=\beta(G)$ 的不可定向曲面上. 事实上, 在图 3.1.1 (a) 所示的图 (更确切地, Halin 图) 中有图 3.1.1(b) 所示的嵌入, 可以引申到一般情形, 其中, 英文字母表示树边, 希腊字母表示上树边. 这个嵌入只有一个面, 即 $(ac\gamma\alpha ba^{-1}\alpha\beta c^{-1}b^{-1}\beta\gamma)$, 或简记为

$$ac\gamma\alpha ba^{-1}\alpha\beta c^{-1}b^{-1}\beta\gamma.$$

容易验证, 它是不可定向的. 由 Euler 示性数断定为曲面 $\tilde{S}_q(q=\beta(G))$ 上的一个嵌入. 这个嵌入的对偶是

$$\{(a\alpha\gamma),(a^{-1}cb^{-1}),(b\beta\alpha),(c^{-1}\gamma\beta)\},$$

或简记为

$$(a\alpha\gamma,\ a^{-1}cb^{-1},\ b\beta\alpha,\ c^{-1}\gamma\beta). \tag{3.1.2}$$

下一节将进一步讨论.

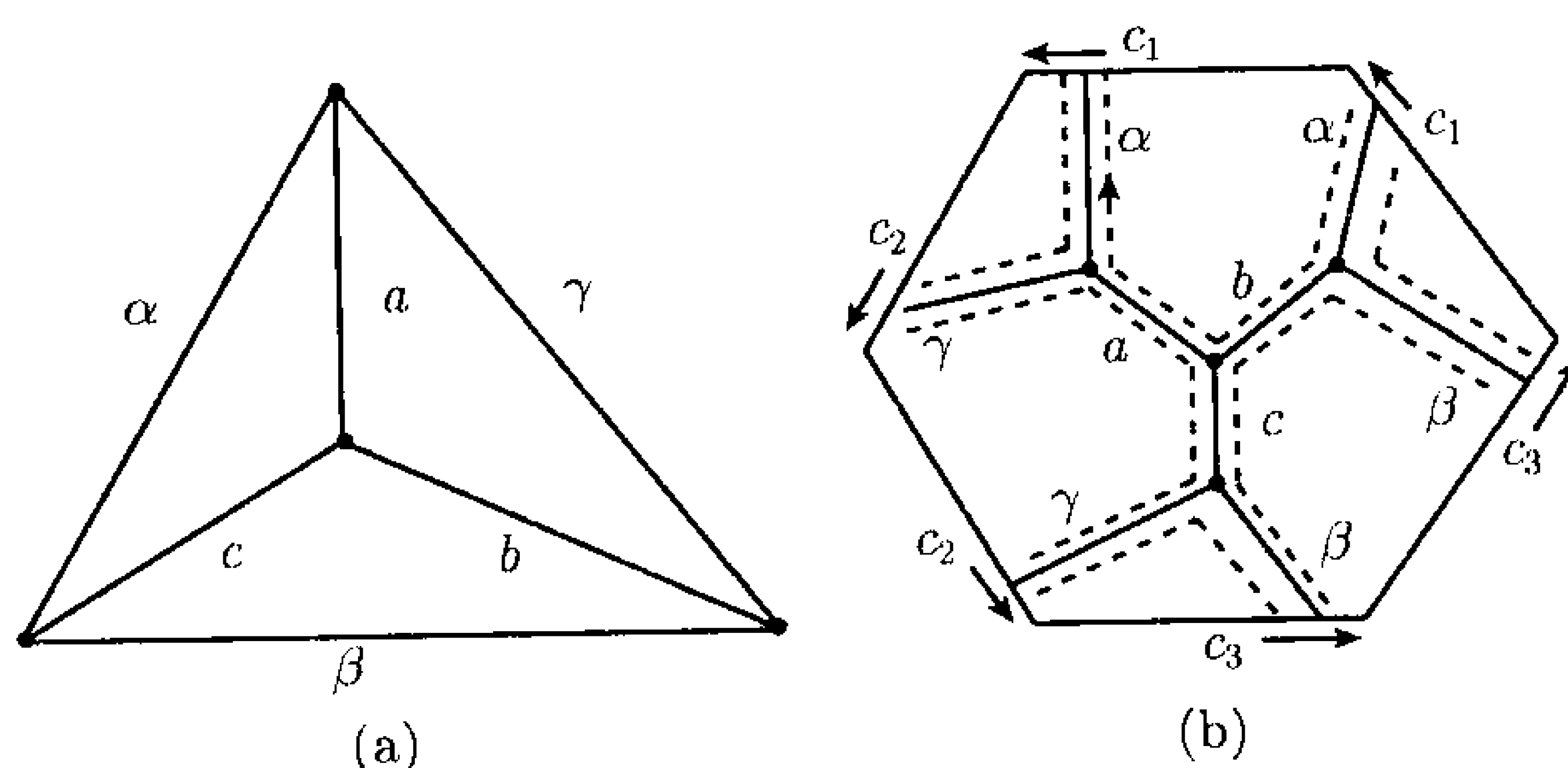


图 3.1.1　图和不可定向嵌入

类似地，也可以证明任何 Halin 图均可嵌入到亏格为 $p = \lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ 的可定向曲面 P_p 上. 这里也提供一个例子. 在图 3.1.2(a) 所示的图中有图 3.1.2(b) 所示的嵌入，它也可引申到一般 Halin 图的情形. 本书中，对于任一个实数 x，总用 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，用 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，分别称它们为**下整数** (**或地整**) 和**上整数** (**或天整**).

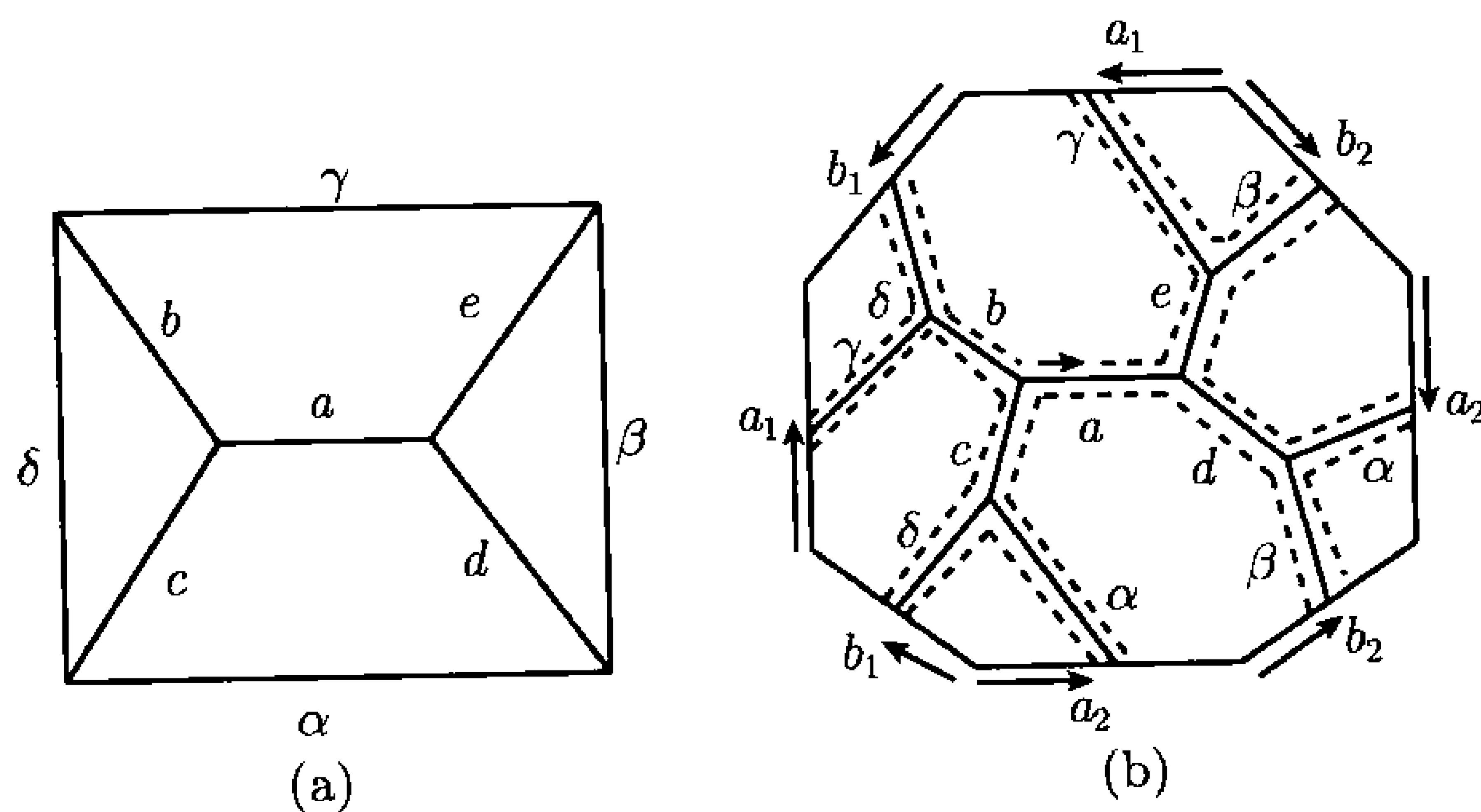


图 3.1.2　图和可定向嵌入

因为可以验证这个嵌入是可定向的，并且只有一个面，

$$ac\alpha\beta ed\alpha^{-1}\delta ba^{-1}e^{-1}\gamma\delta^{-1}c^{-1}b^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}d^{-1}. \tag{3.1.3}$$

由 Euler 示性数，它确是亏格为 $p = \lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ 的可定向曲面 S_p 上的一个嵌入，其对偶为

$$(ae^{-1}d,\ a^{-1}cb^{-1},\ b\gamma^{-1}\delta^{-1},\ c^{-1}\alpha\delta,\ \alpha^{-1}\beta d^{-1},\ \beta^{-1}e\gamma).$$

3.2　确　向　树

对于图 G 上的一个树，或者说，对于 G 的一个**支撑树** T，如果存在对 G 的边的定向，使得任一基本圈上的边均有相同的走向，或者说为**有向圈或回路**，则称 T

为一个准确向树. 若一个上树 T^* 使 G 的边有一种定向, 具有如下性质: 每一个基本上圈在 T^* 中的边全走向相同, 而与它在 T 上的那条边走向不同, 也称为有向上圈, 则称之为准确向上树. 当然, 既不是所有的树皆为准确向树, 也不是所有上树皆为准确向上树. 凡提及准确向树或准确向上树, 均指它们与所在的图已确定了边的方向.

定理 3.2.1 在图 $G=(V,E)$ 上的一个树 T 为准确向树当且仅当与它相应的上树 T^* 为准确向上树.

证 由于 T 为 G 上的一个准确向树, 存在 G 上的边的定向, 使得所有的基本圈均为有向圈. 设 $C_e{}^*$ 是由 $e\in E(T)$ 与 T^* 形成的那个基本上圈, A,B 为 $T-e$ 中的那两个连通片, 使边 e 的方向为从 A 到 B, 则由引理 3.1.3, 在 $C_e{}^*$ 中的所有上树边, 皆从 B 到 A, 从而 T^* 是一个准确向上树. 反之, 设 $C_e=ee_1e_2\cdots e_s$ $(e=(u,v), e_i=(v_{i-1},v_i), 1\leqslant i\leqslant s, v=v_0, v_s=u)$ 为由 $e\in E(T^*)$ 与 T 形成的那个基本圈. 由引理 3.1.4, 所有上圈 $C_{e_i}^*(1\leqslant i\leqslant s)$ 均含 e. 由于 T^* 为准确向上树, 在 $C_{e_1}^*$ 中 e 的方向与 e_1 的方向不同. 或者说, $e_1=\prec v,v_1\succ$, 当 $e=\prec u,v\succ$ 时. 同理, $e_2=\prec v_1,v_2\succ,\cdots,e_s=\prec v_{s-1},u\succ$, 从而在基本圈上所有的边皆同向. 这就是说 T 是一个准确向树. ♮

定理 3.2.1 使得总可以只讨论准确向树. 如果一个节点 v 在准确向树上没有进入的边, 则 v 称为 T 的源. 反之, 若一个节点只有进入的边, 则称它为汇. 一个准确向树可以有两个以上的源. 若一个准确向树只有一个源, 则称它为确向树. 一个上树, 若它所确定的树是确向树, 则称之为确向上树.

引理 3.2.1 一个准确向树 T 在图 G 上是一个确向树当且仅当它有 $\nu-1$ 个节点, 使得每个均只有一条进入的边.

证 由 3.1 节中的树性 3 知必要性是显然的. 反之, 由 3.1 节中的树性 1 知那个仅有的例外节点是 T 的唯一的源. 这就得到了充分性. ♮

引理 3.2.2 若 T 是图 G 上的一个确向树, 则对于任何 $H\subseteq G$, $T_h=T\cap H$ 是 H 上的一个确向树当且仅当 T_h 是 H 上的一个树.

证 由于确向树本身是树, 必要性显然. 反之, 由于 H 中对于 T_h 的基本圈也为 G 对 T 的基本圈, 并且 T_h 是一个树, 即可得充分性. ♮

引理 3.2.3 确向树 T 的一个节点是汇当且仅当它是一个显节点, 只有当源为显节点时对于充分性例外.

证 因为确向树 T 只有一个源, 由 3.1 节中的树性 3 知任何一节点有且仅有一条有向路由源指向它, 故每一个显节点 (除源也为显节点外) 均必为汇. 这就是充分性. 反之, 若有一个节点 v, 它是 T 的汇, 但不是显节点, 则由 T 有唯一的源, 必有两条有向路从源指向 v. 与 3.1 节中的树性 3 矛盾, 从而只能必要性成立. ♮

如果将一个准确向树 T 的所有边皆反向, 则所得的有向树称为 T 的反向形.

类似地可知一个准确向上树的反向形的意义.

定理 3.2.2　一个准确向树 T 的反向形是准确向树, 它是一个确向树当且仅当 T 只有一个汇. 一个确向树 T 的反向形是确向树当且仅当 T 本身是一条 Hamilton 路.

证　由于有向圈的反向形仍是有向圈, 第一个说法的前半部是对的. 由于在 T 的反向形中, 一个节点是源当且仅当它在 T 中是汇, 其后半部也为真. 因为路本身也是树, 则有第二个说法的充分性. 由引理 3.2.3, 此确向树 T 只有两个显节点. 由 3.1 节中的树性 3 即得必要性. ♮

为了在一个图上求确向树, 需要引进反射规则和调整 3.1 节中的旅行规则.

反射规则　每当第一次沿一条边达到一个已访问过的节点, 就沿此边返回, 并将此边标为反射的.

调旅规则　即 3.1 节中的旅行规则, 只要每到一个节点, 在此节点的旋中不计反射边.

对于一个图 $G=(V,E)$, 如果旋 $\varrho(G)$ 已经给定, 则可以根据反射规则和调旅规则, 用如下的过程沿 G 的边旅行:

确向过程　选择节点 v_0 作为始点, 与 v_0 关联的一条边 e_0 作为始边. 只要达到一个节点 v, 先用反射规则 (如可能), 再用调旅规则.

令 D_G 为在图 G 上用确向过程所得的字. 在这个字中, 每一个字母表示 G 的一条边. 一个字母的幂为 1 (总是略之) 或 -1 分别表示第一次或第二次通过这个字母所代表的边.

引理 3.2.4　令 D 是由 D_G 中的所有非反射边组成的集合, 则 D 形成 G 上的一个树.

证　注意到每当必须反射时, 就在 G 中发现一个含有这个反射边的圈. 那个由所有 D_G 中非反射边在 G 中所导出的子图 $G[D]$ 必连通且无圈, 从而由 3.1 节中的树性 1, $G[D]$ 是一个树. ♮

引理 3.2.5　D_G 是一个多面形且 $D_G\sim_{\rm el}S_0$.

证　当在 D_G 中无反射边时, 由引理 3.2.4 和定理 3.1.1, 引理为真. 若 a 是一个反射边, 则 D_G 具有形式 $Aaa^{-1}B$. 由运算 0, $D_G\sim_{\rm el}AB$. 由归纳假设, $AB\sim_{\rm el}S_0$. 即得引理结论. ♮

定理 3.2.3　一个图 $G=(V,E)$ 有一个确向树当且仅当 G 是连通的.

证　由于确向树本身是 G 的支撑树, 必要性显然. 反之, 由引理 3.2.4 并注意到在每个节点处, 只要依确向过程通过与它关联的一边, 则与它关联的每一边都必通过两次. 从 G 的连通性即得所有非反射边的导出子图就是 G 上的一个确向树. 这就是充分性. ♮

由引理 3.2.4, 引理 3.2.5 和定理 3.2.3, 可以记 $T_{\text{od}} = G(D)$ 为 G 的确向树, $T_{\text{od}}{}^*$ 为由 T_{od} 所确定的确向上树. 令 O_{r} 和 O_{n} 分别为确向过程在 G 上所得的所有反射边和所有非反射边的集合, 则 $E(T_{\text{od}}) = O_{\text{n}}$, $E(T_{\text{od}}{}^*) = O_{\text{r}}$. 以后, 不区别边和代表它的字母. 多面形 D_G 被称为 G 的*确向码*. 由引理 3.1.3 和引理 3.1.4, $T_{\text{od}}{}^*$ 的度为 $\beta = \beta(G) = \epsilon - \nu + 1$, T_{od} 的度为 $\alpha = \alpha(G) = \nu - 1$. 这就允许记 $O_{\text{r}} = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\beta\}$, $O_{\text{n}} = \{b_1, b_2, \cdots, b_\alpha\}$. 对于 $\gamma \in O_{\text{r}}$, 可记

$$D_G = A_0abA\gamma\gamma^{-1}Bb^{-1}a^{-1}A_0^{-1},$$

其中, $a, , b, \gamma \in E_v$, $v \in V$. 令

$$\varphi_\gamma(D_G) = A_0abA\gamma bB^{-1}\gamma a^{-1}A_0^{-1}, \tag{3.2.1}$$

称这种运算为在 v 处的*反射约化*. 在第 14 章中, 将会看到它实际上是一种叉帽. 容易验证, 它是不可交换的. 在合成运算中要考虑到次序, 进而令

$$D_{Gi} = \prod_{j=1}^{i} \varphi_{\gamma_j}(D_G) = \varphi_{\gamma_i} \prod_{j=1}^{i-1} \varphi_{\gamma_j}(D_G), \tag{3.2.2}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, \beta$. 在 D_G 中, 与反射边关联的显节点被称为 D_G 的*反射节点*.

引理 3.2.6 在 (3.2.2) 式中确定的 $D_{Gi}(i = 0, 1, 2, \cdots, \beta)$ 是一个多面形. 它有一个面、$\epsilon - i + 1$ 个节点和 ϵ 条边.

证 当 $i = 0$ 时, 由引理 3.2.5 已经知道 $D_G \sim_{\text{el}} S_0$. 因此, D_G 有一个面、$\epsilon + 1$ 个节点和 ϵ 条边. 进而, 由于反射约化保持面数和边数不变, 而且每次减少一个反射节点, 即可得引理结论. ♮

引理 3.2.7 对于任何 $i(1 \leqslant i \leqslant \beta)$ 有 $D_{Gi} \sim_{\text{el}} \tilde{S}_i$.

证 当 $i = 1$ 时, 不妨设

$$D_G = A_0abA\gamma_1\gamma_1{}^{-1}Bb^{-1}a^{-1}A_0^{-1},$$

其中, γ, a 和 b 有一个共同的端点. 因为

$$D_{G1} = \varphi_{\gamma_1}(D_G) = A_0abA\gamma_1 bB^{-1}\gamma_1 a^{-1}A_0^{-1},$$

由 (2.4.5) 式有

$$D_{G1} \sim_{\text{el}} A_0abABb^{-1}a^{-1}A_0^{-1}\gamma_1\gamma_1.$$

不管怎样, $A_0abABb^{-1}a^{-1}A_0^{-1} = D_G(G - \gamma_1)$. 由引理 3.2.5 和 2.4 节中的运算 0,

$$D_{G1} \sim_{\text{el}} \gamma_1\gamma_1 = \tilde{S}_1.$$

一般地, 从 $D_{Gi} \sim_{\rm el} D_{Gi-1}(G-\gamma_1)\gamma_1\gamma_1$ 和归纳假设 $D_{Gi-1}(G-\gamma_1) \sim_{\rm el} \tilde{S}_{i-1}$, 由定理 2.5.4, 即可得引理结论. ♮

定理 3.2.4　令 $\mathcal{G}$ 为所有连通图的集合, $\mathcal{T}$ 为所有树的集合, 则对任何 $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, $G = G(D_{G\beta})$, G 可嵌入到 $\tilde{S}_\beta$ 和 $D_{G\beta} \sim_{\rm el} \tilde{S}_\beta$.

证　因为中间的说法是前后两个说法的一个直接推论, 只需证明前后两个说法. 由引理 3.2.6 的 $i=\beta$ 情形, 前一个说法为真. 由引理 3.2.7 的 $i=\beta$ 情形, 可得后一个说法. ♮

上面用的求一个图 G 在亏格为 $\beta(G)$ 的不可定向曲面上的一个嵌入 $G(D_{G\beta})$ 的方法, 也可以推广到用于求 G 在亏格为 $\lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ 的可定向曲面上的嵌入 (如果存在的话). 由于在这一情况下的复杂性, 只能留待第 14 章中详细讨论.

3.3 扩　张　树

令 $G=(V,E)$ 为一个图和 T, 其上的一个树 (即支撑树). 设 $a_1=(u_1,v_1)$, $a_2=(u_2,v_2)$, $\cdots$, $a_k=(u_k,v_k)$ 为所有上树边. 因为 T 有 $\nu-1$ 条边, $k=\epsilon-\nu+1$, 即 G 的 Betti 数.

若将 $a_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 用两条边 (u_i,x_i) 和 (v_i,y_i) 代替, 使得 x_i 和 y_i 全是新增添的悬挂点. 这样, 它们连同 T 所得的图也是一个树, 称之为一个扩张树, 记为 $\hat{T}$. 例如, 若记图 3.1.2(a) 为 G, 由边 a, b, c, d 和 e 所生成的是 G 的一个支撑树 T. 图 3.1.2(b) 中, 由 T 添上那 8 条用希腊字母表示的作为悬挂边所得的为 G 的一个扩张树. 所谓联树就是确定 G 的一个曲面嵌入的扩张树. 不过这里为方便起见, 将希腊字母全用数字代替.

令 $\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\beta)$ 为一个二元向量, 或者看成 β 位的二进制数. 用 $\hat{T}^\delta$ 表示在 $\hat{T}$ 上, 边 (u_i,x_i) 和 (v_i,y_i) 的标数 i 带有由 δ_i 所确定的指标 [幂]: $+[1]$(常略之不计) 与 $-[-1](1\leqslant i\leqslant\beta)$, 其中 $\delta_i=0$ 意味着两个指标不同; 否则, 两个指标相同. 因此, 称 δ 为 $\hat{T}$ 的一个**指标分配**.

对于任何 $v\in V$, 令 σ_v 为 v 处的一个旋, $\sigma_G=\{\sigma_v|\forall v\in V\}$ 为图 G 的一个旋, 则 $\hat{T}_\sigma$ 确定了 $\hat{T}$ 在平面上的一个嵌入.

定理 3.3.1　对于任何一对 $\{\sigma,\delta\}$, $\hat{T}^\delta_\sigma$ 确定一个联树.

证　因为 $\hat{T}^\delta_\sigma$ 确定了扩张树 $\hat{T}$ 的一个平面嵌入, 记 P 为这个嵌入面所确定的那个多面形. 令 $[P]$ 为在 P 中将树边去掉, 并将每对相应上树边的用同一标记 (数) 带符合 δ 的指标所得的**关联曲面** (或**关联单面形**), 则 $\hat{T}^\delta_\sigma$ 确定了图在这个关联曲面上的一个嵌入, 从而由定理 2.6.3 知定理结论成立. ♮

基于第 2 章提供的理论, 可以定义联树的可定向性与亏格分别为关联曲面的可定向性与亏格.

引理 3.3.1 联树 $\hat{T}_\sigma^\delta$ 是可定向的当且仅当 $\delta = 0$.

证 因为关联曲面是可定向的当且仅当 $\delta = 0$, 即得引理结论. ♮

引理 3.3.2 联树 $\hat{T}_\sigma^\delta$ 的亏格等于它所确定嵌入的亏格.

证 因为嵌入的亏格就是它所在曲面的亏格, 即得引理结论. ♮

两个关联曲面相同是指在 δ 一样的条件下, 它们的循环序相同; 否则, 它们的循环序不同. 记 $\mathcal{F}(\beta)$ 为由 $I_\beta = \{1, 2, \cdots, \beta\}$ 产生的所有长 2β 的不同曲面的集合. 对于一个曲面 $F \in \mathcal{F}(\beta)$, 给定图 G 上一个树 T, 如果存在一个联树 $\hat{T}_\sigma^\delta$, 使得 F 是它的关联曲面, 则称 F 为*许可的*. 令 $\mathcal{F}_T(\beta)$ 为所有不同许可曲面组成的集合.

给定可定向亏格 $p(p \geqslant 0)$, 不定可定向亏格 $q(q \geqslant 1)$. 记 $\mathcal{F}_T(\beta; p)(p \geqslant 0)$ (或 $\mathcal{F}_T(\beta; q)$ $(q \geqslant 1)$ 为可定向亏格 p (或不可定向亏格 q) 所有不同许可曲面组成的集合.

定理 3.3.2 对于任何 $p \geqslant 0$ (或 $q \geqslant 1$), 基数 $|\mathcal{F}_T(\beta; p)|$ (或 $|\mathcal{F}_T(\beta; q)|$) 与树 T 在图 G 上的选择无关, 而且它就是 G 的可定向亏格 p (或不可定向亏格 q) 不同嵌入的数目.

证 根据在文献 (Liu, Y.P.[36]) 的附录 I 中的定理 I.4(第 198 页), 关联曲面与联树间有一个 1-1 对应. 由定理 2.6.3 知联树与嵌入间有一个 1-1 对应, 从而许可曲面与嵌入间有一个 1-1 对应. 再由 2.5 节中的曲面分类原理, 即可导出定理结论. ♮

例 3.3.1 如图 3.3.1 所示的是 5 阶完全图 K_5 的两个拓扑的等价嵌入. 图 3.3.1(a) 表示由支撑树 $T_1 = [a, b, c, d]$ (其上树 [123456]) 为基础的联树 $\hat{T}_{1\sigma_1}^{\delta_1}$, 给定的嵌入 $\mu_1(K_5)$, 其中, $\delta_1 = 100010$,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \{v_i | 1 \leqslant i \leqslant 5\} \\ &= \{(a463), (abd5), (b1c4), (d126), (c235)\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&(12654^{-1}63^{-1}1^{-1}235^{-1}4) \\ \sim_{\text{top}}\ &((1245^{-1}3^{-1}1^{-1}235^{-1}4)66)\ (\text{无异性 3 和曲面性 3}) \\ \sim_{\text{top}}\ &((1253^{-1}2^{-1}135)4466)\ (\text{曲面性 3}) \\ \sim_{\text{top}}\ &((123^{-1}1^{-1}23)554466)\ (\text{曲面性 3}) \\ \sim_{\text{top}}\ &(113322554466)\ (\text{无异性 3 和曲面性 3}) \\ \sim_{\text{top}}\ &(112233445566)\ (\text{无异性 2}) \\ \sim_{\text{top}}\ &\tilde{S}_6\ (\text{定理 2.5.4}),\end{aligned}$$

从而可知 $\mu_1(K_5)$ 是 K_5 在不可定向曲面 $\tilde{S}_6$ 上的一个嵌入. 图 3.3.1(b) 表示由支撑树 $T_2 = [a, b_1, c, d]$ (其上树 $[1_b23456]$) 为基础的联树 $\hat{T}_{2\sigma_2}^{\delta_2}$, 给定的嵌入 $\mu_2(K_5)$, 其

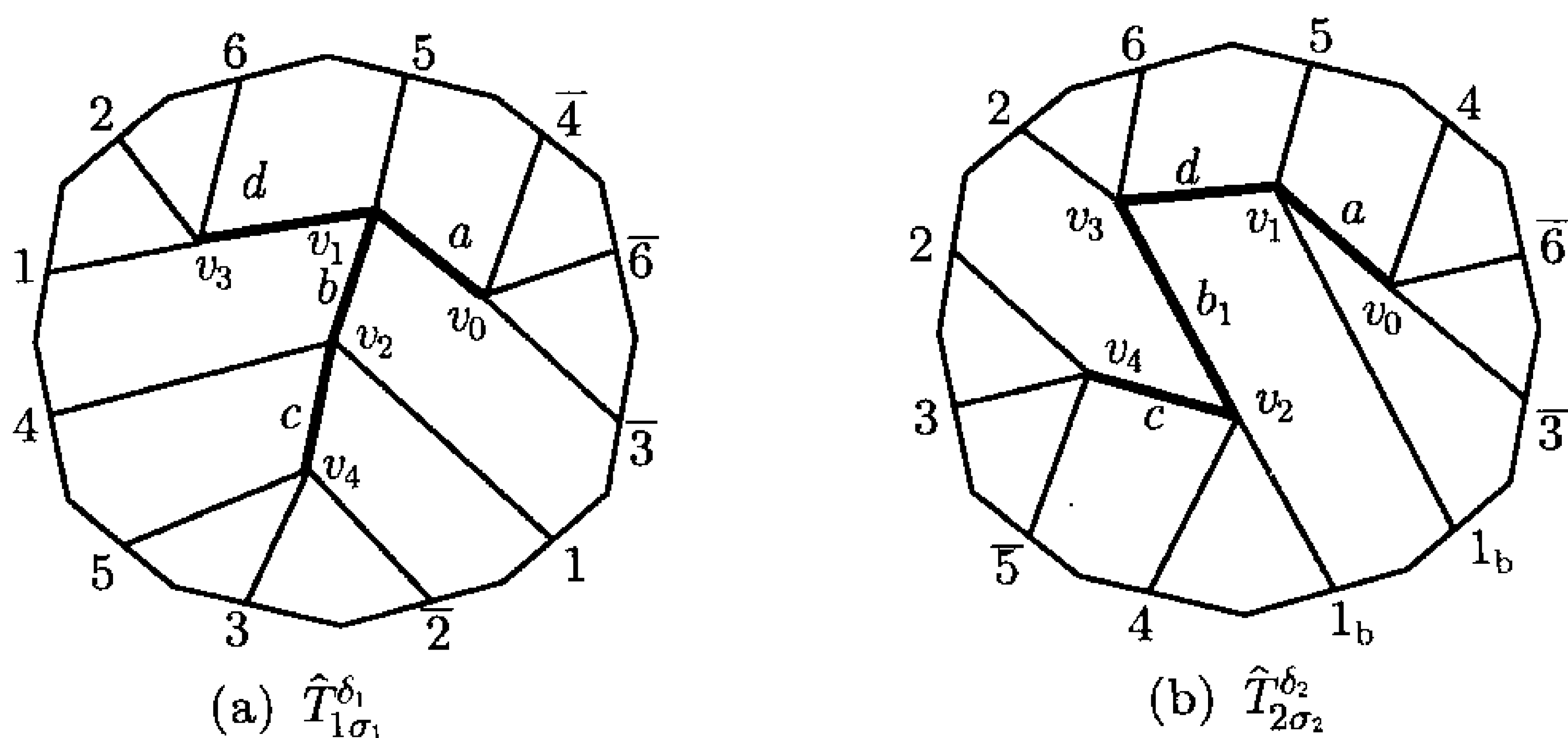
中, $\delta_2 = 111100$,

$$\sigma_2 = \{v_i | 1 \leqslant i \leqslant 5\}$$
$$= \{(a463), (a1_bd5), (b_11_b4c), (db_126), (c532)\}.$$

由于

$$(226546^{-1}31_b1_b45^{-1}3)$$
$$\sim_{\text{top}} ((6546^{-1}31_b1_b45^{-1}3)22)\ (\text{无异性 } 3)$$
$$\sim_{\text{top}} ((6546^{-1}345^{-1}3)1_b1_b22)\ (\text{无异性 } 3)$$
$$\sim_{\text{top}} ((6546^{-1}54^{-1})331_b1_b22)\ (\text{曲面性 } 3)$$
$$\sim_{\text{top}} ((664^{-1}4^{-1})55331_b1_b22)\ (\text{无异性 3 和曲面性 } 3)$$
$$\sim_{\text{top}} (1_b1_b2233445566)\ (\text{无异性 1 和无异性 } 2)$$
$$\sim_{\text{top}} \tilde{S}_6\ (\text{定理 } 2.5.4),$$

从而可知 $\mu_2(K_5)$ 是 K_5 在不可定向曲面 $\tilde{S}_6$ 上的一个嵌入. 因为 $\mu_2(K_5)$ 是由 $\mu_1(K_5)$ 通过开关运算得到的, 于是有 $\mu_2(K_5) \sim_{\text{top}} \mu_1(K_5)$ (定理 2.3.5). 因此, 它们是同一个嵌入.



(a) $\hat{T}^{\delta_1}_{1\sigma_1}$　　(b) $\hat{T}^{\delta_2}_{2\sigma_2}$

图 3.3.1　图 K_5 在 $\tilde{S}_6$ 上的一个嵌入

因为

$$|\mathcal{F}_T(\beta)| = \sum_{p\geqslant 0} |\mathcal{F}_T(\beta;p)| + \sum_{q\geqslant 1} |\mathcal{F}_T(\beta;q)|,$$

于是从定理 3.3.2 可以直接导出下面的结论.

推论 3.3.1　基数 $|\mathcal{F}_T(\beta)|$ 与图 G 上树 T 的选择无关, 而且它就是 G 的不同嵌入数.

由引理 3.3.1 知关联曲面的可定向与否是极容易判断的. 下面介绍关联曲面的亏格, 可以通过一个线性时间算法实现.

定理 3.3.3 一个可定向曲面的亏格为 0 当且仅当不存在 x 和 y, 使得在这个曲面中的次序为 $x\cdots y\cdots x\cdots y$. 一个可定向曲面

$$(AxByCx^{-1}Dy^{-1}E)$$

的亏格为 k ($k\geqslant 1$) 当且仅当曲面 $(ADBCE)$ 是可定向的, 并且亏格为 $k-1$.

证 第一个结论的充分性由定理 2.5.2 导出. 必要性用反证. 由无异性 3 和曲面性 3 导出. 下面证第二个结论. 因为

$$(AxByCx^{-1}Dy^{-1}E)\sim_{\rm top}(ADBCE)(xyx^{-1}y^{-1}),$$

所以有 $k=g(ADBCE)+1$, 即 $g(ADBCE)=k-1$. 这就是必要性. 由于 $(ADBCE)$ 是可定向的, 并且亏格为 $k-1$, 于是有

$$\begin{aligned}g(AxByCx^{-1}Dy^{-1}E)&=g(ADBCE)+g(xyx^{-1}y^{-1})\\&=(k-1)+1=k.\end{aligned}$$

这就是充分性. ♮

定理 3.3.4 一个不可定向曲面 $(AxBxC)$ 的亏格为 k ($k\geqslant 1$) 当且仅当若曲面 $(AB^{-1}C)$ 是不可定向的, 并且亏格为 $k-1$; 否则, 若曲面 $(AB^{-1}C)$ 是可定向的, 并且亏格为 $\dfrac{k-1}{2}$.

证 由无异性 3 和曲面性 3 有 $(AxBxC)\sim_{\rm top}(AB^{-1}C)(xx)$. 因为 $(AxBxC)$ 的亏格为 k, 即 $\tilde{g}((AB^{-1}C)(xx))=k$. 若曲面 $(AB^{-1}C)$ 是不可定向的, 则 $\tilde{g}((AB^{-1}C)(xx))=\tilde{g}(AB^{-1}C)+1=k$, 即 $\tilde{g}(AB^{-1}C)=k-1$; 否则, 若曲面 $(AB^{-1}C)$ 是可定向的, 则由定理 2.5.1, $g(AB^{-1}C)=\dfrac{k-1}{2}$. 这就有必要性.

反之, 若曲面 $(AB^{-1}C)$ 是不可定向的, 并且 $\tilde{g}(AB^{-1}C)=k-1$, 则

$$\tilde{g}(AxBxC)=\tilde{g}(AB^{-1}C)+1=(k-1)+1=k;$$

否则, 若 $(AB^{-1}C)$ 是可定向的, 并且亏格为 $\dfrac{k-1}{2}$, 则由定理 2.5.1,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(AxBxC)&=2g(AB^{-1}C)+1=2\Big(\frac{k-1}{2}\Big)+1\\&=(k-1)+1=k.\end{aligned}$$

这就有充分性. ♮

定理 3.3.4 本身就给出了算法, 而且对于给定与曲面长度无关的亏格, 计算时间不会超过曲面长度的一个线性函数. 借助联树, 还可以简单地导出图的曲面可定向与不可定向嵌入的插值定理.

定理 3.3.5　若一个图, 但不是树, 在亏格为 l 和 $k(l \leqslant k)$ 的不可定向曲面上都有嵌入, 则对于任何一个整数 $i(l \leqslant i \leqslant k)$, 它在亏格为 i 的不可定向曲面上也有嵌入.

证　令 $\mathcal{A}$ 是一个图的关联曲面集. 由于有不可定向亏格 l 的嵌入, 存在 $S \in \mathcal{A}$, 使得 $S \sim_{\text{top}} (A\tilde{S}_l)$, 其中, A 长 $2\beta - 2l$, $(A) \in S_0$, $\tilde{S}_l$ 由 (2.5.3) 式所给出. 由引理 2.5.1, $A = Bxx^{-1}C$. 在 S 上, 将 δ_x 用 $\bar{\delta}_x$ 代替得 S_1. 由于 $S_1 \in \mathcal{A}$ 且其不可定向亏格 $\tilde{g}(S_1) = \tilde{g}(S) + 1$, 从而可知 S_1 对应 $\tilde{S}_{l+1}$ 上的一个嵌入. 由于 $S_1 \sim_{\text{top}} (A_1\tilde{S}_{l+1})$, 其中, A_1 长 $2\beta - 2(l+1)$, $(A_1) = (BC) \in S_0$, 可以 S_1 当 S 和以 A_1 当 A 继续行之. 用文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理得 $S_2, S_3, \cdots, S_{\beta-l} \in \mathcal{A}$, 使得 $\tilde{S}_i \sim_{\text{top}} \tilde{S}_{l+i}$ $(1 \leqslant i \leqslant \beta - l)$. 因为 $k \leqslant \beta$, 定理的结论为真. ♮

令 $\bar{T}$ 为一个图 G 所有上树边组成的集合. 若记图 $H = (V, E)$, 其中, $V = \bar{T}$, $(a, b) \in E$ 当且仅当边 a 和 b 在 G 中的两个基本圈有公共节点, 则称 H 为 G 的圈联. 给定一对上树边 x 和 y, 它们是相邻的. 若这个关联曲面形如 $S = (AxyBy^{-1}Cx^{-1}D)$, 则 $S' = (AxyBy^{-1}Cx^{-1}D)$ 也是一个关联曲面. 从 S 到 S' 的运算被称为交错.

引理 3.3.3　若在对树 T 的圈联中有最大对集 M, 使得 $|M| = t$, 则存在树 T', 使得在对 T' 的圈联中有最大对集 M', 满足 $|M'| = t$ 且所有边都对应相邻边对.

证　若 M 的边都对应相邻的边对, 则 $T' = T$; 否则, 若 $(a, b) \in M$, 但 a 和 b 不相邻. 设 c 为基本圈 C_b 中与 a 相邻的那条 T 的边, 则用 $T_1 = T - c + b$ 代替 T. 因为对于 T_1 圈联中最大对集为 $M_1 = M - (a, b) + (a, c)$, 于是可知 M_1 中对应相邻边对的边数比 M 少 1. 用文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理, 存在 T', 使得圈联中有一个最大对集, 所有边都对应相邻边对. ♮

引理 3.3.4　如果一个图 G 的圈联最大对集含 t 条边, 则这个图最大亏格至少为 t.

证　根据引理 3.3.3, 可以设定这个最大对集中, 每一条边都对应 G 的相邻上树边对. 令 S 是 G 的一个关联曲面. 如果这些相邻上树边对在 S 中没有交错的, 任取一对, 如 x 和 y, 则 S 形如 $(AxyBy^{-1}Cx^{-1}D)$. 在 S 上对 x 和 y 作一次交错得

$$S' = (AyxBy^{-1}Cx^{-1}D) \sim_{\text{top}} (ACBDyxy^{-1}x^{-1}).$$

如果在 $(ACBD)$ 中仍无这种相邻对, 继续在 S 上作交错运算; 否则, 若 $(ACBD)$ 有未用过的相邻对交错, 如 x' 和 y', 则

$$(ACBD) = (A'x'y'B'x'^{-1}C'y'^{-1}D') \sim_{\text{top}} (A'C'B'D'x'y'x'^{-1}y'^{-1}).$$

在 S 上对 x' 和 y' 作交错. 由文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理, 直到

S 中所有要考虑的相邻对都用过, 可以得到关联曲面 S'. 根据联树原理, S' 就相应 G 的一个可定向亏格 t 的嵌入, 即得引理结论. ♮

引理 3.3.5　如果一个图 G 的圈联最大对集含 t 条边, 则这个图最大亏格就是 t.

证　根据联树原理, 因为至少两条上树边才有可能使图的嵌入提高一个亏格, 基本圈无公共节点的一对上树边不能使图的嵌入提高一个亏格, 这 t 对上树边, 只能使得到可定向亏格至多 t 的嵌入. 由引理 3.3.4, 即得引理结论.

定理 3.3.6　若一个图 G 在亏格为 l 和 $k(l \leqslant k)$ 的可定向曲面上都有嵌入, 则对于任何一个整数 $i(l \leqslant i \leqslant k)$, 它在亏格为 i 的可定向曲面上也有嵌入.

证　设 S 为 G 的可定向亏格 l 关联曲面, 则由曲面性 3 和 (2.5.2) 式,

$$S \sim_{\text{top}} \left(A \prod_{i=1}^{l} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \right) = (A)S_l,$$

并且 (A) 的亏格为 $g(A) = 0$. 由引理 3.3.3～ 引理 3.3.5, A 的上树边在 S 中至少有 $k-l$ 个相邻对相应圈联的对集. 它们在 (A) 中都不交错. 对于任意取一个邻对 $\{x, y\}$, 在 S 上作一次交错得 $S' = (A')S_l$. 由曲面性 3 可知 $(A) \sim_{\text{top}} (A''xyx^{-1}y^{-1})$, 并且 $g(A'') = 0$. 这就意味着 $S' \sim_{\text{top}} A''S_{l+1}$, 即 $g(S') = l+1$. 由文献 (Liu, Y.P.[36], 第 5 页) 中的有限递归原理可得 $S_1 = S'$, S_2, $\cdots$, S_{k-l-1}, 使得 $g_i = l + j(1 \leqslant j \leqslant k-l-1)$, 从而可得定理结论. ♮

基于上述即可看出, 求一个图的所有嵌入以及它们依亏格的分布, 就是将这个图的关联曲面, 按初等等价分类的问题. 在同一类中，不同曲面的数目就是这个图在这类曲面中不同嵌入的数目. 自然, 其中也包含了求一个图的最大和最小亏格的问题.

3.4　注　　记

(1) 在文献中可以看到有很多求图的支撑树的算法, 并已应用到运筹学, 如文献 (Bellman, R.-K.L. Cook-J.A. Lockett[1]), 和计算机科学中, 如文献 (Knuth, D.E.[1], Pralts, J.L.[1]). 似乎是从文献 (Hopcroft, J.-R. Tarjan[4, 5]) (也见文献 (Liu, Y.P.[1, 2])) 开始深探树, 或者说, Tremaux 树变成一种有力的工具, 以在组合学, 特别是图论中, 求更有效的算法. 当然, 在 100 年以前, Tremaux 树就被用来解迷宫了 (Ball, W.W.R.[1]).

(2) 除了深探树之外, 确向树还有其他的变形. 例如, 左探树和右探树用于图作为平面上的一个浸入, 或曲面上的嵌入时, 参见文献 (Liu, Y.P.[19,22], Fraysseix, H.-P. Rosenstiehl[2]).

(3) 在 3.2 节中所展示的利用确向树的方法求一个图的不可定向最大亏格. 人们也许在文章 (Liu, Y.P.[8～10]) 中看到. 在那里还提供了求一个图在相应的曲面上的嵌入的有效算法.

(4) 证明定理 3.2.4 不一定非用确向树不可. 用一般的树, 可以想象, 也不会出现大的困难. 只不过就计算复杂性而论, 不会比确向树更好.

(5) 在一个图上, 节点标定的树的数目称为这个图的*复杂度*. 它可用不同的方法确定 (Cayley, A.[1]). 然而, 一个图上确向树的数目尚未得知, 尽管有很多文章数各种树的数目.

(6) 在什么情形下, 如何求一个图上的给定数目的、无公共边的树, 特别是将图划分为支撑树的无公共边的并. 在文献 (Tutte, W.T.[14]) 和文献 (NashWilliams, C.St.J.A.[1])中, 已经解决了一些有关问题. 然而, 一个图可以划分为确向树的充要条件尚属未知.

(7) 树也是纯数学中的一个重要概念 (Serre, J.P.[1]).

(8) 另一类确向树可以看成为广探树的推广. 在求一个图的无回路定向, 甚至带有一个源和一个汇的这种定向时, 也是重要的. 这就导出了在图上对节点的*单向标数*. 当然, *源汇标数*只不过是单向标数在源与汇相邻时的特殊情形. 用它也可以导出判定图的平面性的线性算法. 若想看它们的一些应用, 可参见文献 (Cui, X.F.-Y.P. Liu[1], Liu, Y.P.[28, 29], Liu, Y.P.-A. Morgana-B. Simeone[3]).

(9) 联树的原始思想出自文献 (Liu, Y.P.[8, 9]), 因为那里是第一次用树作为图在曲面上嵌入的基础. 实际上, 就是将图的曲面嵌入转化为如何适当地安置上树边, 与联树的基本思想相吻合.

(10) 虽然确定图的不可定向最大亏格, 早在 20 世纪 70 年代末就得到了完满结果, 如文献 (Liu, Y.P.[8]). 以此为基础, 即可得图的嵌入不可定向亏格插值定理. 然而定理 3.3.5, 则是完全利用嵌入的联树模型, 既普遍又简单得多.

(11) 对图最大亏格的普遍性研究, 源自 20 世纪 70 年代末, 如文献 (Liu, Y.P.[9], Xuong, N.H.[1]). 虽然在形式上, 前者提供了去节点的约化, 后者则是去相邻边对的约化, 但却殊途同归. 圈联可追溯到文献 (Liu, Y.P.[1]) 考虑基本圈的关联, 但直接原因来自文献 (Liu, Y.P.[46]). 在那里, 开始注意到不相邻的上树边对, 也会提高图的最大亏格. 定理 3.3.6 不仅直接提供了确定图可定向最大亏格的有效性, 还同时得到了可嵌入曲面亏格的插值性. 最早证实可定向插值性的应当归于文献 (Duke, R.A.[1]).

第4章　图上的空间

4.1　循环, 上循环和双循环

令 $G=(V,E)$ 是 $\nu=|V|$ 阶 $\epsilon=|E|$ 度的图. 一个迂的集合 $F(|F|=\varphi)$ 还具有这样的性质: E 中的每条边在 F 的元素中恰好出现两次 (即二重覆盖). 当然, F 总是假定只要 G 是连通的, 即表示 G 的一个嵌入, 或称之为*准基形*, G 为它的*基准图*. 这时, F 的元素被称为*面*.

令 $\mathcal{G}_0=2^V$, $\mathcal{G}_1=2^E$ 和 $\mathcal{G}_2=2^F$ 分别为由节点集 V, 边集 E 和面集 F 生成的空间 $\langle v|\forall v\in V\rangle$, $\langle e|\ \forall e\in E\rangle$ 和 $\langle f|\ \forall f\in F\rangle$, 并分别称它们为 G 上的 *V空间*, *E空间* 和 *F空间*. 这里只集中讨论 E 空间的结构. 若 G 是不连通的, 设

$$G=G_1+G_2+\cdots+G_\omega,$$

则

$$\mathcal{G}_i(G)=\mathcal{G}_i(G_1)+\mathcal{G}_i(G_2)+\cdots+\mathcal{G}_i(G_\omega)$$

且 $\mathcal{G}_i(G_l)\cap\mathcal{G}_i(G_s)=0$, 即平凡空间, $1\leqslant l<s\leqslant\omega$, $i=0,1,2$. 这就允许, 如无特别的需要, 只研究连通图的空间.

如果一个边 $e\in E$ 的*边界* $\partial_1 e$ 定义为它们两个关联节点 (所相应的向量) 之和, 则定义在 $\mathcal{G}_1$ 的基上的 ∂_1 可以被延拓为 $\partial_1:\mathcal{G}_1\to\mathcal{G}_0$, 被称为 *1边缘映射*如下:

$$\forall A\in\mathcal{G}_1,\quad \partial_1 A=\sum_{e\in A}\partial_1 e. \tag{4.1.1}$$

因为 ∂_1 是从 $\mathcal{G}_1$ 到 $\mathcal{G}_0$ 的一个同态, 即 $\partial_1\in\mathrm{Hom}\ (\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_0)$, 则容易证明, $\mathrm{Ker}\ \partial_1$ 为 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间, 并称之为 G 的 *1循环空间*. 类似地, $\mathrm{Im}\ \partial_1$ 是 $\mathcal{G}_0$ 的一个子空间, 并称之为 G 的 *0边缘空间*. 若 E 的一个子集 A 是无公共边的圈的并, 则称它为 G 的一个*循环*. 令 $\mathcal{C}$ 是 G 的所有循环组成的集合.

定理 4.1.1　$\mathrm{Ker}\ \partial_1=\mathcal{C}$.

证　因为对任何 $A\in\mathrm{Ker}\ \partial_1$,

$$\partial_1 A=\sum_{e\in A}\partial_1 e=0,$$

在 $G[A]$ 中所有节点皆偶次. 由定理 1.4.6, $G[A]$ 的每个连通片皆为回. 然而, 任何回皆为无公共边的圈的并, 从而 $A\in\mathcal{C}$. 反之, 对任何 $A\in\mathcal{C}$, 因为所有节点在 A 中均与偶数条边关联, 由 (1.4.9) 式可知 $A\in\mathrm{Ker}\ \partial_1$. ♮

根据定理 4.1.1, $\mathcal{C}$ 被称为 G 的**循环空间**. 类似地, 一个节点 $v \in V$ 的上边缘 $\delta_0 v$ 定义为所有与它关联的边在 $\mathcal{G}$ 中之和, 即有

$$\forall e \in E, \quad (e, \delta_0 v) = (\partial_1 e, v), \tag{4.1.2}$$

则 δ_0 可以从 $\mathcal{G}_0$ 的一个基上延拓为整个 $\mathcal{G}_0$ 上的一个线性变换 $\delta_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1$, 使得

$$\forall A \in \mathcal{G}_0, \quad \delta_0 A = \sum_{v \in A} \delta_0 v, \tag{4.1.3}$$

并称 δ_0 为 **0上边缘映射**.

由 (4.1.2) 式和内积对于 ∂_1 和 δ_0 的双线性性, 有如下更一般的关系:

$$\forall B \in \mathcal{G}_0, \forall A \in \mathcal{G}_1, \quad (A, \delta_0 B) = (\partial_1 A, B). \tag{4.1.4}$$

由 $\delta_0 \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ 和定理 1.4.6 可知, $\mathrm{Im}\ \delta_0$ 是 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间, 并称它为 G 的 **1上边缘空间**. 同样地, $\mathrm{Ker}\ \delta_0$ 是 $\mathcal{G}_0$ 的一个子空间, 并称它为 G 的 **0循环空间**.

引理 4.1.1　$\forall A \in \mathrm{Ker}\ \partial_1, \forall B \in \mathrm{Im}\ \delta_0$, $(A, B) = 0$.

证　由于 $B \in \mathrm{Im}\ \delta_0, \exists X \in \mathcal{G}_0, B = \delta_0 X$. 由 (4.1.4) 式, $(A, B) = (A, \delta_0 X) = (\partial_1 A, X)$. 再由 $A \in \mathrm{Ker}\ \partial_1, \partial_1 A = 0$, 从而引理得证. ♮

基于引理 4.1.1 和定理 1.3.7, 可知 $\mathrm{Im}\ \delta_0 = \mathcal{C}^\perp$. 令 $\mathcal{C}^*$ 为 G 的所有上循环的集合.

定理 4.1.2　$\mathcal{C}^\perp = \mathcal{C}^*$.

证　由于 $\mathrm{Im}\ \delta_0 = \mathcal{C}^\perp$ 和对于 $A \in \mathcal{G}_0$ 有 $\delta_0 A \in C^\perp$,

$$\delta_0 A = E_A = \{(u, v) | \forall u \in A, \forall v \notin A\},$$

从而 $\delta_0 A \in C^*$. 反之, 对任何 $X \in C^*$, 设 $X = E_A, A \in \mathcal{G}_0$, 则 $X = \delta_0 A \in C^\perp$, 从而定理得证. ♮

根据定理 4.1.2, $\mathcal{C}^\perp$ =Im δ_0, 即 1 上边缘空间, 也可称为 G 的**上循环空间**. 由于 $\mathcal{C}$ =Ker ∂_1 和 $\mathcal{C}^\perp$ 均为空间, $0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp$, 一般来说, 在 $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp$ 中允许有非零向量. 况且, 两个空间的交也是它们的子空间, 则 $\mathcal{B} = C \cap \mathcal{C}^\perp$ 被称为 G 的**双循环空间**. $\mathcal{B}$ 中的非零元素称为**双循环**.

定理 4.1.3　$\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^\perp = \epsilon (= \dim \mathcal{G}_1)$.

证　假设 $\mathcal{C}$ 的维数为 $r(0 \leqslant r \leqslant \epsilon)$, 记 $\{e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon\}$, 引申出 $\mathcal{C}$ 上的一个有序基 $\{C_1, \cdots, C_r\}$. 同时, $\mathcal{G}_1$ 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon\}$ 也确定了次序. 也就是说, 限定 $e_i \in C_i, e_i \notin C_j (j \neq i, 1 \leqslant i, j \leqslant r)$. 由 (1.4.10) 式, $\mathcal{G}_1{}^\perp = 0$, 则 $\{e_{r+1}, \cdots, e_\epsilon\}$ 可以引申出 $C_i^* \in \mathcal{C}^\perp (r + 1 \leqslant i \leqslant \epsilon)$, 并且满足 $e_i \in C_i^*$, 但 $e_i \notin C_j^* (j \neq i, r + 1 \leqslant i, j \leqslant \epsilon)$. 因此, $\{C_{\epsilon+1}^*, \cdots, C_\epsilon^*\}$ 为 $C^\perp$ 的一个基. 这就得到了定理结论. ♮

由定理 4.1.3, 虽然 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 维数的和等于 $\mathcal{G}_1$ 的维数, 但它并不意味着 $\mathcal{G}_1$ 的任何一个向量均可以表示为 $\mathcal{C}$ 中的一个向量与 $\mathcal{C}^{\perp}$ 中的一个向量的和. 事实上, 如果 $B \in \mathcal{B}(B \neq 0)$, 则 B 中的每一条边均非这样的两个向量的和.

定理 4.1.4 $\mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{C} + \mathcal{C}^{\perp}$.

证 因为

$$A \in (\mathcal{C}+\mathcal{C}^{\perp})^{\perp} \Leftrightarrow (A \perp \mathcal{C}) \wedge (A \perp \mathcal{C}^{\perp}) \Leftrightarrow (A \in \mathcal{C}^{\perp}) \wedge (A \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{B},$$

由 (1.4.12) 式, 即得定理结论. ♮

4.2 循环空间

令 $G=(V,E)$ 为一个图, 如不特别申明, 总是指连通的, $\mathcal{C}$ 为 G 的循环空间. 如果 E 的子集 J 满足如下条件: $\forall C \in \mathcal{C}, C \cap J \neq \varnothing$, 则 J 被称为 $\mathcal{C}$ 的联集. 如果 $\mathcal{C}$ 的一个联集具有这样的性质: 它的每个真子集在 E 中的补均含一个非空循环, 则称它为 $\mathcal{C}$ 的一个极小联集, 常用 $R(\mathcal{C})$, 或简单地, 用 R 表示.

引理 4.2.1 令 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{C}$ 的所有极小联集组成的集合, $\mathcal{T}^*$ 是 G 上的所有上树的集合, 则 $\mathcal{R} = \mathcal{T}^*$.

证 设 $R \in \mathcal{R}$. 记 $\bar{R} = E \backslash R$. 若在 R 中有一个非空上循环, 则由引理 4.1.1, 即与所有循环的正交性和 R 的极小性, 可知这个上循环只能是由一条割边组成. 但由极小性, R 绝不含任何割边, 从而 R 中不含任何非空上循环. 这就由 G 的连通性知 $G[\bar{R}]$ 也是连通的, 进而由 R 为 $\mathcal{C}$ 的一个联集可知 $\bar{R}$ 中没有非空循环, 因此, 也就没有圈. 由树性 1 可知 $\bar{R}$ 是一个树, 从而 $R \in \mathcal{T}^*$. 反之, 由引理 3.1.3 容易看出, 上树是 $\mathcal{C}$ 的一个极小联集. ♮

令 T 是图 $G=(V,E)$ 上的一个树. 假设 E 中的边排为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon\}$, 使 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\epsilon-\nu+1}\}$ 形成上树 T^*, $\{e_{\epsilon-\nu+2}, \cdots, e_\epsilon\}$ 自然形成树 T.

引理 4.2.2 令 $\{C(i) | \forall i, 1 \leqslant i \leqslant \epsilon-\nu+1, C(i) = C(e_i)\}$ 为对于 T 的所有基本圈的集合, 则在 $\mathcal{C}$ 中, 它是一个线性无关集.

证 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\epsilon-\nu+1} \in \mathrm{GF}(2)$,

$$\sum_{i=1}^{\epsilon-\nu+1} \alpha_i C(i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\epsilon-\nu+1} \alpha_i e_i = 0 \Leftrightarrow \forall i (1 \leqslant i \leqslant \epsilon-\nu+1), \alpha_i = 0,$$

从而引理得证. ♮

引理 4.2.3　$\forall C \in \mathcal{C}, \exists \alpha_i (1 \leqslant i \leqslant \epsilon - \nu + 1) \in \mathrm{GF}(2)$,

$$C = \sum_{i=1}^{\epsilon-\nu+1} \alpha_i C(i).$$

证　假设 $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_s}\} = \{e_i | \forall i, 1 \leqslant i \leqslant \epsilon - \nu + 1, (C, e_i) = 1\}$, 则

$$C = \sum_{j=1}^{s} C(i_j); \tag{4.2.1}$$

否则, 若

$$\tilde{C} = \sum_{j=1}^{s} C(i_j),$$

但 $\tilde{C} \neq C$, 则 $0 \neq C + \tilde{C} \in \mathcal{C}$. 然而,

$$C + \tilde{C} = \left(C \bigcup \tilde{C}\right) \Big\backslash \left(C \bigcap \tilde{C}\right) \subseteq T.$$

这就与 3.1 节中的树性 1 矛盾. 因此, 只能有 (4.2.1) 式, 即引理成立. ♮

定理 4.2.1　所有对于树 T 的基本圈形成 G 中循环空间 $\mathcal{C}$ 的一组基.

证　可以由引理 3.2.2 和引理 3.2.3 直接导出. ♮

由于基本圈的数目就是 $\beta(G) = \epsilon - \nu + 1$, 循环空间 $\mathcal{C}$ 的维数为

$$\dim \mathcal{C} = \beta(G), \tag{4.2.2}$$

也称之为 G 的上秩 (或零秩).

在循环空间 $\mathcal{C}$ 的基础上, 可以在 $\mathcal{G}_1$ 上定义一个二元关系, 用 $\sim_{\text{cycl}}$ 表示如下: $\forall A, B \in \mathcal{G}_1$,

$$A \sim_{\text{cycl}} B \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}, A + B = C. \tag{4.2.3}$$

由 1.1 节中的关系性 1, 关系性 $\tilde{2}$ 和关系性 3, 容易验证 $\sim_{\text{cycl}}$ 是 $\mathcal{G}_1$ 上的一个等价, 进而由定理 4.1.1, $\mathcal{C}$ 对于 $\mathcal{G}_1$ 的商群

$$\mathcal{G}_1/\mathcal{C} = \mathcal{G}_1/\sim_{\text{cycl}} \tag{4.2.4}$$

也可以看成为 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间, 并称它为 $\mathcal{G}_1$ 中 $\mathcal{C}$ 的商空间.

定理 4.2.2　$\mathcal{G}_1 = \mathcal{C} + \mathcal{G}_1/\mathcal{C}$

证　对于任何 $e \in E$, 若 e 在一个循环 C 上, 则由 (4.2.3) 式可知 $\exists B \in \mathcal{G}_1/\mathcal{C}, e = C + B$; 否则, 由 $e \in \mathcal{G}_1/\mathcal{C}$, $e = e + 0$, $0 \in \mathcal{C}$. 对于任何 $A \in \mathcal{G}_1$, 设

$$A = \sum_{e \in A} e$$

和

$$e = D(\mathcal{C}; e) + B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C}; e),$$

其中,

$$D(\mathcal{C}, e) \in \mathcal{C}, \quad B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C}; e) \in \mathcal{G}_1/\mathcal{C},$$

则由线性性,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{e \in A} (D(\mathcal{C}; e) + B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C}; e)) \\ &= D(\mathcal{C}; A) + B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C}; A), \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

其中,

$$\begin{cases} D(\mathcal{C}; A) = \sum\limits_{e \in A} D(\mathcal{C}; e) \in \mathcal{C}, \\ B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C}; A) = \sum\limits_{e \in A} B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C}; e) \in \mathcal{G}_1/\mathcal{C}. \end{cases}$$

这就得到了定理结论. ♮

类似的理由使得还可以得到 $\mathcal{C}/\mathcal{B}(\mathcal{B} = C \cap C^{\perp})$ 是双循环空间 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的商空间, $\mathcal{G}_1/\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{G}_1$ 中的商空间, 进而与定理 4.2.2 类似, 也可以得到

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C}/\mathcal{B}, \tag{4.2.6}$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{B} + \mathcal{G}_1/\mathcal{B}. \tag{4.2.7}$$

定理 4.2.3 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C} \cong (\mathcal{G}_1/\mathcal{B})/(\mathcal{C}/\mathcal{B})$.

证 由定理 1.4.4(第三同构定律), 对于 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C}, \mathcal{G}_1/\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 作为群, 定理中的关系满足, 而且不难验证, 上面作为群间的同构, 可以自然地延拓到相应的空间之间. 因此, 得到定理结论. ♮

定义 0边缘映射 $\partial_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{J}$ 为 $\forall A \in \mathcal{G}_0$,

$$\partial_0 A = \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{A}(\mathcal{G}_0), \\ 1, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$ 为 $\mathcal{G}_0$ 中的交错空间, 以及用 0 和 1 代表 $\mathcal{J}$ 中的两个向量. 由此可见 $\text{Ker}\ \partial_0 = \mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$, 其中, 称 $\text{Ker}\ \partial_0$ 为 G 的 0循环空间, $\text{Im}\ \partial_0$ 为 G 的 (-1)边缘空间. 自然, $\text{Im}\ \partial_0 = \mathcal{J}$.

引理 4.2.4 $\text{Im}\ \partial_1 = \text{Ker}\ \partial_0$ 当且仅当 G 是连通的.

证 由定理 1.4.2(第一同构定律) 可知对任何 $A \in \mathcal{G}_1$ 有 $\partial_1 A \in \mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$, 故 $\text{Im}\ \partial_1 \subseteq \text{Ker}\ \partial_0$, 进而容易看出 $\{v + u |\ \forall u \in \mathcal{G}_0, v \in \mathcal{G}_0\}$ 含有 $\mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$ 的一组基. 然而, $u + v \in \text{Im}\ \partial_1$ 当且仅当在 G 中存在一条路 $P(u, v)$. 这就得到了必要性. 反之,

由于对任何两个节点 u, v, 存在一条连它们的路 P, $\partial_1 P = u + v$. 从 $\mathrm{Im}\ \partial_1$ 为一个空间可知, 必有 $\mathrm{Im}\ \partial_1 = \mathcal{A}(\mathcal{G}_0) = \mathrm{Ker}\ \partial_0$. 这就是充分性. ♮

引理 4.2.5 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C} \cong \mathrm{Ker}\ \partial_0$ 当且仅当 G 是连通的.

证 由定理 1.4.2(第一同构定律), $\mathcal{G}_1/\mathcal{C} = \mathcal{G}_1/\ \mathrm{Ker}\ \partial_1 \cong \mathrm{Im}\ \partial_1$, 从而由引理 4.2.4, 即得引理结论. ♮

因为 $\mathrm{Im}\ \partial_1$ 是 $\mathrm{Ker}\ \partial_0$ 的一个子空间 (当然, 由可交换性必为正规的), 则 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(G;\mathrm{GF}(2)) = \mathrm{Ker}\ \partial_0/\ \mathrm{Im}\ \partial_1$, 即 $\mathrm{Im}\ \partial_1$ 在 $\mathrm{Ker}\ \partial_0$ 中的商空间被称为 G 的 0同调空间.

定理 4.2.4 $\mathcal{H}_0 = 0$ 当且仅当 G 是连通的.

证 可以由引理 4.2.4 直接导出. ♮

类似地, 定义面 $f \in F$ 的边界 $\partial_2 f$ 为所有与它关联的边在 $\mathcal{G}_1$ 中的和. 当然, ∂_2 也可以从 $\mathcal{G}_2$ 的基上所定义的延拓到整个空间 $\mathcal{G}_2$ 上的一个线性变换 $\partial_2 : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$, 使得

$$\forall A \in \mathcal{G}_2, \quad \partial_2 A = \sum_{f \in A} \partial_2 f. \tag{4.2.8}$$

称 ∂_2 为 2边缘映射. 同样易证在空间的意义下仍有 $\partial_2 \in \mathrm{Hom}\ (\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$, 从而 $\mathrm{Im}\ \partial_2$ 是 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间, 称之为 G 的 1边缘空间.

引理 4.2.6 $\partial_1\partial_2 = 0$.

证 因为对于任何 $f \in F, \partial_2 f$ 是 $\mathcal{G}_1$ 中的一个循环. 由于 $\mathrm{Im}\ \partial_2$ 是一个空间, 对于任何 A, 按 (4.2.8) 式所示, $\partial_2 A$ 也是 $\mathcal{G}_1$ 中的一个循环, 故 $\mathrm{Im}\ \partial_2 \subseteq \mathcal{C}$. 然而, 由定理 4.1.1, $\mathcal{C} = \mathrm{Ker}\ \partial_1$, 从而 $\partial_1\partial_2 A = 0$. ♮

对于图 $G = (V, E)$, F 为给定的迂的集合. 可选另外一个图 $G^* = (V^*, E^*)$ 和 F^* 按如下方式定义:

$$\begin{cases} V^* = F, F^* = V, \\ e^* = (f_1, f_2) \in E^* \Leftrightarrow \exists e \in E, (\partial_2 f_1, e) = (\partial_2 f_2, e) = 1. \end{cases} \tag{4.2.9}$$

这时, e 和 e^* 称为相应的边对. 注意, 即便 G 没有环, G^* 也允许有环, 而且 G^* 的环相应这样的边 e, 它仅与唯一的 $f \in F$ 关联. 称 G^* 为 G 的对偶. 易见, G^* 的 V空间 $\mathcal{G}_0^* = 2^{V^*}$ 与 G 的 F空间 $\mathcal{G}_2$ 同构, $\mathcal{G}_2$ 的 2 边缘映射 ∂_2 相应 $\mathcal{G}_0^*$ 的 0 上边缘映射 δ_0^*, 而且 $\mathcal{G}_1^* \cong \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2^* \cong \mathcal{G}_0$, 其中 $f^* \in F^*$ 在 G^* 上由在 G 上的相应节点 $v \in V$ 所确定. 另外, 还易见 $(G^*)^* = G$.

引理 4.2.7 $\mathrm{Im}\ \partial_2 \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$ 当且仅当 G 是连通的.

证 因为可以论证 $\mathrm{Ker}\ \partial_2 = \{0, F\} \cong \mathcal{J}$ 当且仅当 G 是连通的. 由定理 1.4.2 (第一同构定律), $\mathcal{G}_2/\ \mathrm{Ker}\ \partial_2 \cong \mathrm{Im}\ \partial_2$, 而且有 $\mathcal{G}_2/\ \mathrm{Ker}\ \partial_2 \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$, 从而导致定理成立. ♮

引理 4.2.8 一个连通图 G 是可平面的当且仅当 $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$.

证 假若 G 是可平面的. 由于这时的 Euler 示性数为 2, 于是有 $\varphi = \epsilon - \nu + 2$, 故在 Im ∂_2 中含 $\mathcal{C}$ 的一组基. 因为总有 Im $\partial_2 \subseteq \mathcal{C}$, 只能 Im $\partial_2 = \mathcal{C}$. 再由引理 4.2.7 可知 $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$. 这就得到了必要性.

反之, 若 $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$, 则由引理 4.2.7 即可得 Im $\partial_2 = \mathcal{C}$. 由于 dim $\mathcal{C} = \epsilon - \nu + 1$, 只能有 $\varphi = |F| = \epsilon - \nu + 2$. 这就是说, 由 F 所确定的多面形 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 的 Euler 示性数为 2, 故 $G \cong G(\Sigma) \subset P_0$. 也就是说, G 为可平面的. ♮

根据引理 4.2.6, Im ∂_2 是 $\mathcal{C}$ 的一个子空间. 这就使得可以定义 G 的一个 1 同调空间为 Ker ∂_1/ Im $\partial_2 = \mathcal{C}/\text{Im } \partial_2$, 并且用 $\mathcal{H}_1(\Sigma; \text{GF}(2))$ 表示, 其中, Σ 为以 G 为基准图的多面形.

定理 4.2.5 一个连通图 G 是可平面的当且仅当存在迂的准基形 F, 使得 $\mathcal{H}_1 = 0$.

证 可以由引理 4.2.7 和引理 4.2.8 直接导出. ♮

若多面形 $\Sigma \subset S \in \mathcal{S}$, 即 Σ 为曲面 S 上的多面形, 则由 (4.2.9) 式所确定的对偶 G^* 被称为 G 的 S**对偶**. 特别地, 若 S 是球面 P_0, 则 G^* 称为 G 的**平面对偶**. 由 1.5 节和上面所讨论的, 下面的推论可直接导出.

推论 4.2.1 一个连通图 G 是可平面的当且仅当在 G 上存在迂的准基形 F, 使得 Euler 示性数 $\chi(\Sigma(G; F)) = \nu - \epsilon + \varphi = 2$.

事实上, 推论 4.2.1 就是 MacLane 图的平面性表征的一般情形 (MacLane, S.[1, 2]). 下面的推论相当 Whitney 的平面性表征 (Whitney, H.[6, 7]).

推论 4.2.2 一个连通图 G 是可平面的当且仅当 G 有一个平面对偶.

更一般地, 下面的两个推论可以表征一个图在一个曲面上的可嵌入性. 推论 4.2.3 应归功于文献 (Lefschetz, S.[1, 2]).

推论 4.2.3 一个连通图 G 可嵌入到一个曲面 S 上当且仅当存在一个迂的集合 F, 使得 $\chi(\Sigma(G; F)) = \chi(S)$.

推论 4.2.4 一个连通图 G 可嵌入到曲面 S 上当且仅当 G 有一个 S 对偶.

4.3 上循环空间

对于图 $G(V, E)$ 的上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$, 若 E 的一个子集 J^* 满足 $\forall C^* \in \mathcal{C}^\perp, C^* \cap J^* \neq \varnothing$, 则称它为 $\mathcal{C}^\perp$ 的一个**联集**. 若 $\mathcal{C}^\perp$ 的联集 J^* 的任一真子集在 E 中的补皆含非空的上循环, 则称它为 $\mathcal{C}^\perp$ 的**极小联集**, 并用 $R^*(\mathcal{C}^\perp)$ 表示, 或简记为 R^*. 容易验证, 图 G 上的任何一个树皆为 $\mathcal{C}^\perp$ 的一个极小联集.

引理 4.3.1 令 $\mathcal{R}^*$ 为 $\mathcal{C}^\perp$ 的所有极小联集的集合, $\mathcal{T}$ 为 G (当然, 连通的)上的所有树的集合, 则 $\mathcal{R}^* = \mathcal{T}$.

证 首先, 证明对任何 $R^* \in \mathcal{R}^*$, R^* 皆无圈. 否则, 假若 $C \subseteq R^*$ 是一个圈, 则由极小性, 对于任何 $e \in C$, $E\backslash(R^* - e)$ 有一个上循环 C^*. 因为 R^* 是 $\mathcal{C}^\perp$ 的联集, 则必有 $e \in C^*$. 然而, 由引理 4.1.1, 即 C 与 C^* 的正交性, 必有 $e' \in C - e$, 由此 $e' \notin E\backslash(R^* - e)$, 使得 $e' \in C^*$. 这就与 $C^* \subseteq E\backslash(R^* - e)$ 矛盾. 然后, 证明对任何 $R^* \in \mathcal{R}^*$, $G[R^*]$ 是连通的. 否则, 假设 $G[R^*] = G_1 + G_2$, 就有 $E_{V(G_1)} \in \mathcal{C}^\perp$. 然而, $E_{V(G_1)} \subseteq E\backslash R^*$, 与 R^* 是 $\mathcal{C}^\perp$ 的联集矛盾. ♮

基于引理 4.3.1, 与引理 4.2.2 和引理 4.2.3 类似地可以证明一个树的所有基本上圈的集合, 形成上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基. 假设 $\mathcal{G}_1$ 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1} e_\nu, \cdots, e_\epsilon\}$ 中的向量安排了次序, 使得 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}\}$ 形成 G 上的一个树. 令 $C^*(i) = C^*_{e_i} (1 \leqslant i \leqslant \nu - 1)$ 为由 e_i 与相应 T 的上树 T^* 形成的基本上圈, 从而有 $\forall C^* \in \mathcal{C}^\perp$,

$$C^* = \sum_{\substack{(C^*, e_i)=1 \\ 1 \leqslant i \leqslant \nu-1}} C^*(i). \tag{4.3.1}$$

于是由定理 4.1.3 和定理 4.2.1, $\{\mathcal{C}^*(i) | i = 1, \cdots, \nu - 1\}$ 形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基, $\mathcal{C}^\perp$ 的维数 $\nu - 1$ 也称为 G 的秩.

当然, $\mathcal{C}^\perp$ 的一个极小联集, 或者说, G 上的一个树, 可以确定 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基, 即对于这个树的所有基本上圈的集合. 但并不是说, $\mathcal{C}$ 的所有基全具有这种形式. 事实上, G 上的树的数目只提供了 $\mathcal{C}^\perp$ 上基的数目的一个下界. 容易证明对于任何 $\nu - 1$ 个节点 v, 这 $\nu - 1$ 个 E_v 也形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基. 然而一般来说, 它们不会是对于某树的所有基本上圈.

定理 4.3.1 $\mathcal{C}^\perp = \mathrm{Im}\ \delta_0$, 即 G 的 1 上边缘空间.

证 由于 $\delta_0 v = E_v$ 以及任何 $\nu - 1$ 个节点 v 的所有 E_v 形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基, 从 δ_0 的定义, 即可得定理结论. ♮

对于给定的上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$, 与 4.2 节中讨论循环空间一样, 也可以看出 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C}^\perp$ 也是一个空间, 而且有如下的关系:

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{C}^\perp + \mathcal{G}_1/\mathcal{C}^\perp, \tag{4.3.2}$$

$$\mathcal{C}^\perp = \mathcal{B} + \mathcal{C}^\perp/\mathcal{B}, \tag{4.3.3}$$

$$\mathcal{G}_1/\mathcal{C}^\perp \cong (\mathcal{G}_1/\mathcal{B})/(\mathcal{C}^\perp/\mathcal{B}). \tag{4.3.4}$$

如果将 $e \in \mathcal{G}_1$ 的 2 上边缘 $\delta_1 e$ 定义为它在 F 中的关联迂的和, 则可以将 δ_1 从 $\mathcal{G}_1$ 的一个基上线性延拓到全空间 $\mathcal{G}_1$, 即 $\delta_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ 为

$$\forall A \in \mathcal{G}_1, \quad \delta_1 A = \sum_{e \in A} \delta_1 e. \tag{4.3.5}$$

这时, 称 δ_1 为 G 的 1上边缘映射, 并且有 $\delta_1 \in \mathrm{Hom}\ (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. $\mathcal{G}_1$ 的子空间 $\mathrm{Ker}\ \delta_1$ 称为 G 的 1上循环空间, 子空间 $\mathrm{Im}\ \delta_1$ 称为 2上边缘空间.

引理 4.3.2 $\delta_1\delta_0 = 0$.

证 事实上, 只要注意到如下的形式:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{G}_2 \\ \tau\downarrow & & \tau\downarrow & & \tau\downarrow \\ \mathcal{G}_2^* & \xrightarrow{\partial_2^*} & \mathcal{G}_1^* & \xrightarrow{\partial_1^*} & \mathcal{G}_0^* \end{array} \tag{4.3.6}$$

是可交换的, 其中, $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(\Sigma, \mathrm{GF}(2))$, $\mathcal{G}_i^* = \mathcal{G}_i(\Sigma^*, \mathrm{GF}(2))$, $i = 0, 1, 2$, $\Sigma^* = \Sigma(G^*; F^*)$ 是 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 的对偶, τ 为确定这个对偶性的映射. 由引理 4.2.6 可知 $\partial_1^*\partial_2^* = 0$, 从而由对偶性即得引理结论. ♮

由引理 4.3.2 知 $\mathrm{Im}\ \delta_0 \subseteq \mathrm{Ker}\ \delta_1$, 即 G 的 1 上边缘空间是它的 1 上循环空间的子空间. 一般来说, G 的 1 上循环空间未必是上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$, 或者说 1 上边缘空间.

引理 4.3.3 $\mathrm{Im}\ \delta_0 = \mathrm{Ker}\ \delta_1$ 当且仅当 $\Sigma = \Sigma(G, F)$ 是平面的.

证 根据由如 (4.3.6) 式所示有 $\mathrm{Im}\ \delta_0 \cong \mathrm{Im}\ \partial_2^*$, $\mathrm{Ker}\ \delta_1 \cong \mathrm{Ker}\ \partial_1^*$. 由定理 4.2.5 的对偶形式, 即得引理结论. ♮

令 $\widetilde{\mathcal{H}}_1(\Sigma; \mathrm{GF}(2)) = \mathrm{Ker}\ \delta_1 /\ \mathrm{Im}\ \delta_0$, 或简单地, 记为 $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, 只要 G 没有特别的说明. 称 $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ 为 G 的一个 1上同调空间.

定理 4.3.2 图 $G = (V, E)$ 是平面的当且仅当存在迂的准基形 F, 使得 $\widetilde{\mathcal{H}}_1 = 0$.

证 这是引理 4.3.3 的一个直接结果. ♮

至此, 也许有人想看一看图 G 连同迂的集合 F 的 0 上同调空间和 2 上同调空间是什么样子, 而分别引进 (-1) 上边缘映射和 2 上边缘映射. 因为与 4.2 节中的讨论类似且没什么困难, 也就留给读者了.

下面讨论循环空间 $\mathcal{C}$ 和上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$ 的结构性质. 设 T 为图 G 上的树, T^* 为与之相应的上树. 令 $C^*(e)(e \in T)$ 为基本上圈, $C(e)(e \in T^*)$ 为基本圈. 若定义

$$f(e) = \begin{cases} C^*(e), & e \in T, \ \text{即}\ (e, T) = 1, \\ \displaystyle\sum_{a \in C(e)+e} C^*(a), & \text{否则}, \end{cases} \tag{4.3.7}$$

则可将它线性延拓为 $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{C}^\perp$. 自然, $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{C}^\perp)$. 如果将 f 限定在 $\mathcal{G}_1$ 的子空间 2^T 上, 则 $f_T \in \mathrm{Hom}(2^T, \mathcal{C}^\perp)$. 不管怎样, 可以进一步证明 $\mathrm{Ker}\ f_T = 0$. 由定理 1.4.2 (第一同构定律), $2^T \cong \mathrm{Im}\ f_T$.

定理 4.3.3 $2^T \cong \mathcal{C}^\perp$.

证 由于如上所述, $\{f_T(e)|\forall e \in T, (e,T)=1\}$ 形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基, 于是就有 $\mathrm{Im} f_T = \mathcal{C}^\perp$. 这就得到了定理结论. ♮

类似地, 定义

$$h(e) = \begin{cases} C(e), & e \in T^*, 即 (e,T^*)=1, \\ \sum\limits_{a \in C^*(e)+e} C(a), & 否则, \end{cases} \tag{4.3.8}$$

并且将它延拓为一个同态 $h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{C})$, 则 h 限定在 T^* 上的函数 $h_{T^*} \in \mathrm{Hom}(2^{T^*}, \mathcal{C})$. 易证 $\mathrm{Ker}\ h_{T^*} = 0$, 从而由定理 1.4.2 有 $2^{T^*} \cong \mathrm{Im}\ h_{T^*}$. 由与 $\mathcal{C}^\perp$ 情形类似的理由即可知 $\mathrm{Im}\ h_{T^*} = \mathcal{C}$, 从而 h_{T^*} 是 2^{T^*} 和 $\mathcal{C}$ 之间的一个同构.

定理 4.3.4 $A \in \mathcal{C}^\perp \Leftrightarrow \sum\limits_{e \in A} h(e) = 0.$

证 首先, 证明对于基本上圈 $C^*(e)(e \in T)$, 定理成立. 因为

$$\sum_{a \in C^*(e)} h(a) = \sum_{a \in C^*(e)+e} C(a) + \sum_{a \in C^*(e)+e} C(a) = 0,$$

从表达式的唯一性即得定理结论. 然后, 证明一般情形. 由于任何上循环都可以唯一地表示为基本上圈的和, 如 (4.3.1) 式所示, 从 h 的线性性即可得定理结论. ♮

对偶地, 可得

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \sum_{e \in A} f(e) = 0. \tag{4.3.9}$$

如果一个图没有双循环, 下面即将讨论存在此性质的条件. 由定理 4.1.4 可知任何 $A \in \mathcal{G}_1$ 都可以唯一地表示为

$$A = \gamma(A) + \omega(A), \tag{4.3.10}$$

其中, $\gamma(A) \in \mathcal{C}$ 和 $\omega(A) \in \mathcal{C}^\perp$. 特别地, 任何 $e \in E$ 有如下的形式:

$$e = \gamma(e) + \omega(e), \tag{4.3.11}$$

其中, $\gamma(e) \in \mathcal{C}$ 和 $\omega(e) \in \mathcal{C}^\perp$ 分别称为*主循环* 和*主上循环*. 由唯一性有

$$\gamma(A) = \sum_{e \in A} \gamma(e), \quad \omega(A) = \sum_{e \in A} \omega(e). \tag{4.3.12}$$

事实上, 由 (4.3.12) 式有 $\gamma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{C})$, $\omega \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{C}^\perp)$. 又容易看出 $\mathrm{Im}\ \gamma = \mathcal{C}$, $\mathrm{Ker}\ \gamma = \mathcal{C}^\perp$, $\mathrm{Im}\ \omega = \mathcal{C}^\perp$, $\mathrm{Ker}\ \omega = \mathcal{C}$ 以及 $\gamma^2 = \gamma$, $\omega^2 = \omega$.

定理 4.3.5 若 $\mathcal{B}=0$, 则

$$A \in \mathcal{C}^{\perp} \Leftrightarrow \sum_{e \in A} \gamma(e)=0, \tag{4.3.13}$$

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \sum_{e \in A} \omega(e)=0. \tag{4.3.14}$$

证 由 (4.3.10) 式, $A \in \mathcal{C}^{\perp} \Leftrightarrow \gamma(A)=0$, $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \omega(A)=0$, 即可得定理之结论. ♮

进而对于无双循环的图, 可以分别由主循环和主上循环以确定 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的一组基.

定理 4.3.6 若 G 没有双循环, 则对于 G 上的树 T 和它相应的上树 T^*, 主循环的集合 $\{\gamma(e)|\forall e \in T^*\}$ 形成 $\mathcal{C}$ 上的一组基, 对偶地, 主上循环的集合 $\{\omega(e)|\ \forall e \in T\}$ 形成 $\mathcal{C}^{\perp}$ 上的一组基.

证 由对偶性, 只需证明两个说法之一, 这里取后者. 由于

$$\mathrm{Im}\omega=\mathcal{C}^{\perp}, \quad \{\omega(e)|\forall e \in E\}$$

生成 $\mathcal{C}^{\perp}$. 设 $C(a)$ 为由 $a \in T^*$ 所产生的基本圈. 由 $\mathrm{Ker}\ \omega=\mathcal{C}$, $\omega(C(a))=0$. 因为 $C(a)=a+T \cap C(a)$, 于是有

$$\omega(a)=\sum_{e \in T \bigcap C(a)} \omega(e),$$

从而 $\{\omega(e)|\forall e \in T\}$ 也产生 $\mathcal{C}^{\perp}$. 由 $|\{\omega(e)|\forall e \in T\}|=\nu-1$, 即为 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的维数, 定理得证. ♮

定理 4.3.7 对于一个无双循环的图 $G=(V,E)$, 有

$$\forall e \in E, \quad f(e)=\omega\left(T \bigcap f^2(e)\right). \tag{4.3.15}$$

证 由于对任何 $A \in \mathcal{C}^{\perp}$, 从 f 的定义可知 $A=f(T \cap A)$. 由 $f^2(e) \in \mathcal{C}^{\perp}$ 有 $f^2(e)=f(T \cap f^2(e))$. 不管怎样, 这意味着 $f(e)$ 和 $T \cap f^2(e)$ 在 f 之下有相同的象. 因为 $\mathrm{Ker}\ f=\mathcal{C}$, 于是有 $T \cap f^2(e)=C+f(e)$, 其中, $C \in \mathcal{C}$. 况且, $f(e) \in \mathcal{C}^{\perp}$. 由 (4.3.10) 式的分解形式可得 $f(e)=\omega(T \cap f^2(e))$. 这就得到了定理结论. ♮

对偶地, 也可以对于无双循环的图 $G=(V,E)$ 得到 $\forall e \in E$,

$$h(e)=\gamma\left(T^* \bigcap h^2(e)\right). \tag{4.3.16}$$

进而容易论证 $\{T \cap f^2(e)|\ \forall e \in T\}$ 与 $\{T^* \cap h^2(e)|\ \forall e \in T^*\}$ 的并形成 $\mathcal{G}_1$ 的一组基.

4.4 双循环空间

如果一个图 $G=(V,E)$ 有一个非空的双循环空间, 或者说, $\mathcal{G}_1$ 有一个非零向量是双循环, 则由定理 4.1.4, 因为这个双循环上的任一边都不与 $\mathcal{B}$ 正交, 均不能将

它表示为主循环和主上循环的和, 但任何不属于任一双循环的边都有这样的表示, 或者说, 分解

$$e = \gamma(e) + \omega(e). \tag{4.4.1}$$

又由于对任何 $B \in \mathcal{B}$, $\gamma(e) + B$ 和 $\omega(e) + B$ 也分别是主循环和主上循环, 则有

$$e = (\gamma(e) + B) + (\omega(e) + B). \tag{4.4.2}$$

也就是说, 这种分解不是唯一的. 令 $O = \{e|\ \exists B \in \mathcal{B}, e \in B\}$, 可以论证形如 (4.4.2) 式的分解, 对于 $\gamma(e)\backslash O$ 和 $\omega(e)\backslash O$ 是唯一的, 从而有如下边集 E 的三元分解:

$$E = M + N + O, \tag{4.4.3}$$

其中,

$$\begin{cases} M = \{e|\ \exists \gamma \in \mathcal{C}, (e \in \gamma) \wedge (e + \gamma \in \mathcal{C}^{\perp})\}, \\ N = \{e|\ \exists \omega \in \mathcal{C}^{\perp}, (e \in \omega) \wedge (e + \omega \in \mathcal{C})\}. \end{cases}$$

定理 4.4.1　$\forall e \in E, \forall B \in \mathcal{B}$,

(1) $e \in M \Rightarrow (|\gamma(e) + B| = 1 (\mathrm{mod}\ 2)) \wedge (|\omega(e) + B| = 0 (\mathrm{mod}\ 2))$;

(2) $e \in N \Rightarrow (|\gamma(e) + B| = 0 (\mathrm{mod}\ 2)) \wedge (|\omega(e) + B| = 1 (\mathrm{mod}\ 2))$;

(3) $|B| = 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

证　首先证明 (3). 因为 $\forall B \in \mathcal{B}$, $(B, B) = 0$, $|B| = 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. 这就得到了 (3). 然后, 证明 (2) 和 (1). 由 (3) 和 (4.4.2) 式有 $|\gamma(e)| + 1 = |\omega(e)| (\mathrm{mod}\ 2)$. 若 $e \in M$, 则 $e \in \gamma(e)$. 由于 $\gamma(e) + e \in \mathcal{C}^{\perp}$, 则有 $(\gamma(e), \gamma(e) + e) = 0$, 即 $|\gamma(e)| + 1 = 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 从而 $|\gamma(e)| = 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. 由 (3) 即得 (1). 类似地可知 (2) 也成立. ▯

定理 4.4.1 使得能够用来简化确定 E 的三元分解的手续. 一般来说, 根据 (4.4.2) 式, 用如下的原则, 总可求得 E 的一个三元分解: 对 $e \in E$, 令

$$\begin{cases} \mathcal{C}\langle e \rangle = \{C|\ \forall C \in \mathcal{C}, (C, e) = 0\}, \\ \mathcal{C}[e] = \{C|\ \forall C \in \mathcal{C}, (C, e) = 1\}. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

类似地可知 $\mathcal{C}^{\perp}\langle e \rangle$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}[e]$ 的含义. 当然, 下面的 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 和 $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\perp})$ 分别表示 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 中的交错空间.

准则 1　$\forall e \in E$, $e \in M \Leftarrow \exists A \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{A}(\mathcal{C})$, 满足 $\mathcal{L}$, 其中

$$\mathcal{L} = (e \in A) \wedge (A \perp \mathcal{C}\langle e \rangle) \wedge (\forall B \in \mathcal{C}[e], (A, B) = 1).$$

准则 2　$\forall e \in E$, $e \in N \Leftarrow \exists A \in \mathcal{C}^{\perp} \backslash \mathcal{A}(\mathcal{C}^{\perp})$, 满足 $\mathcal{R}$, 其中

$$\mathcal{R} = (e \in A) \wedge (A \perp \mathcal{C}^{\perp}\langle e \rangle) \wedge (\forall B \in \mathcal{C}^{\perp}[e], (A, B) = 1).$$

准则 3 $\forall e \in E, e \in O \Leftarrow \exists A \in \mathcal{A}(\mathcal{C}), (e \in A) \wedge (A \perp \mathcal{C})$.

引理 4.4.1 令 $a, b \in M + N$, 则

$$a \in \gamma(b) \Leftrightarrow b \in \gamma(a), \quad a \in \omega(b) \Leftrightarrow b \in \omega(a).$$

证 由 $(\gamma(a), \gamma(b)) = (a + \omega(a), \gamma(b))$ 也有 $(\gamma(a), \gamma(b)) = (\gamma(a), b + \omega(b))$, 由正交性有 $(a, \gamma(b)) = (\gamma(a), b)$. 因此, 前一说法成立. 类似地可得后一说法. ♮

由定理 4.1.4, 对于 $A \in \mathcal{B}^{\perp}$, 还有如下的分解形式:

$$A = \gamma(A) + \omega(A), \tag{4.4.5}$$

其中, $\gamma(A) \in \mathcal{C}$ 和 $\omega(A) \in \mathcal{C}^{\perp}$ 同样分别称为 A 的主循环和主上循环. 当然, 对于 $A \cap O = \varnothing$, 由 (4.4.1) 式有

$$\gamma(A) = \sum_{e \in A} \gamma(e), \quad \omega(A) = \sum_{e \in A} \omega(e).$$

定理 4.4.2 $\forall A, B \in \mathcal{B}^{\perp}$,

$$(\gamma(A), B) = (A, \gamma(B)), \quad (\omega(A), B) = (A, \omega(B)).$$

证 与引理 4.4.1 的证明类似, 由空间的线性性即可得定理结论. ♮

进而可以得到对于 $A \subset E$, 确定其主循环和主上循环的判准. 令

$$\begin{cases} \mathcal{C}\langle A \rangle = \{C \mid \forall C \in \mathcal{C}, A \perp C\}, \\ \mathcal{C}[A] = \{C \mid \forall C \in \mathcal{C}, (A, C) = 1\}. \end{cases} \tag{4.4.6}$$

类似地, 由 $\mathcal{C}^{\perp}$ 代替 $\mathcal{C}$ 即可从 (4.4.6) 式得到 $\mathcal{C}^{\perp}\langle A \rangle$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}[A]$.

判准 1 $\forall A \subset E, C \in \mathcal{C}$,

$$C = \gamma(A) \Leftrightarrow (C \perp \mathcal{C}\langle A \rangle) \wedge (\forall D \in \mathcal{C}[A], (C, D) = 1).$$

判准 2 $\forall A \subset E, C \in \mathcal{C}^{\perp}$,

$$C = \omega(A) \Leftrightarrow (C \perp \mathcal{C}^{\perp}\langle A \rangle) \wedge (\forall D \in \mathcal{C}^{\perp}[A], (C, D) = 1).$$

若对 $a, b \in M + N, a \neq b$, 有 $(a, \gamma(b)) = 1$ (同样地, $(a, \omega(b)) = (\gamma(a), b) = (\omega(a), b) = 1$), 则称 a 和 b **是交叉的**, 用 $a \text{ int } b$ 或 $b \text{ int } a$ 表示. 进而, 令

$$\text{Int } a = \{b \mid \forall b \in E, \ b \text{ int } a\}. \tag{4.4.7}$$

容易看出, $a \in M + N$ 且有

$$\text{Int } a = \gamma(a) \bigcap \omega(a) \bigcap (M + N). \tag{4.4.8}$$

定理 4.4.3　若 $\mathcal{B}=0$, 则对任何 $e\in E$, 有

$$|\text{Int } e| = 0(\text{mod } 2). \tag{4.4.9}$$

证　因为这时 $M+N=E$, (4.4.8) 式变为 $\text{Int } e=\gamma(e)\cap\omega(e)$. 由正交性知 $|\text{Int } e|=(\gamma(e),\omega(e))=0(\text{mod } 2)$, 即得定理结论. ♮

令 $G\cdot e$ 和 $G:e$ 分别为在 $G=(V,E)$ 上收缩边 $e\in E$ 成为一个节点和通过引进一个新节点将 e 双分为两条边所得到的图.

引理 4.4.2　设 G 的双循环空间为 r 维的. 如果 $e\in O$, 则 $G-e$, $G\cdot e$ 和 $G:e$ 的双循环空间是相同的, 并且其维数为 $r-1$. 如果 $e\in M$, 则 $G-e$, $G\cdot e$ 和 $G:e$ 的双循环空间的维数分别为 $r, r+1$ (当然, e 不是环) 和 $r+1$. 如果 $e\in N$, 则 $G-e$, $G\cdot e$ 和 $G:e$ 的双循环空间的维数分别为 $r+1$ (当 e 不为割边时), r 和 r.

证　当 $e\in O$ 时, 可以看出在 G 中, 含 e 的所有双循环均不产生 $G-e$,$G\cdot e$ 和 $G:e$ 中的双循环, 从而第一个说法成立. 其他两个说法可由分解公式 (4.4.2) 所导出. ♮

定理 4.4.4　对于任何非平凡的图 G (当然, 是连通的), $\mathcal{B}=0$ 当且仅当 $\tau(G)=1(\text{mod } 2)$, 其中, $\tau(G)$ 为 G 上树的数目, 即复杂度.

证　对 G 的度用归纳法. 当 G 为树, 或为任意图但边数不多时, 易验证定理成立. 由于收缩一条割边不会改变图的复杂度和双循环的数目, 可假定, 在 G 中无割边. 又如 1.3 节中所定义的, G 不带环, 故对任何 $e\in E$, 图 $G-e$ 和 $G\cdot e$ 皆连通, 而且总有 $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$, 其中, $\tau(G-e)$ 和 $\tau(G\cdot e)$ 分别为 G 中不含和含 e 的树的数目. 对于 $e\in O$, 因为 $G-e$ 和 $G\cdot e$ 的双循环空间具有相同的维数 (由引理 4.4.2), 由归纳假设可知 $\tau(G-e)=\tau(G\cdot e)$, 从而 $\tau(G)=\tau(G\cdot e)+\tau(G-e)=0(\text{mod } 2)$. 这样只需讨论两种可能的情形.

(1) 若 $e\in M$, 则 $G\cdot e$ 必有一个双循环 (由引理 4.4.2), 从而由归纳假设有 $\tau(G\cdot e)=0(\text{mod } 2)$, 而且由引理 4.4.2 可知 $G-e$ 的双循环空间与 G 的相同, $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)=\tau(G-e)(\text{mod } 2)$.

(2) 若 $e\in N$, 则 $G\cdot e$ 的双循环空间与 G 的相同 (由引理 4.4.2), 与 (1) 类似地可得 $\tau(G)=\tau(G\cdot e)(\text{mod } 2)$, 从而由归纳假设即可导出定理的结论. ♮

双循环空间 $\mathcal{B}$ 的一个**双树**, 用 R^0 表示, 就是它的一个极小联集, 或者说, E 的一个子集使得它的任何一个真子集均非 $\mathcal{B}$ 的联集. 与循环空间和上循环空间类似地, 双树确定双循环空间 $\mathcal{B}$ 的一组基, 也称为 $\mathcal{B}$ 的**基本基**.

设 $A\subseteq E$. 同样地, 记 $G-A, G\cdot A$ 和 $G:A$ 分别为从 $G=(V,E)$ 中去掉 A 中的边, 收缩 A 的每一条边为一个节点和将 A 的每一条边作双分而得到的图.

定理 4.4.5　若 R^0 是一个双树; 则 $G-R^0$, $G\cdot R^0$ 和 $G:R^0$ 皆无双循环.

证 由于双树确定 G 的双循环空间的一组基, 从引理 4.4.2 即可导致定理的结论. ♮

一般来说, 似乎至今尚未发现一种简单易行的图论方法, 确定出一个图的双树. 然而, 对于可平面图, 确甚为简单. 关键的步骤在于按一定方式求出一个单个迂组成的集合, 使得形成一个多面形.

通穿规则 在一个可平面图的平面嵌入上, 从一个节点起步, 在一面 f 内, 沿一条与此节点关联的边, 只要达到边的中点就穿过此边, 在与此边关联的另一面, 沿此边继续走.

假设 $\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}$ 是依通穿规则, 使得每一条边恰通过两次所得的迂的集合. 对于 $t \in \mathcal{T}_{\mathrm{TT}}$, 令 $q(t)$ 为在 t 中仅出现一次的边的集合. 因为 $\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}$ 本身是一个多面形, $\partial_2 t = q(t)$.

引理 4.4.3 $\forall t \in \mathcal{T}_{\mathrm{TT}}$,

$$(q(t) \in \mathcal{B}) \wedge (q(t) = 0) \Leftrightarrow |\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}| = 1.$$

证 因为 $q(t) = \partial_2 t \in \mathcal{C}$, 由平面对偶性, 对 $f \in F$ 有 $(q(t), \partial_2 f) = 0$. 这就意味着 $q(t) \in \mathcal{C}^{\perp}$, 从而 $q(t) \in \mathcal{B}$. 由 $\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}$ 的条件, 后一说法的充分性显然, 必要性则根据图的连通性, 可由通穿规则本身而得到. ♮

引理 4.4.4 令 $\mathcal{T}_{\mathrm{TT}} = \{t_1, t_2, \cdots, t_r\}$, 则 r 个向量 $q(t_i)(i = 1, \cdots, r)$ 是线性相关的, 但它们之中任何 $r-1$ 个向量皆线性无关.

证 由于

$$\sum_{1<i\leqslant r} q(t_i) = 0.$$

第一个说法是显然的. 若第二个说法不真, 如果必要时通过适当排序, 可以假设

$$q(t_1) = \sum_{2\leqslant i\leqslant r-1} q(t_i).$$

然而, 由第一个说法有

$$\sum_{2\leqslant i\leqslant r} q(t_i) = 0.$$

这就意味着 $\mathcal{T}_{\mathrm{TT}} = \{t_2, t_3, \cdots, t_r\}$. 与引理的条件矛盾. ♮

定理 4.4.6 $\dim \mathcal{B} = |\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}| - 1$.

证 由引理 4.4.3, 引理 4.4.4 和前面关于循环和上循环空间的讨论, 可以确定 E 的一个子集, 用 $\{e_1, \cdots, e_{r-1}\}$ 表示, 使得满足性质 $(q(t_i), e_i) = 1$,

$$(q(t_j), e_i) = 0, \quad j \neq i, \ 1 \leqslant i, j \leqslant r-1.$$

也就是说, $R^0 = \{e_1, \cdots, e_{r-1}\}$ 为由 $\{q(t_i) | i = 1, 2, \cdots, r\}$ 所生成空间的一个极小联集. 下面证明 R^0 是一个双树. 对 r 用归纳法. 若 $r = 1$, 则 $R^0 = \varnothing$. 由引理 4.4.3, 结论为真. 若 $r > 1$, 不失一般性, 可令 e_1 同在 $q(t_1)$ 和 $q(t_r)$ 中出现, 则 $\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}(G - e_1) = \{t_2, \cdots, t_{r-1}, t'_r\}$, 其中, t'_r 为由 $q(t_1)$ 和 $q(t_r)$ 所合成的. 由归纳假设, $R^0 \setminus \{e_1\}$ 为 $G - e_1$ 的一个双树. 由于 $e_1 \in O$, 由引理 4.4.2 即可得到 R^0 为 G 的一个双树, 从而

$$\dim \mathcal{B} = |R^0| = r - 1 = |\mathcal{T}_{\mathrm{TT}}| - 1.$$

定理得证. ♮

4.5 注　记

(1) 讨论空间, 主要是循环和上循环空间的大多数文章, 是对于图的边定向并在实数域上进行. 然而所得的结果, 事实上, 并不依赖定向的方式. 最早的文章, 当首推 Kirchhoff 分析电网络的. 这一理论的主要方面在陈氏的书 (Chen, W.K.[1]) 中可以查到. 尤其是文献 (Brooks, R.L.-C.A.B. Smith-A.H. Stone-W.T. Tutte[1]) 在解决拼方问题时所用的方法与网络理论紧密相关. 另一方面, 图上链群的理论多少是受拓扑学的代数化的影响. 这方面的第一篇文章, 似乎归于 Tutte, W. T.[4]. 不管怎样, 吴文俊那时在拓扑学方面的工作也含有对图作为特殊情形的讨论 (Wu, W.T.[1]). 此后还有文献 (Liu, Y.P.[22]).

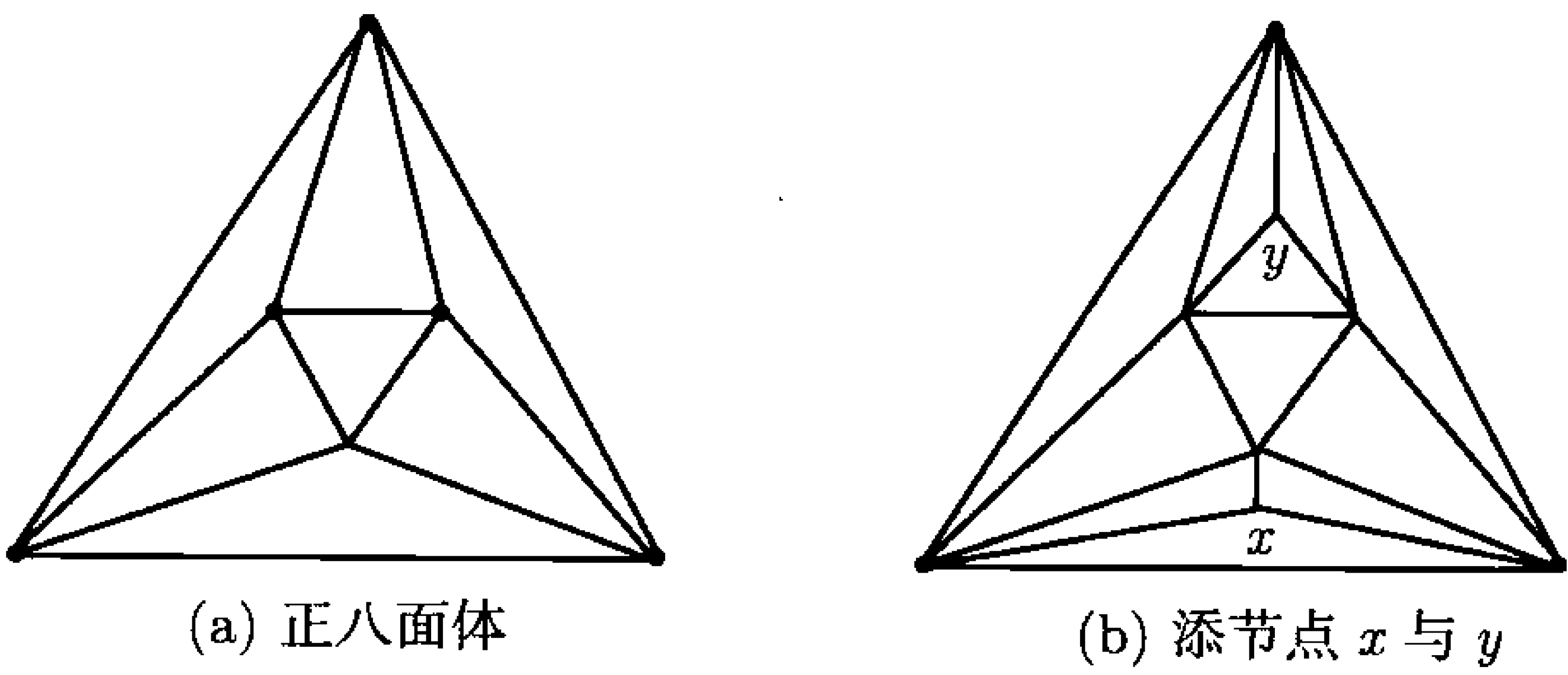
(2) 双循环空间是在陈氏的文章 (Chen, W.K.[2]) 中讨论一个图上的二分空间时被引进的. 之后, 一些作者, 特别是 Rosenstiehl, P.[1]. 作了进一步的研究. 近来, 在文献 (Berman, K.[2]) 中, 讨论了整数环 Z 上的双循环, 发现了一个图的复杂度的唯一分解 $\tau = t_1 \cdots t_m = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} t_i$, 使得 Z 上的双循环群同构于 $Z(t_1) \times \cdots \times Z(t_m)$, 其中, $Z(t_i) = \{a \in Z \mid t_i a = 0\} (i = 1, \cdots, m)$.

(3) 在 4.4 节中, 为求一个平面图的双循环空间的基, 提供了一种十分简单的方法. 然而, 这种方法似乎不能直接发展到一般的图. 此方法的原始想法可在文献 (Shank, H.[1]) 中看到. 更早地, 可参见文献 (Dehn, M.[1]).

(4) 虽然在 4.3 节中, 提供了一些关于图的平面性的判准, 而这些判准, 不大会对设计有效算法有直接的好处. 在第 6 章中, 将进一步地讨论, 以便得到更为有效的定理.

(5) 在定理 4.2.5 问世之后, 人们曾怀疑其中的充分性. 例如, 在文献 (Abrams, L.-D.C. Slilaty[1]) 中, 给出如图 4.5.1 所示的“反例”. 他们的理由是若将图 4.5.1(a) 所示的正八面体, 添两个节点 x 和 y 得图 4.5.1(b), 再把 x 和 y 合并为一个节点.

在所得的多面形中, 虽然面数和边数没有改变, 但节点数少了 1, 从而 Euler 示性数改变了. 注意到面数一样, 就说明迂的二重覆盖相同, 致使与定理 4.2.5 的充分性相驳.



(a) 正八面体　(b) 添节点 x 与 y

图 4.5.1

实际上, 他们的问题就在于忽略了定理 4.2.5 中迂的二重覆盖必须是准基形. 因为在合并的节点处不可迂, 由引理 2.6.3, "反例" 中的二重覆盖不是所得图的一个准基形. 因此, 不满足定理 4.2.5 的前提条件.

在拓扑学的意义上, 如果 "反例" 给的也认为是一个多面形, 那么合并的节点就是曲面上的一个边缘点. 这样一来, 曲面就带有边缘了, 不是所讨论的曲面. 关于定理 4.2.5 以及定理 4.3.2 的代数化的意义, 将在第 13 章中进一步讨论.

(6) 在图的循环空间研究中, 可进一步参见新进展, 如文献 (Ren, H.-Y.P. Liu-D.J. Ma-J.J. Lu[1]).

第 5 章 平面上的图

5.1 Euler 公式的利用

设 Σ 是一个多面形, 它的基准图为 $G=(V,E)$, F 是面的集合. 令 $\rho(v)$ 和 $\rho^*(f)$ 分别为节点 $v\in V$ 和面 $f\in F$ 的次, 则有

$$\begin{cases} V=\sum\limits_{i\geqslant 1}V_i, \quad V_i=\{v|\ \forall v\in V,\ \rho(v)=i\}, \\ F=\sum\limits_{i\geqslant 1}F_i, \quad F_i=\{f|\ \forall f\in F,\ \rho^*(f)=i\}. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

进而, 令 $\nu_i=|V_i|(1\leqslant i\leqslant \nu)$, $\varphi_i=|F_i|(1\leqslant i\leqslant \varphi)$, 则

$$\begin{cases} \nu=|V|=\sum\limits_{i\geqslant 1}\nu_i, \\ \varphi=|F|=\sum\limits_{i\geqslant 1}\varphi_i, \\ 2\epsilon=\sum\limits_{i\geqslant 1}i\nu_i=\sum\limits_{i\geqslant 1}i\varphi_i. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

在对偶的情形下, G 的对偶图 $G^*=(V^*,E^*)$, F^* 为它的面的集合, 就是 Σ 的对偶多面形 Σ^* 的基准图. 对于 V^* 和 F^*, 也有与 (5.1.1) 式和 (5.1.2) 式类似的公式, 而且有如下关系:

$$\begin{cases} \nu^*=|V^*|=|F|=\varphi, \quad \nu_i^*=\varphi_i,\ i\geqslant 1, \\ \varphi^*=|F^*|=|V|=\nu, \quad \varphi_i^*=\nu_i,\ i\geqslant 1. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

引理 5.1.1 令 $\delta(G)$ 和 $\delta^*(G)=\delta(G^*)$ 分别为 G 和 G^* 的节点的最小次. 如果 $\delta(G)$, $\delta^*(G)\geqslant 3$, 则有

$$\left\lceil \frac{3\max(\nu,\varphi)}{2}\right\rceil \leqslant \epsilon \leqslant 3(\min(\nu,\epsilon)-\chi(\Sigma)), \tag{5.1.4}$$

其中等号成立当且仅当 $V_i=\varnothing(i\geqslant 4)$, 或者 $F_i=\varnothing\ (i\geqslant 4)$.

证 由 (5.1.2) 式中的第三式有

$$2\epsilon\geqslant \max\left(3\sum_{i\geqslant 1}\nu_i,\ 3\sum_{i\geqslant 1}\varphi_i\right), \tag{5.1.5}$$

从而 (5.1.4) 式左边的不等式. 由 (2.6.1) 式中的 Euler 示性数和 (5.1.5) 式有

$$\begin{aligned}3\chi(\Sigma) &\leqslant \min(-\epsilon+3\nu,-\epsilon+3\varphi)\\ &= -\epsilon+3\min(\nu,\varphi).\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

这就得 $\epsilon \leqslant 3\min(\nu,\varphi)-3\chi(\Sigma)$, 从而 (5.1.5) 式右边的不等式成立.

因为 (5.1.5) 式或 (5.1.6) 式, 等式成立当且仅当 $|V_i|=0(i\geqslant 4)$, 或 $|F_i|=0(i\geqslant 4)$, 即引理的最后一个说法. ♮

由引理 5.1.1 可以直接导出一批已知的结果 (Liu, Y.P.[20, 21]). 若 $\Sigma\subset P_p$, 则由 (2.6.1) 式有

$$\left\lceil\frac{3\max(\nu,\varphi)}{2}\right\rceil \leqslant \epsilon \leqslant 3(\min(\nu,\varphi)-2+2p). \tag{5.1.7}$$

当然, 对 $p=0$, 即球面或平面有

$$\left\lceil\frac{3\max(\nu,\varphi)}{2}\right\rceil \leqslant \epsilon \leqslant 3\min(\nu,\varphi)-6. \tag{5.1.8}$$

若多面形 Σ 的所有面皆为三角形, 则称之为*三角剖分*. 球面上的一个三角剖分也称为**极大平面图**. 对于极大平面图, (5.1.8) 式中的等式成立.

若 $\Sigma\subset Q_q$, 则

$$\left\lceil\frac{3\max(\nu,\varphi)}{2}\right\rceil \leqslant \epsilon \leqslant 3(\min(\nu,\varphi)-2+q). \tag{5.1.9}$$

在多面形 Σ 上, 若所有节点全是 k 次的, 则称它为 k *正则*的. 类似地, 若它的所有面皆为 k 次的, 则称它为 k^**正则的*. 一个 3 正则多面形也称为*立方的*. 当然, 三角剖分是 3^* 正则的. 若一个多面形既 s 正则, 又 t^* 正则, 则称之为*全正则*的, 或者 (s,t)*正则*的, 即 (s,t)*多面形*.

令 $\bar\rho$ 和 $\bar\rho^*$ 分别为多面形的节点和面的平均次, 则有

$$\bar\rho=\frac{1}{\nu}\sum_{i\geqslant 1} i\nu_i,\quad \bar\rho^*=\frac{1}{\varphi}\sum_{i\geqslant 1} i\varphi_i. \tag{5.1.10}$$

引理 5.1.2 对于一个多面形 Σ, 它的基准图为 $G=(V,E)$ 且 $\delta(G),\delta^*(G)\geqslant 3$, 则有

$$\frac{2}{\bar\rho}-1+\frac{2}{\bar\rho^*}\begin{cases}>0, & \Sigma\subset P_0 \text{ 或 } Q_1,\\ =0, & \Sigma\subset P_1 \text{ 或 } Q_2,\\ <0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5.1.11}$$

证 由 (5.1.10) 式有 $\nu\bar\rho=2\epsilon=\varphi\bar\rho^*$. 由 (2.6.1) 式得

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= \frac{2\epsilon}{\bar\rho}-\epsilon+\frac{2\epsilon}{\bar\rho^*}\\ &= \epsilon\Big(\frac{2}{\bar\rho}-1+\frac{2}{\bar\rho^*}\Big),\end{aligned}$$

进而由 (2.6.1) 式, 即得 (5.1.11) 式. ♮

根据引理 5.1.2, 可能的 (s,t) 多面形为当

$$(s,t)=(\bar{\rho},\bar{\rho}^*)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$$

时的情形.

定理 5.1.1　在球面上有 5 种 (s,t) 多面形. 在射影平面上有 4 种 (s,t) 多面形.

证　事实上, 第一个结论中的 5 种多面形即 Polato 多面体: 正四面体(即 (3, 3) 多面形 Π_4)、立方体(或正六面体, 即 (3,4) 多面形 Π_6)、正八面体(即 (4,3) 多面形 Π_8)、正十二面体(即 (3,5) 多面形 Π_{12}) 和正廿面体(即 (5,3) 多面形 Π_{20}). 由上面的讨论可知第一个结论成立.

第二个结论中的 4 个多面形如图 5.1.1 所示. 它们是 (4,3) 多面形及其对偶 (3,4) 多面形 (图 5.1.1(a)), (5,3) 多面形及其对偶 (3,5) 多面形 (图 5.1.1(b)). 然而, (3,3) 多面形在射影平面上不存在 (留给读者证明), 从而第二个结论得证. ♮

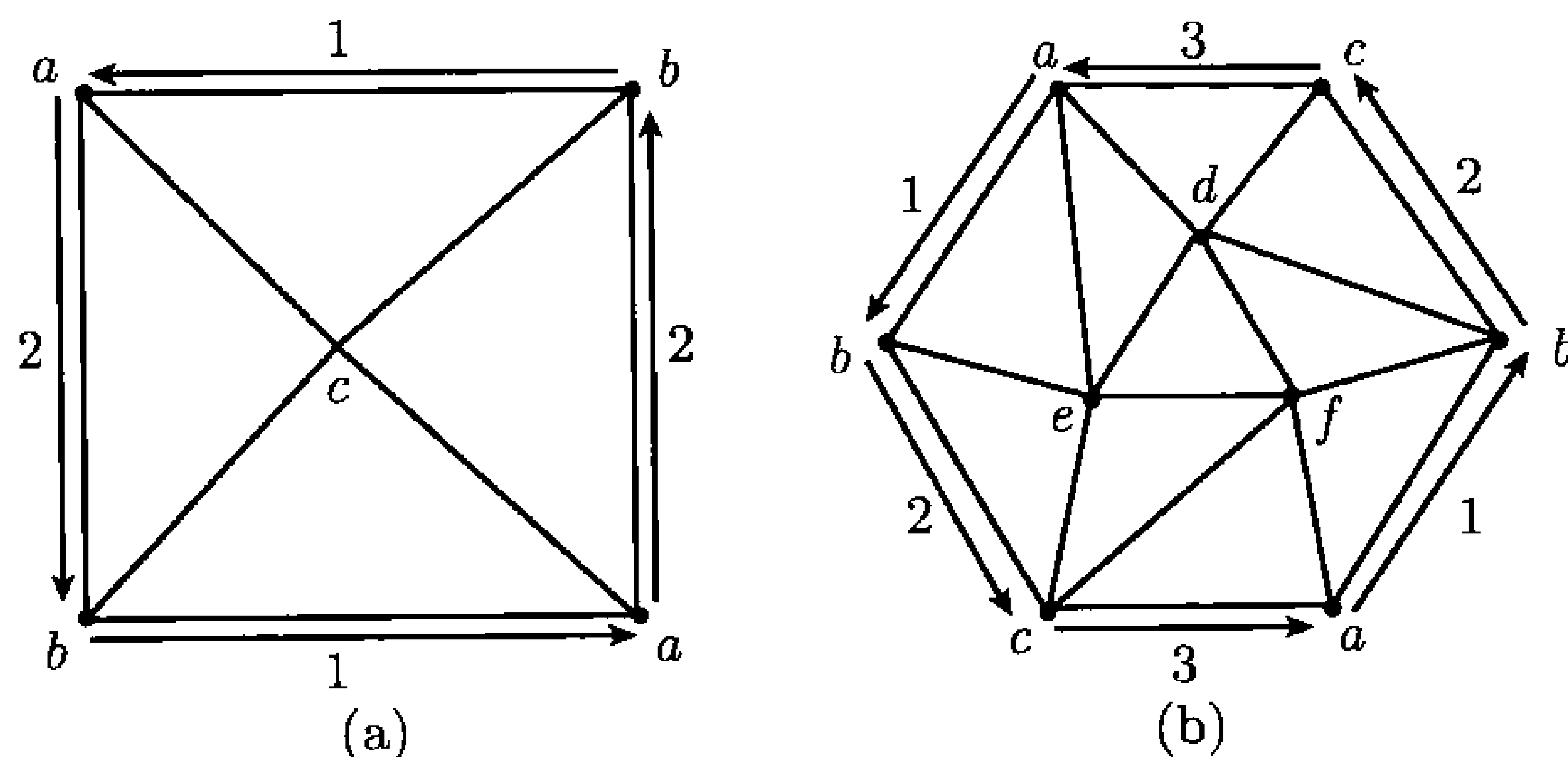


图 5.1.1

类似地, 由 (5.1.11) 式, 在环面或 Klein 瓶上有三种可能的 (s,t) 多面形, 即 $(s,t)=(\bar{\rho},\bar{\rho}^*)=(3,6),(4,4),(6,3)$. 事实上, 图 5.1.2(a) 和图 5.1.2(b) 分别为环面上的 (3,6) 和 (4,4) 多面形, 而 (6,3) 多面形则是 (3,6) 多面形的对偶. 在图 5.1.3 中给出了相应的 (s,t) 多面形在 Klein 瓶上的情形.

引理 5.1.3　对于曲面 S 上的 $k(k\geqslant 3)$ 多面形有

$$\sum_{j\geqslant 3}(2k-(k-2)j)\varphi_j=2k\chi(S). \tag{5.1.12}$$

证　由 (5.1.2) 式有

$$\sum_{j\geqslant 3}(2k-(k-2)j)\varphi_j=2\sum_{j\geqslant 3}j\varphi_j-k\sum_{j\geqslant 3}j\varphi_j+2k\sum_{j\geqslant 3}\varphi_j$$

$$= 2k\sum_{j\geqslant 3}\nu_j - 2k\epsilon + 2k\varphi$$
$$= 2k\chi(S),$$

即得引理结论. ♮

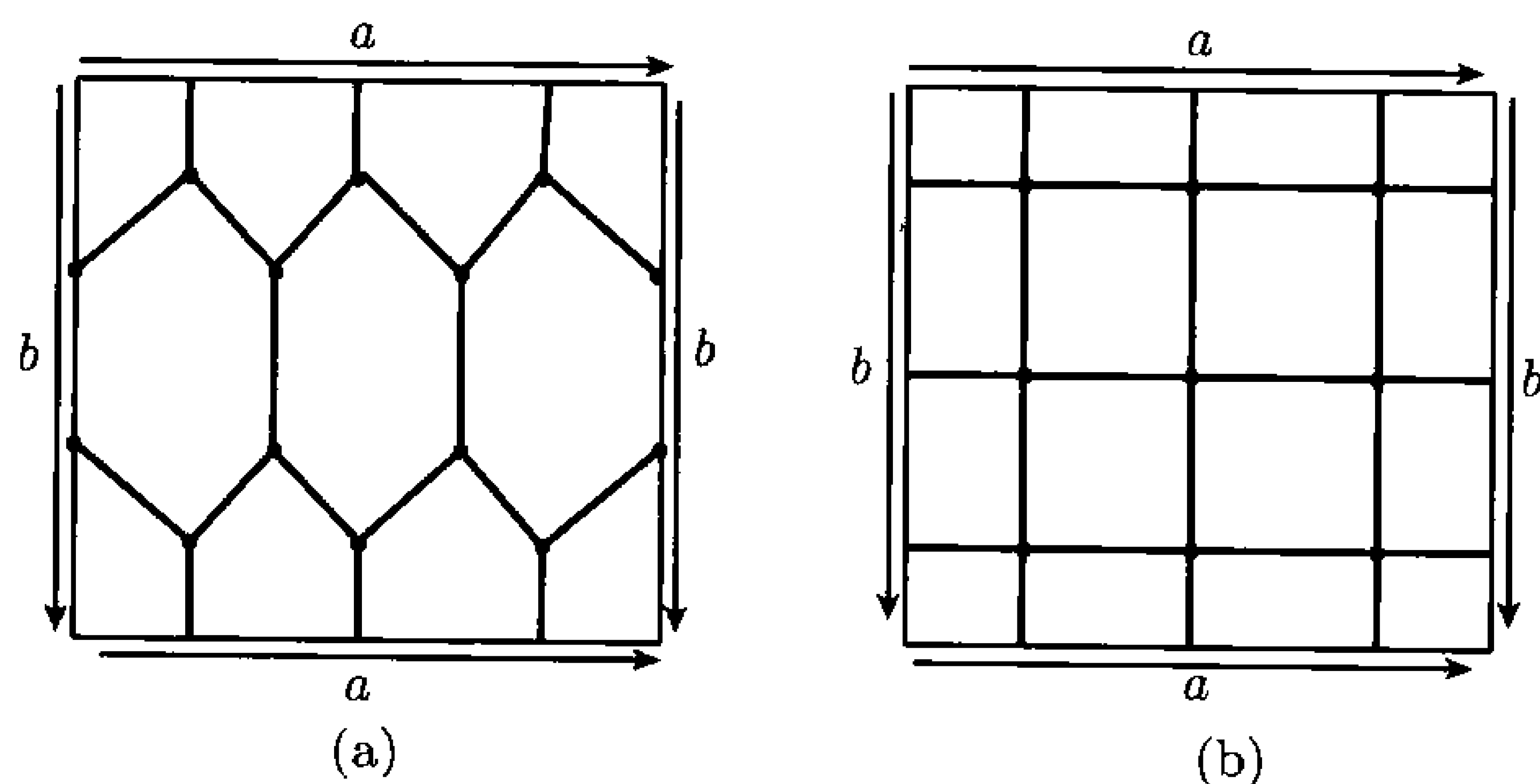


图 5.1.2

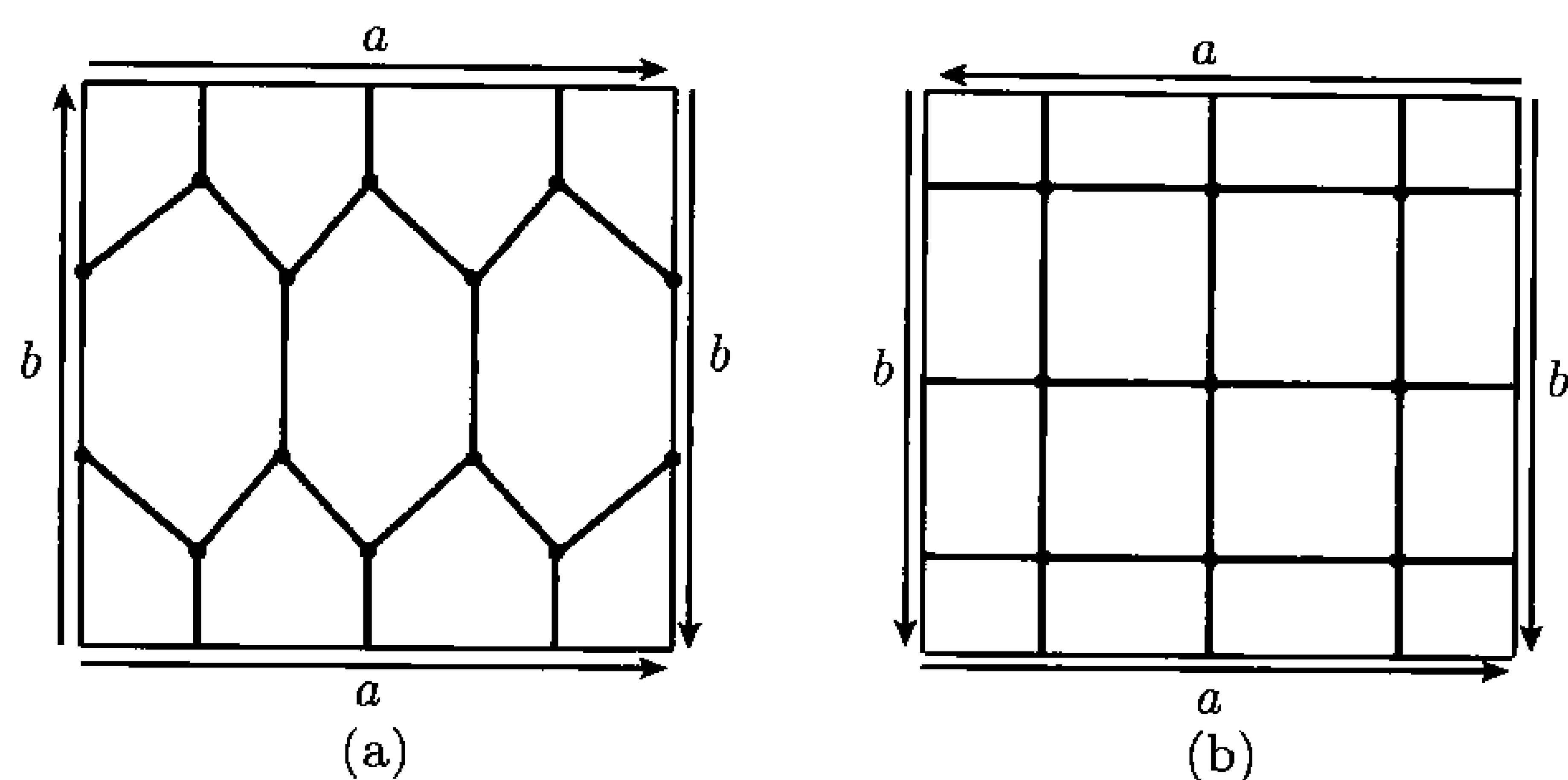


图 5.1.3

令 m_i^t 为与 i 个次为 t 的面关联的节点的数目, λ^t 为节点 v 与次为 t 的面 f 关联的对 $\{v, f\}$ 的数目, 则有

$$\begin{cases} t\varphi_t = \lambda^t = \sum_{i=1}^{k} i m_i^t, \\ \nu = \sum_{i=0}^{k} m_i^t, \qquad t \geqslant 3, \\ t\varphi_t \leqslant l\nu + \sum_{j=1}^{k-l} j m_{l+j}^t, \quad 3 \leqslant t \leqslant k. \end{cases} \tag{5.1.13}$$

在上面的不等式中, 等号成立当且仅当 $m_0^t = m_1^t = \cdots = m_{l-1}^t = 0$. 进而, 令

$$\varPhi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots) = \frac{2(k-l)t\chi(S)}{2k-(k-2)t}$$

$$+\sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq t}}\frac{((k-2)t-2l)j-2(k-l)t}{2k-(k-2)t}\varphi_j. \tag{5.1.14}$$

定理 5.1.2 (第一不等式)　对于曲面 S 上的 k 多面形有

$$\sum_{s=1}^{k-l} sm_{l+s}^t \geqslant \Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots), \tag{5.1.15}$$

其中 $t\geqslant 3$, $t\neq 2k/(k-2)$, $3\leqslant l<k$.

证　由 (5.1.13) 式中的第三式、(5.1.2) 式中的第三式 (k正则的情形) 和 (5.1.12) 式有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k-l} sm_{l+s}^t &\geqslant t\varphi_t - l\nu = \left(1-\frac{l}{k}\right)t\varphi_t - \frac{l}{k}\sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq t}} j\varphi_j\\ &= \frac{k-l}{k}t\left(\frac{2k\chi(S)}{2k-(k-2)t} - \sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq t}}\frac{2k-(k-2)j}{2k-(k-2)t}\varphi_j\right)\\ &\quad - \frac{l}{k}\sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq t}} j\varphi_j = \Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots).\end{aligned}$$

定理得证.

由 (5.1.15) 式和 (5.1.13) 式中的第二式有

$$m_k^t \geqslant -(k-l-1)\nu + \Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots), \tag{5.1.16}$$

其中 $3\leqslant l<k$. 为简便起见, 记

$$\begin{aligned}\Psi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots) = &\frac{2t\chi(S)}{2k-(k-2)t}\\ &+\sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq t}}\frac{[(k-2)t-2(k-1)]j-2t}{2k-(k-2)t}\varphi_j.\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

定理 5.1.3 (第二不等式)　对于曲面 S 上的 k 多面形有

$$m_k^t \geqslant \Psi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots), \tag{5.1.18}$$

其中 $t\geqslant 3, t\neq 2k/(k-2)$, $k\geqslant 3$.

证 由 (5.1.12) 式和 (5.1.2) 式的第三式 (k 正则情形) 可得

$$\nu = \frac{2t\chi(S)}{2k-(k-2)t} + 2\sum_{\substack{j\geqslant 3\\ j\neq t}} \frac{j-t}{2k-(k-2)t}\varphi_j. \tag{5.1.19}$$

将 (5.1.19) 式中的 ν 代入到 (5.1.16) 式中, 化简之后, 即可得不等式 (5.1.18). □

从上面所说的两个不等式出发, 可直接导出一批已经知道的结果, 参见文献 (Liu, Y.P.[20, 21]), 这里仅提供几个常用的.

推论 5.1.1 对于曲面 S 上的 k 多面形, 若 $\chi(S)>0$, 即 S 是球面和射影平面, 则只有 $k\leqslant 5$ 时才有意义. 或者说, 在曲面 $S(\chi(S)>0)$ 上的任何多面形, 总有一个节点和一个面的次至多为 5. 特别地, 任何平面图均有一个节点和一个面次至多为 5.

推论 5.1.2 对于环面上和 Klein 瓶上的 k 多面形有 $k\leqslant 6$, 并且若 $k=6$, 则所有的面皆三角形.

推论 5.1.3 在球面或射影平面上, 任何 4 或 5 多面形均有一个面是三角形. 特别地, 一个平面图, 如果节点的次不小于 4, 则必有一个面为三角形. 在环面或 Klein 瓶上, 任何 4 或 5 多面形均有一个面为三角形.

推论 5.1.4 在曲面 $S(\chi(S)<0)$ 上的任一 k 多面形, 均有一个次不大于 $\lfloor 2k(1-\chi(S))/(k-2)\rfloor$ 的面.

5.2 Jordan 曲线定理

在拓扑学中, Jordan 曲线定理的经典说法是任何一个简单的闭曲线, 将球面分为两个连通的区域均以它为边界. 本节讨论它在图论中的说法与证明.

令 $\Sigma=(G;F)$ 是一个多面形, 它的基准图为 $G=(V,E)$, F 为面的集合. 如果 G 的任何一个非面边界的圈 C 有如下性质: 存在 G 的两个真子图 C_{In} 和 C_{Out}, 使得

$$C_{\mathrm{In}}\bigcup C_{\mathrm{Out}}=G, \quad C_{\mathrm{In}}\bigcap C_{\mathrm{Out}}=C, \tag{5.2.1}$$

则称 Σ 具有**第一Jordan 性**, 或简记为 **1曲线性**. 对于一个图 G, 如果存在一个多面形 $\Sigma=\Sigma(G;F)$ 具有 **1曲线性**, 亦然. 当然, 为了使本节所讨论的问题有意义, 总是假设在 $\Sigma=(G;F)$ 中 F 的所有元素皆为 G 的圈, 或者更确切地, $f\in F$ 的边界皆为 G 中的圈.

定理 5.2.1 (第一 Jordan 定理) 图 G 是平面的当且仅当 G 具有 1 曲线性.

证 因为 $\mathcal{H}_1(\Sigma)=0$, $\Sigma=(G;F)$, 由定理 4.2.5 可知 $\mathrm{Im}\,\partial_2=\mathrm{Ker}\ \partial_1=\mathcal{C}$, 即 G 的循环空间, 从而 $\mathrm{Im}\ \partial_2\supseteq F$ 且在 F 中含有 $\mathcal{C}$ 的一组基. 由此, 对任何一个圈

$C \notin F$, 存在 F 的一个子集 D, 使得

$$C = \sum_{f \in D} \partial_2 f, \quad C = \sum_{f \in F \setminus D} \partial_2 f. \tag{5.2.2}$$

又若记

$$C_{\text{Out}} = G\Big[\bigcup_{f \in D} f\Big], \quad C_{\text{In}} = G\Big[\bigcup_{f \in F \setminus D} f\Big],$$

则由于 G 的每一条边在 F 的元素中恰出现两次, 必有 C_{Out} 和 C_{In} 满足 (5.2.1) 式中的关系, 即 G 具有 1 曲线性.

反之, 若 G 不是平面的, 则 G 只在亏格非 0 的曲面有嵌入. 在 G 中, 必存在不可收缩圈. 但这种圈不满足 1 曲线性, 与前提条件矛盾. ♮

令 $\Sigma^* = \Sigma(G^*; F^*)$ 为 $\Sigma = (G; F)$ 的对偶多面形. 对于 G 中的一个图 C, 记 $C^* = \{e^* | \ \forall e \in C\}$, 或者说, $C \in \mathcal{G}_1$ 的在 $\mathcal{G}_1^*$ 中的相应向量.

引理 5.2.1　令 C 为 Σ 中一个圈, 则 $G^* \backslash C^*$ 至多有两个连通片.

证　设 H^* 为 $G^* \backslash C^*$ 的一个连通片, 但非仅有的一个. 令 D 是 F 中相应 $V(H^*)$ 的子集, 则

$$C' = \sum_{f \in D} \partial_2 f \subseteq C.$$

然而, 若 $\varnothing \neq C' \subset C$, 则 C 本身并非圈, 与引理的条件矛盾, 故 $C' = C$. 由于每条边在 F 的元素中恰出现两次, 只能

$$C = \sum_{f \in F \setminus D} \partial_2 f,$$

从而由 $F \backslash D$ 可确定 $G^* \backslash C^*$ 的另一个连通片. ♮

对于一个多面形 $\Sigma = (G; F)$ 和它的对偶 $\Sigma^* = \Sigma(G^*; F^*)$, 若 C 是 G 上的一个圈, 使得 $G^* \backslash C^*$ 恰有两个连通片, 则称 C 具有第二Jordan 性, 或简记为 2曲线性. 若图 G 的所有圈都具有 2 曲线性, 则 G 本身也被称为具有 2曲线性.

定理 5.2.2 (第二 Jordan 定理)　一个图 G 具有 2 曲线性当且仅当 G 是可平面的.

证　先证必要性. 由于对 G 的任何圈 C, 恰使 $G^* \backslash C^*$ 具有两个连通片, 任何 C^* 只要与 G 中的一圈在对偶意义下相应, 必为 G^* 的上圈. 由于 G^* 的每一边在 V^* 的元素 (它们全是上圈) 中恰出现两次, 则由引理 5.2.1 知 V^* 中含有 Ker δ_1^* 的一组基, 而且 V^* 为 Im δ_0^* 的一个子集, 从而 Ker $\delta_1^* \subseteq$Im δ_0^*. 另一方面, 由引理 4.3.2 有 Im $\delta_0^* \subseteq$Ker δ_1^*. 这就只能 Ker δ_1^* =Im δ_0^*, 即 $\widetilde{\mathcal{H}}_1(\Sigma^*) = 0$. 由定理 4.3.2 的对偶情形, G^* 必为可平面的, 从而 G 是可平面的. 反之, 再证充分性. 由平面对偶性, 对于 G 中的任一圈 C, C^* 必为 G^* 中上圈, 从而 $G * \backslash C^*$ 有两个连通片, 即 2 曲线性. ♮

对于一个图 G, 当然连通无环, $\Sigma=(G;F)$ 为它的一个准基形, 令 C 是一个圈, E_C 为与 C 关联非 C 上的边的集合. 在 E_C 上定义一个等价, 用 $\sim_C$ 表示, 作为如下的二元关系的传递闭包: $\forall a,b\in E_C$,

$$a\sim_C b\Leftrightarrow \exists f\in F,(a^{\alpha}C(a,b)b^{\beta}\subset f)\vee(b^{-\beta}C(b,a)a^{-\alpha}\subset f), \tag{5.2.3}$$

其中, $C(a,b)$ 或 $C(b,a)$ 分别为 $C\cap f$ 上的从 a 到 b 或从 b 到 a 的路. 可以看出总有

$$|E_C/\sim_C|\leqslant 2,$$

并且对于任何非 F 中的元素的圈 C, 等式成立当且仅当 Σ 是可定向的. 这时, 用 $E_{\mathcal{L}}=E_{\mathcal{L}}(C)$ 和 $E_{\mathcal{R}}=E_{\mathcal{R}}(C)$ 表示此二等价类, 进而令 $V_{\mathcal{L}}$ 和 $V_{\mathcal{R}}$ 分别为被连接 $E_{\mathcal{L}}$ 和 $E_{\mathcal{R}}$ 中两边的路通过的节点的集合. 由 G 的连通性可知 $V_{\mathcal{L}}\cup V_{\mathcal{R}}=V\backslash V(C)$. 如果 $V_{\mathcal{L}}\cap V_{\mathcal{R}}=\varnothing$, 则称 C 具有**第三Jordan 性**, 或者称为 **3曲线性**. 特别地, 若 C 具有 3 曲线性, 则连 $V_{\mathcal{L}}$ 和 $V_{\mathcal{R}}$ 的每一条路, 必与 C 相交 (即有公共节点), 从而 C 也具有 1 曲线性. 若 G 的准基形 Σ 的每一个非面边界的圈均具有 3 曲线性, 则也称 G 具有 **3曲线性**.

引理 5.2.2 令 C 为图 G 的一个圈, $\Sigma=(G;F)$ 为 G 的一个可定向的准基形. 如果 C 具有 2 曲线性, 则 C 具有 3 曲线性. 反之, 若 $V_{\mathcal{L}}(C)\neq\varnothing$, $V_{\mathcal{R}}(C)\neq\varnothing$ 和 C 具有 3 曲线性, 则 C 具有 2 曲线性.

证 对于一个节点 $v^*\in V^*=V(G^*)$, 令 $f(v^*)\in F$ 为 Σ 中相应的面. 设 C^*_{In} 和 C^*_{Out} 为 $G^*\backslash C^*$ 的两个连通片 (由于 C 具有 2 曲线性), 则

$$\begin{cases}C_{\mathrm{In}}=\bigcup\limits_{v^*\in C^*_{\mathrm{In}}}f(v^*),\\ C_{\mathrm{Out}}=\bigcup\limits_{v^*\in C^*_{\mathrm{Out}}}f(v^*)\end{cases}$$

为 G 的子图, 并且使得

$$C_{\mathrm{In}}\bigcup C_{\mathrm{Out}}=G\quad 和\quad C_{\mathrm{In}}\bigcap C_{\mathrm{Out}}=C,$$

从而有 $E_{\mathcal{L}}\subset C_{\mathrm{In}}$ 和 $E_{\mathcal{R}}\subset C_{\mathrm{Out}}$ (或反之, $E_{\mathcal{L}}\subset C_{\mathrm{Out}}$ 和 $E_{\mathcal{R}}\subset C_{\mathrm{In}}$). 剩下的就是要证 $V_{\mathcal{L}}\cap V_{\mathcal{R}}=\varnothing$. 否则, 即 $V_{\mathcal{L}}\cap V_{\mathcal{R}}\neq\varnothing$, 则 C_{In} 和 C_{Out} 必有一个节点公共, 并且它不在 C 上, 从而 C_{In} 和 C_{Out} 有一条公共边不在 C 上, 与 $C_{\mathrm{In}}\cap C_{C_{\mathrm{Out}}}=C$ 矛盾.

反之, 用反证法. 由引理 5.2.1, 可以设 $G^*\backslash C^*$ 是连通的, 则在 $G^*\backslash C^*$ 中有一条路 $P^*(v_1^*,v_2^*)$, 使得 $V(f(v_1^*))\cap V_{\mathcal{L}}\neq\varnothing$ 和 $V(f(v_2^*))\cap V_{\mathcal{R}}\neq\varnothing$. 记

$$H=\bigcup_{v^*\in P^*}f(v^*)\subseteq G.$$

设 $P = v_1v_2\cdots v_l$ 是 H 中连 $V_{\mathcal{L}}$ 和 $V_{\mathcal{R}}$ 的最短路, 往证 P 与 C 没有公共节点. 否则, 设 v_{i+1} 是第一个与 C 公共的节点. 由 P 的最短性, v_i 不在 $V_{\mathcal{R}}$ 中. 设 $v_{i+1},\cdots,v_{j-1}(i+2\leqslant j<l)$ 在 C 上, 但 v_j 不在 C 上, 由 $E_{\mathcal{L}}$ 的定义, $(v_{j-1},v_j)\in E_{\mathcal{L}}$, 从而 $v_j\in V_{\mathcal{L}}$, 与 P 的最短性矛盾. 然而, 由 P 与 C 无公共节点, 必有 $V_{\mathcal{L}}\cap V_{\mathcal{R}}\neq\varnothing$. 又与 C 具有 3 曲线性矛盾. ♮

定理 5.2.3 (第三 Jordan 定理) 令 $G=(V,E)$ 是一个图, $\Sigma=(G;F)$ 为它的一个可定向的准基形, 则 G 具有 3 曲线性当且仅当 G 是可平面的.

证 由定理 5.2.2 和引理 5.2.2, 充分性显然. 下面证必要性. 用反证法. 假设 G 不是可平面的. 由引理 3.2.6,

$$\text{Im }\partial_2\subseteq\text{ Ker }\partial_1=\mathcal{C},$$

即 G 的循环空间. 由定理 4.2.5, Im ∂_2 ⊂Ker ∂_1, 从而存在一个圈 $C\in\mathcal{C}\setminus\text{Im }\partial_2$ 不具有 2 曲线性, 而且还有 $V_{\mathcal{L}}\neq\varnothing$ 和 $V_{\mathcal{R}}\neq\varnothing$. 因为若不然, 可设 $V_{\mathcal{L}}=\varnothing$. 令 $D=\{f|\exists e\in E_{\mathcal{L}},e\in f\}\subset F$. 由于 $V_{\mathcal{L}}=\varnothing$, 任何 $f\in D$ 均只含有 C 的边和 C 的弦, 则必有

$$C=\sum_{f\in D}\partial_2 f.$$

这就与 $C\notin\text{Im }\partial_2$ 矛盾, 从而由引理 5.2.2 可知 C 不具有 3 曲线性, 又与前提条件矛盾. ♮

5.3 唯 一 性

设 $\Sigma=(G;F)$ 为 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入. 若在 Σ 中存在一个面, 具有如下形式:

$$f=Aa^{\alpha}b^{\beta}Bc^{\delta}d^{\lambda},\tag{5.3.1}$$

使得 $\Sigma\setminus\{f\}$ 可划分为两部分 $\{f_1^{(1)},\cdots,f_s^{(1)}\}$ 和 $\{f_1^{(2)},\cdots,f_t^{(2)}\}$ 且

$$\begin{cases}\Sigma_1=\left(b^{\beta}Bc^{\delta},f_1^{(1)},\cdots,f_s^{(1)}\right),\\ \Sigma_2=\left(d^{\lambda}Aa^{\alpha},f_1^{(2)},\cdots,f_t^{(2)}\right)\end{cases}\tag{5.3.2}$$

为两个多面形 (当然, 平面的), 则称 Σ 是**平面地 1 可分离的**. 明显地, 若 Σ 是平面地 1 可分离的, 则 G 是可分离的. 因为这时, $G=G_1\dot{+}G_2$, 即 $G=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=\{v\}(v\in V)$, 其中 G_1 和 G_2 分别为多面形 Σ_1 和 Σ_2 的基准图.

定理 5.3.1 令 G 为一个可分离的平面图, 即 $G=G_1\dot{+}G_2$, 其中 G_1 和 G_2 均为不可分离的, 并且均至少有两条边. 设 Σ_1 和 Σ_2 分别为 G_1 和 G_2 的平面嵌入,

则 G 至少有 $2(\rho_v(G_1)\rho_v(G_2))$ 个不等价 (但注意这里将一个嵌入与其镜像视为等价!) 的平面嵌入, 使得它们均可平面地 1 分离为 Σ_1 和 Σ_2, 其中, $\rho_v(G_1)$ 和 $\rho_v(G_2)$ 分别为公共节点 v 在 G_1 和 G_2 中的次.

证 设 $E_v(G_1)=\{a_1,a_2,\cdots,a_{\rho_1}\}$, $E_v(G_2)=\{b_1,b_2,\cdots,b_{\rho_2}\}$, $\rho_1=\rho_v(G_1)$, $\rho_2=\rho_v(G_2)$. 令

$$\begin{cases}\mathcal{A}_1=\{A_ia_i^{-1}a_{i+1}|i=1,2,\cdots,\rho_1,a_{\rho_1+1}=a_1\},\\ \mathcal{A}_2=\{B_jb_j^{-1}b_{j+1}|j=1,2,\cdots,\rho_2,b_{\rho_2+1}=b_1\}\end{cases}$$

分别为 Σ_1 和 Σ_2 中与 v 关联的面的集合, 则可以按如下方式由 Σ_1 和 Σ_2 得到 G 的 $\rho_1\rho_2$ 个平面嵌入: 对于 $1\leqslant i\leqslant\rho_1$, $1\leqslant j\leqslant\rho_2$,

$$\begin{cases}\Sigma_{(i,j)}=(A_ia_i^{-1}b_jB_j^{-1}b_{j+1}a_{i+1},\Sigma_1\langle i\rangle,\Sigma_2\langle j\rangle),\\ \Sigma_{(i,j)}=(A_ia_i^{-1}b_{j+1}B_jb_j^{-1}a_{i+1},\Sigma_1\langle i\rangle,\Sigma_2\langle j\rangle),\end{cases}\tag{5.3.3}$$

其中 $\Sigma_1\langle i\rangle$, $\Sigma_2\langle j\rangle$ 分别为除 $A_ia_i^{-1}a_{i+1}$ 外 Σ_1 的所有面和除 $B_jb_j^{-1}b_{j+1}$ 外 Σ_2 的所有的面. 由于在 Σ 中有一个面是与 v 关联的, 并且是由 Σ_1 在 $\mathcal{A}_1$ 中, 或者在

$$\mathcal{A}_1^{-1}=\{a_{i-1}^{-1}a_iA_i^{-1}|i=1,2,\cdots,\rho_1,a_{\rho_1+1}=a_1\}$$

中的一个面同 Σ_2 在 $\mathcal{A}_2$ 中的一个面合成的. 容易由多面形等价的定义看出, Σ 的这 $2\rho_1\rho_2$ 个嵌入为所有可能的以这种方式由 Σ_1 和 Σ_2 形成的嵌入. 至此, 只要证明对于任何 $(i_1,j_1)\neq(i_2,j_2)$, 总有 $\Sigma_{(i_1,j_1)}\not\simeq\Sigma_{(i_2,j_2)}$ 就够了. 事实上, $\Sigma_{(i_1,j_1)}$ 与 $\Sigma_{(i_2,j_2)}$ 除一个面外所有的面均相同. 然而, 由于 G_1 和 G_2 的不可分离性及至少有两条边可知 $\Sigma_{(i_1,j_1)}$ 和 $\Sigma_{(i_2,j_2)}$ 这一个例外面 $f_{(i_1,j_1)}$ 和 $f_{(i_2,j_2)}$ 间非初等等价, 即

$$\begin{aligned}f_{i_1,j_1}&=A_{i_1}a_{i_1}^{-1}b_{j_1+1}B_{j_1}b_{j_1}^{-1}a_{i_1+1}\\ \not\sim_{\mathrm{el}}f_{i_2,j_2}&=A_{i_2}a_{i_2}^{-1}b_{j_2+1}B_{j_2}b_{j_2}^{-1}a_{i_2+1},\end{aligned}$$

从而定理得证. ♮

若在一个平面的多面形 $\Sigma=(G;F),G=(V,E)$ 中有两个面 $f_1,f_2\in F$,

$$\begin{cases}f_1=A_1a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}B_1c_1^{\delta_1}d_1^{\lambda_1},\\ f_2=A_2a_2^{\alpha_2}b_2^{\beta_2}B_2c_2^{\delta_2}d_2^{\lambda_2},\end{cases}$$

使得 $\Sigma\langle f_1,f_2\rangle=\Sigma\backslash\{f_1,f_2\}$ 可以划分为两个部分 $\Sigma_1\langle f_1,f_2\rangle$ 和 $\Sigma_2\langle f_1,f_2\rangle$, 并且

$$\begin{cases}\Sigma_1=(A_1a_1^{\alpha_1}b_2^{\beta_2}B_2c_2^{\delta_2}d_1^{\lambda_1},\Sigma_1\langle f_1,f_2\rangle),\\ \Sigma_2=(A_2a_2^{\alpha_2}b_1^{\beta_1}B_1c_1^{\delta_1}d_2^{\lambda_2},\Sigma_2\langle f_1,f_2\rangle)\end{cases}\tag{5.3.4}$$

皆至少具有两条边的多面形 (当然, 平面的), 则称 Σ 为 **2可分离的**. 面对 $\{f_1,f_2\}$ 称为 Σ 的**分离对**, 而且根据第 2 章中多面形的定义, 在 Σ 的对偶多面形 Σ^* 中也

有两个面 $f_1^*, f_2^* \in F$,

$$\begin{cases} f_1^* = A_1^* a_1^{-\alpha_1} b_1^{\beta_1} B_1^* c_1^{-\delta_1} d_1^{\lambda_1}, \\ f_2^* = A_2^* a_2^{-\alpha_2} b_2^{\beta_2} B_2^* c_2^{-\delta_2} d_2^{\lambda_2}, \end{cases}$$

它们在 Σ 中的相应节点为 v_1 和 v_2. 因为 Σ 的基准图 G 去掉 v_1 和 v_2 后变为不连通的, 也称 G 是 2**可分离的**. 节点对 $\{v_1, v_2\}$ 也称为图 G 的**分离对**. 自然, 一个可分离的图也可称为 1**可分离的**. 若一个图没有分离对, 则称它为 3**连通的**. 3 连通图的平面多面形被称为 c网.

定理 5.3.2 一个不可分离的平面图 G 是 3 连通的当且仅当它的平面对偶是 3 连通的.

证 由推论 4.2.2 和上面的讨论可知, 一个不可分离平面图是 2 可分离的当且仅当它的平面对偶是 2 可分离的, 从而由 3 连通性的定义即得定理结论. ♮

容易看出, 若一个平面图是 2 可分离的, 则它可以有两个不等价的平面嵌入. 事实上, 由 (5.3.4) 式可得

$$\Sigma' = (f_1', f_2', \Sigma\langle f_1, f_2\rangle), \tag{5.3.5}$$

其中 $f_1' = B_1 c_1^{\delta_1} c_2^{-\delta_2} B_2^{-1} b_2^{-\beta_2} b_1^{\beta_1}$, $f_2' = A_2 a_2^{\alpha_2} a_1^{-\alpha_1} A_1^{-1} d_1^{-\lambda_1} d_2^{\lambda_2}$. 两个多面形 Σ 和 Σ' 均以 G 为基准图且均为平面的, 但它们是不等价的. 若 G 的所有的平面嵌入皆等价, 则称 G 有唯一的平面嵌入, 或简称为具有**唯一性**.

定理 5.3.3 一个不可分离平面图 G, 其节点的次和圈的长度均不小于 3, 具有唯一性当且仅当 G 是 3 连通的.

证 由上所述, 任何 2 可分离平面图, 在所要求的条件下, 具有至少两个不等价的平面嵌入, 定理的必要性显然.

反之, 若 G 在定理条件下是 3 连通的, 但 G 至少有两个不等价的平面嵌入 $\Sigma_1 = \Sigma_1(G; F_1)$ 和 $\Sigma_2 = \Sigma_2(G; F_2)$, 则必存在 Σ_1 上的一个面 $f_1 \in F_1$, 使得 $\partial_2 f_1$ 不是 Σ_2 中的任何一个面的边界. 由于 G 是不可分离的, $\partial_2 f_1$ 本身就只能是一个圈 C. 由 Jordan 定理, F_2 中的面被划分为两个部分 $F_2^{(1)}$ 和 $F_2^{(2)}$, 使得 G_1 和 G_2 分别为多面形 $\Sigma_2^{(1)}(G_1; F_2^{(1)} + \{C\})$ 和 $\Sigma_2^{(2)}(G_2; F_2^{(2)} + \{C\})$ 的基准图, 并且

$$G_1 \bigcup G_2 = G, \quad G_1 \bigcap G_2 = C. \tag{5.3.6}$$

然而, $C = \partial_2 f_1$ 在 Σ_1 上, 故 G_1 和 G_2 在 f_1 的同一侧. 这就意味着在 Σ_1 中还有一个面 $f \neq f_1$, 使得 $\{f_1, f\}$ 形成一个分离对, 从而由平面性, G 是 2 可分离的. 与 G 的 3 连通性矛盾. 充分性得证. ♮

对于可平面图 $G = (V, E)$, 令 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 是它的一个平面嵌入. 若 G 有一个分离对 $\{u, v\}(u, v \in V)$, 则 Σ 有一个分离对 $\{f_1, f_2\}(f_1, f_2 \in F)$ 与 $\{u, v\}$ 相应. 如 (5.3.4) 式所示的变换 Σ 成为 $\Sigma_1 = \Sigma(G_1; F_1)$ 和 $\Sigma_2 = \Sigma(G_2; F_2)$ 的运算称为**劈分**

G 为 G_1 和 G_2, 而 G_1 和 G_2 则被称为 G 的劈块. 若 G_1 为 G 的一个劈块, 而且在 G_1 中不再有分离对, 则称 G_1 为基本劈块. 注意, 若 $\{u,v\}$ 为 G 的一个分离对且 $(u,v)\in E$, 则 e 本身就是 G 的一个劈块, 而且还是基本劈块. 容易看出, 如果收缩所有那些两端属于不同分离对而且本身又不是劈块的边, 则所得图 (可能出现重边) 的基本劈块是唯一确定的. 记这样由 G 得到的图为 $\tilde{G}$, 并称它为 G 的基本核. 容易证明任何不可分离的可平面图具有唯一的基本核, 并且其基本劈块的数目与它的基本核的基本劈块数目相同. 图 G 的非单边组成的基本劈块的数目用 $\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)$ 表示. 一个劈对 $\{u,v\}$, 若 $G=G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2=\{u,v\}$, 但 $\{u,v\}$ 既不是 G_1 的分离对, 也不是 G_2 的分离对, 则称它为简单的. 若 G 的所有分离对皆为简单的, 则称 G 为简单 2 可分离的.

若将 $\tilde{G}$ 中的所有基本劈块作为节点, 两个节点相邻当且仅当它们相应的基本劈块, 在 $\tilde{G}$ 中有公共的分离对, 则这样得到的图被称为 $\tilde{G}$ 的劈块图, 用 $\mathrm{Bl}(\tilde{G})$ 表示. 可以证明若 G 是简单 2 可分离的, 则 $\mathrm{Bl}(\tilde{G})$ 是一个森.

定理 5.3.4 一个不可分离的可平面图 G 简单 2 可分离并且所有节点的次和所有的圈长皆不小于 3, 具有 $2^{\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)-1}$ 个不同构的平面嵌入.

证 对于 $\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)$ 用数学归纳法. 若 G 没有分离对, 也就是 G 为 3 连通的, 则 $\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)=1$. 由定理 5.3.3 可知定理为真. 一般地, 由于 $\mathrm{Bl}(\tilde{G})$ 是一个森, G 有一个基本劈块 G_1 只关联一个分离对, 即它相应 $\mathrm{Bl}(\tilde{G})$ 中的一个显节点或孤立点. 设 $G=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=\{u,v\}$. 由归纳假设, G_2 有 $2^{\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)-2}$ 个不同构的平面嵌入, 理由是 $\alpha_{\mathrm{Bl}}(G_2)=\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)-1$. 由于对 G_2 的每一个嵌入, 通过把 G_1 添到其上两个对于与 G_2 的公共劈对互为反射的位置, 可得 G 的两个不同构的平面嵌入, 从而 G 有 $2\cdot 2^{\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)-2}=2^{\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)-1}$ 个不同构的平面嵌入, 即得定理结论. ▯

当然, 若 G 不是简单 2 可分离的, 则由于一个关联 s_i 个基本劈块的劈对 $\{u_i,v_i\}$ 可产生 $(s_i-1)!$ 个不同构的平面嵌入. 由定理 5.3.4 可知 G 的不同构的平面嵌入的总数应为

$$2^{\alpha_{\mathrm{Bl}}(G)-1}\prod_{i\geqslant 1}((s_i-1)!)^{l_i},$$

其中 l_i 为关联 s_i 个基本劈块的劈对的数目.

5.4 凸 表 示

令 $\Sigma=(G;F)$ 是一个平面多面形, 其基准图为 $G=(V,E)$ 和 F 为面的集合. 这里所关心的问题是如何将 Σ 在平面上表示, 或者说, 将 Σ 划在平面上, 使得 Σ 的节点用平面上的点表示, 边用一条曲线或直线段表示, 并且没有任何两条线段在某

个内点处交叉, 或者说, 共点. 特别地, 要考虑每一线段为直线段的情形. 这时, 称之为 G 的**直线嵌入**.

因为只讨论 G 无环且无重边, 它的任何平面多面形 (若有的话) 必既无 1 次的也无 2 次的面. 当然, 这些对于关心的问题确非本质, 即允许只讨论所有的面的次皆不小于 3 的情形.

若一个直线嵌入的所有节点均在平面的整点, 或者说, 方格点 (即它的两个坐标均为整数) 上, 则称之为一个**方格点嵌入**.

引理 5.4.1　如果一个图有一个方格点嵌入, 则它必有这样的一个方格点嵌入, 使得每一个面和每一条边均有一个内点为整点, 即方格点.

证　设 G 有一个方格点嵌入 $G(\Sigma)$. 若其上有一个面 f (或者一条边 e) 无内点为方格点. 令 d_f (或 d_e) 为 f (或 e) 边界上两节点之间的最短距离 (或长度), 则将欧氏平面上的格进行细分, 使得相邻的两个方格点之间的距离小于 $d_f/2$ (或 $d_e/2$), 即可得嵌入 $G(\Sigma)$ 具有引理所要求的性质. ♮

引理 5.4.2　任何可平面图 G 均有一个方格点嵌入.

证　因为任何一个多面形的基准图均为同阶三角剖分的基准图的子图, 可以只讨论三角剖分. 对于 G 的阶用归纳法. 当 G 较小时, 不管怎样选择无限面, 均易验证. 一般地, 设 v 是一个次不超过 5 的节点 (推论 5.1.1), 只需讨论 $\rho(v) = 3, 4, 5$ 三种情形. 因为无限面可选任一面, 总可约定 v 在无限面的边界上.

当 $\rho(v) = 3$ 时, 令 $G' = G - v$. 由于 G' 仍为三角剖分的基准图, 从归纳假设可知 G' 有一个方格点嵌入 $\Sigma(G', F\langle v\rangle)$, 使三个与 v 相邻的节点 v_1, v_2 和 v_3 全在无限面边界上, 其中 $F\langle v\rangle$ 为由所有不与 v 关联的面和一个新面组成. 这个新面为 $\Sigma(G - v, F\langle v\rangle)$ 的无限面. 自然, v_1, v_2 和 v_3 在它的边界上. 设 v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3 中最长的为 v_2v_3, 并且在水平直线上. 由于 v_2v_3 的长度大于 1, 必有一个内点为方格点 p. 这样总可以取 v 为从 p 过 v_1 的射线上的一个方格点 (若不存在, 可通过细分使得其上出现方格点, 或者取一个方格点与它充分接近). 在 $\Sigma(G', F\langle v\rangle)$ 的无限面内, 连直线段 $vv_i (i = 1, 2, 3)$, 即得方格点嵌入 $\Sigma(G, F)$.

当 $\rho(v) = 4$ 时, 令 $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为与 v 相邻的节点. 由于三角剖分的约定, 必有圈 $v_1v_2v_3v_4v_1v_1$ 在 $G - v$ 中. 这时, 令 G' 为在 $G - v$ 中连边 (v_1, v_3) 所得到的图. 由归纳假设, G' 有一个方格点嵌入 $\Sigma(G', F\langle v\rangle)$. 它的无限面边界为 $v_1v_4v_3v_1$. 设直线 v_1v_2 与线段 v_4v_3 有一个公共点 p, 为方便起见, 不妨设 v_3v_4 为水平的. 由引理 5.4.1, 令 q 为 p 和 v_4 之间的一个方格点. 这样总可以取沿线 qv_1 从 v_1 开始的射线上, 或充分接近此射线的一个方格点为 v, 使得在 $\Sigma(G', F\langle v\rangle)$ 上去掉边 v_1v_3, 然后再连接线段 $vv_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为 G 的一个方格点嵌入.

当 $\rho(v) = 5$ 时, 与 $\rho(v) = 4$ 的情形类似, 也可以导出 G 的一个方格点嵌入. ♮

对于 G 的一个平面嵌入 $G(\Sigma)$, 若有 G 的一个方格点嵌入与 $G(\Sigma)$ 相同, 并且

它们的无限面限定相对应, 则称 $G(\Sigma)$ 为*方格点共存的*.

定理 5.4.1 任何一个图的平面嵌入均为方格点共存的.

证 同样地允许只讨论三角剖分的情形. 对图 G 的阶用归纳法. 当阶小时, 易验证. 一般地, 由推论 5.1.1, 只需考虑存在一节点 v, $\rho(v)=3$, 4, 5 三种情况.

当 $\rho(v)=3$ 时. 若 v 在 $G(\Sigma)$ 的无限的边界上, 由引理 5.4.2 可知定理为真. 否则, v 为 $G(\Sigma)$ 在无限面边界内部区域的一个节点. 记 $V_v=\{v_1,v_2,v_3\}$, 则三角形面 $v_1v_2v_3$ 在 $G'=G-v$ 的方格点嵌入的内部, 即有限面. 由归纳法假设, G' 的这种嵌入存在. 这样总可在面 $v_1v_2v_3$ 的内部取一点作为 v, 然后连线段 $vv_i(i=1,2,3)$ 求得 G 的一个方格点嵌入, 并且保持无限面相应.

当 $\rho(v)=4$ 时. 与 $\rho(v)=3$ 时情形类似, 只不过这时的 G' 为在 $G-v$ 上添一条连 v_1 和 v_3 (或 v_2 和 v_4) 的边, 其中 $V_v=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

当 $\rho(v)=5$ 时. 由引理 5.4.2 也只需讨论 v 在 $G(\Sigma)$ 的无限面边界内部区域. 令 $V_v=\{v_i|\ i=1,2,\cdots,5\}$. 若 G' 为在 $G(\Sigma)$ 中去掉节点 v 和与它关联的边, 然后添上代表两边 (v_1,v_3) 和 (v_1,v_4) 的线段 v_1v_3 和 v_1v_4 所得到的嵌入. 由归纳法假设, G' 有一个方格点嵌入, 并且保持无限面相应. 由引理 5.4.1, 总可以令在这个嵌入中存在一个充分接近 v_1 的方格点 p 在三角形 $v_1v_3v_4$ 的内部, 使得直线段 $pv_i(i=1,2,\cdots,5)$ 均落在五边形 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 的内部. 由此, 只要取 $v=p$, 并将 G' 的这个嵌入中的边 v_1v_3 和 v_1v_4 去掉, 然后添上线段 $vv_i(i=1,\cdots,5)$, 即得 G 的一个方格点嵌入与 $G(\Sigma)$ 相同, 并且保持无限面对应. ♮

一个多边形, 如果与它共面的任何一条直线同其内部的公共部分均不会有两个或更多的连通片, 而且至少其中有一个为有限的线段, 则称它对内为*凸的*. 由这个定义可知一个多边形是凸的当且仅当在平面上的补是凸的, 即对外是凸的. 一个图的平面嵌入 (如果存在), 如果所有它的面全是凸多边形, 则称它为*凸嵌入*. 若一个凸嵌入的所有节点均为平面上的方格点, 则称它为*方格点凸嵌入*. 对于一个平面嵌入的一个面, 如果有 G 的一个方格点凸嵌入与这个平面嵌入相同, 并且使此面为无限面, 则此面被称为*方格点凸可扩张*的. 一个方格点凸嵌入的一个有限面 f, 若存在 f(或者无限面 f_0, 当 f adj f_0 时) 的内部区域中的方格点 p, 使得每一条从 p 穿过 f 边界上顶点的射线与 f 的相邻面 (除 f_0 外) 的内部区域无公共点, 则称 f 具有*强凸性*. 从几何上说, 总能使一个方格点凸嵌入带一个面具有强凸性.

引理 5.4.3 图 G 的平面嵌入的一个面 f 是方格点凸可扩张的当且仅当不在 f 边界上的任何一个节点 v 都有三条由 v 到 f 边界上三个不同节点的路, 使得其中任何两条路除 v 外无其他公共节点.

证 对 G 的阶用归纳法证明充分性. 由于 G 的嵌入中的节点和面的次均不小于 3, 最小阶的图为 K_4, 它的平面嵌入为正四面体. 对于它, 易见引理成立. 一般地, 由推论 5.1.1, 只需讨论三种情形, 而且可以不失一般性地假定 f 为无限面.

情形 1　存在 $v \in V, \rho(v)=3$. 设 $V_v=\{v_1,v_2,v_3\}$, 令

$$\begin{aligned}G' &= G-v+\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3)\}\\ &= (V-v, E(G-v)\bigcup\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3)\}).\end{aligned}$$

如果 $v \in \partial_2 f$ (或者说, v 与 $\partial_2 f$ 关联), 令 $v_2 \notin \partial_2 f$. 容易验证, G' 对于面 f (当 $v \notin \partial_2 f$ 时) 或 f' (当 $v \in \partial_2 f$ 时), 其中

$$\partial_2 f' = \partial_2 f - \{(v,v_1),(v,v_3)\} + \{(v_1,v_2),(v_2,v_3)\}$$

仍然满足引理条件. 由归纳假设, G' 有一个方格点凸嵌入 $G'(\Sigma)$. 当 $v \in \partial_2 f$ 时, 设 v 是一个方格点 (引理 5.4.1), 并且在由线 v_1v_3 以及它在 $\partial_2 f'$ 上的前后相继两边所在的直线形成的三角形中. 否则, 即 $v \notin \partial_2 f$. 令 v 为三角形面 $v_1v_2v_3$ 的内部区域中的一个方格点 (同样地, 由引理 5.4.1). 在 $G'(\Sigma)$ 上连线段 $(v,v_1),(v,v_2)$ 和 (v,v_3) 即可得 G 的一个方格点凸嵌入, 并保持 f 为无限面.

情形 2　设 $v \in V, \rho(v)=4$. 由情形 1, 这时 G 的节点的次均不小于 4. 设 $V_v=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. 同样地, 记 $G'=G-v+\{(v_1,v_2),\ (v_2,v_3),\ (v_3,v_4),\ (v_1,v_4)\}$. 由于 G' 对于 f (若 $v \notin \partial_2 f$, 至多适当地添加一边 (v_1,v_4) 或 (v_2,v_3)) 或者 f' (若 $v \in \partial_2 f$), 使得 $\partial_2 f' = \partial_2 f + e_1 + e_2 + e_3$ (在向量的运算下, 或者是集合的对称差) 仍满足引理的条件, 其中, $e_1=(v,v_1), e_2=(v,v_4)\in E$, $e_3=(v_1,v_4)\notin \partial_2 f$. 由归纳假设, G' 有一个方格点凸嵌入, 从而考虑到可使四边形面 $v_1v_2v_3v_4$ (当 $v \in \partial_2 f$ 时) 或那个与 (v_2,v_3) 关联的有限面 (否则, 即当 $v \in \partial_2 f$ 时) 具有强凸性, 用与情形 1 类似的方法, 总能得到 G 的一个方格点凸嵌入且保持 f 为无限面.

情形 3　存在 $v \in V, \rho(v)=5$. 由上面两种情形可知这时 G 的所有节点的次均不小于 5. 同样地, 可通过 $G'=G-v+\{(v_i,v_{i+1})|\ i=1,2,\cdots,5,\ v_6=v_1\}$ 至多适当地添加一条或两条边而得到所要求的 G 的方格点凸嵌入, 其中 $V_v=\{v_i|\ i=1,\cdots,5\}$ 依 v 处旋的次序.

反之, 由图 5.4.1(a) 所示的典型结构, 必要性是显然的. 在那里, f_1 和 f_2 不满足引理条件, 均不可能作为 G 的凸嵌入的无限面. ♮

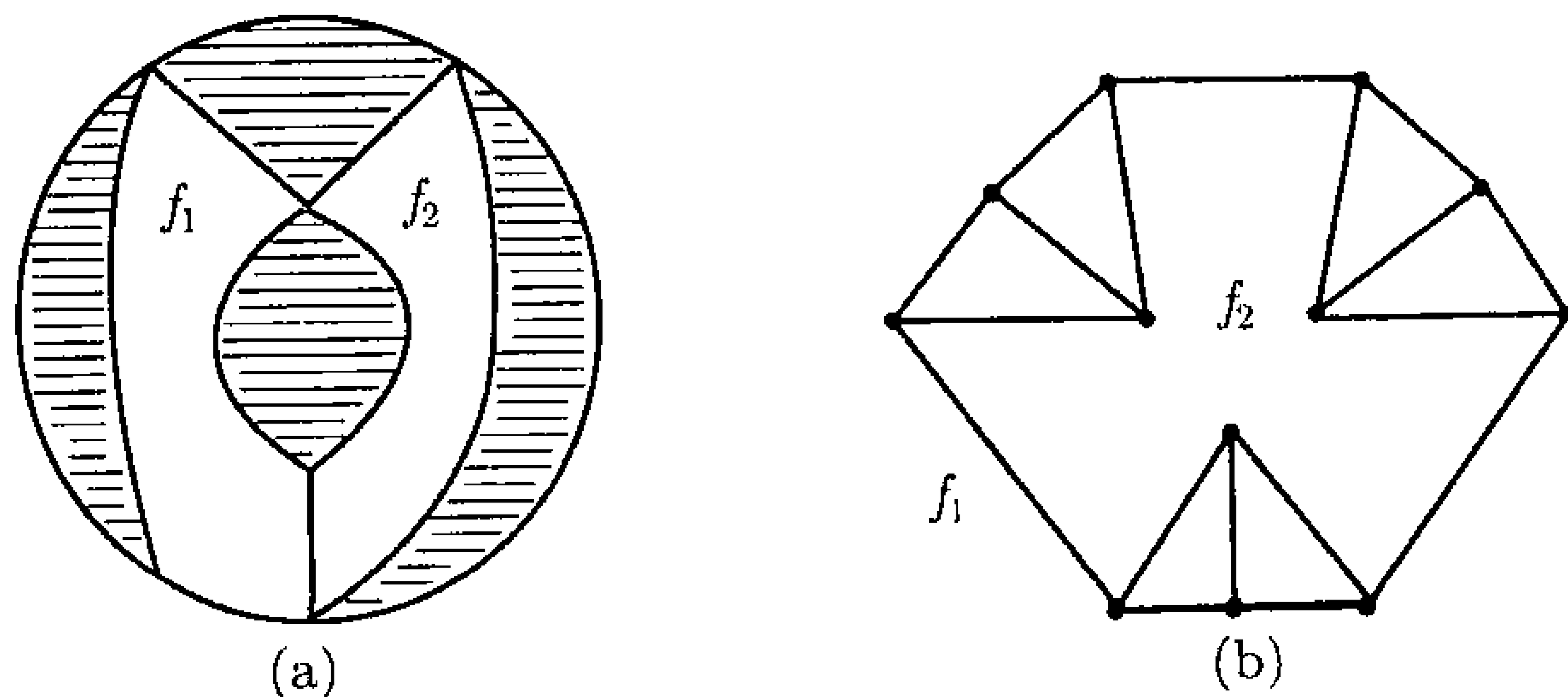


图 5.4.1

若 G 的一个平面嵌入的任何一个面皆为方格点凸可扩张的, 则这个嵌入被称为*全方格点凸可扩张的*. 图 5.4.1 (b) 显示了图 G 的一个平面嵌入. 它对于面 f_1 和 f_2 是凸可扩张的, 但它本身不是全凸可扩张的. 如果一个图 G 有一个平面嵌入是全方格点凸可扩张的, 则称 G 本身为*全方格点凸*的.

定理 5.4.2　一个可平面图 G 是全方格点凸的当且仅当 G 没有节点的分离对.

证　因为 G 的任何平面嵌入的所有节点和面的次均不小于 3, 由引理 5.4.3, 必要性是显然的.

对于充分性, 由定理 5.3.3, 只讨论 G 的一个平面嵌入就够了. 因为 G 没有节点的分离对. 对于任一面 f, 任何一个不与 f 关联的节点 v 均有三条到 f 边界上两两除 v 外无公共节点的路 (否则, 必会出现如图 5.4.1 (a) 所示的结构), 故由引理 5.3.3 可知 f 为方格点凸可扩张的. 由选择 f 的任意性即得 G 是全方格点凸的. ◻

在这里, 所有定理的证明全是存在性的而未触到算法的设计. 关于它们的算法, 可以借助确向树的方法予以实现.

5.5 注　记

(1) 对于平面 (或球面)、 多面形的 Euler 公式, 在构造各种类型具有某种对称性的多面形中, 如文献 (Coxeter, H.S.M.[1]), 以及在平面的各种砌合中, 如文献 (Grunbaum, B.-G.C. Shephard[1]) 是一种很有效的工具. 然而, 对于一般曲面, 这种问题似乎是从 20 世纪 80 年代初才开始引起注意, 参见文献 (Liu, Y.P.[20, 21]).

(2) 自 1979 年以来, 就开始了对于 Jordan 曲线定理的一些组合形式的研究, 参见文献 (Tutte, W.T.[19], Vince, A.-C. H. C. Little[1]). 在文献 (Tutte, W.T.[19]) 中还提供了一种一般组合地图的理论.

(3) 一个平面图的直线表示是在文献 (Fary, I.[1]) 中首先提出并解决的. 当然, 定理 5.4.1 为 Fary 结果的某种强化形式. 其算法方面, 20 世纪 40 年代后, 在文献 (Fraysseix, H.-J. Pach-R. Pollack[1]) 中才开始讨论.

(4) 可平面图的凸表示是由 Tutte 首先提出并解决的, 参见文献 (Tutte, W. T.[15]). 接着, 在文献 (Tutte, W.T.[8])中, 还给出了求一个图的凸嵌入的实现方法. 他用一组线性方程的解, 同时确定出凸嵌入的节点在平面上的坐标, 并称这种嵌入为*重心的*. 虽然他没有提到如定理 5.4.2 中的方格点情形, 依引理 5.4.1 或者通过细分, 将有理坐标转变为整坐标, 其节点总可以安排到方格点上. 一些最优化问题将在第 15 章中讨论.

(5) 事实上, 可以在节点处引进正权, 在无限面边界给定为凸多边形的条件之下, 求一个凸嵌入, 使得在考虑到权的方式下, 边长总和为最小. 详细情形也将在第 15 章中讨论.

第6章　平　面　性

6.1　浸　　入

图 $G=(V,E)$ 在平面上, 或等价地, 在球面 P_0 上的一个浸入, 也记为 $\mu(G)$, 就作为一个映射 $\mu: G\to P_0$, 使得 $\mu(v)(v\in V)$ 是一个点, $\mu(e)$ 是一个连接 $\mu(u)$ 和 $\mu(v)$ 的 Jordan 曲线段, 即它拓扑等价于一个直线段, $e=(u,v)\in E$, 并且具有如下性质:

浸入性 1　$\mu_V: V\to P_0$ 是一个单射.

浸入性 2　$\forall e:(u,w)\in E, \neg v\in V(v\neq u, v\neq w), \mu(v)\in\mu(e)$.

从几何的角度来看, 可以只讨论简单交叉, 并且对任何 $a,b\in E$, $\mu(a)$ 与 $\mu(b)$ 只在有限个点处交叉. 所谓**简单交叉**是指 $\mu(a)$ 和 $\mu(b)$ 的一个公共点, 使沿 $\mu(a)$ (或 $\mu(b)$) 过此点时, 对任意的一个小邻域, 两侧均含有 $\mu(b)$(或 $\mu(a)$) 上的点. 对于任何两边 $\alpha,\beta\in E$, α 不与 β 相邻, 记为 $\alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta$, 定义

$$I_\mu(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & |\mu(\alpha)\bigcap\mu(\beta)|=1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\tag{6.1.1}$$

并称它为对于浸入 μ, 边 α 和 β 的**交叉指标**.

对于 $a,b\in E$, a adj b, 由 Jordan 定理可以看出 $\mu(a)$ 和 $\mu(b)$ 之间的交叉是非本质的, 即总可以移走. 这就允许只研究 $\mu(\alpha)$ 和 $\mu(\beta)$ 之间的交叉, 其中, $\alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta$, $\alpha,\beta\in E$. 令

$$\begin{cases}\mathcal{D}=\{(\alpha,\beta)|\forall\alpha,\beta\in E,\alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta\},\\ \mathcal{N}=\{(a,b)|\forall a,b\in E,a\ \mathrm{adj}\ b\}.\end{cases}$$

对于两个浸入 μ_1 和 μ_2, 定义

$$\mu_2\ \sim_{\mathrm{im}}\mu_2\Leftrightarrow\forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{D},I_{\mu_1}(\alpha,\beta)=I_{\mu_2}(\alpha,\beta).\tag{6.1.2}$$

当然, 由关系性 1、关系性 $\tilde{2}$ 和关系性 3 可以检验, $\sim_{\mathrm{im}}$ 确为所有浸入的集合上的一个等价. 以后总是不加区别浸入和它所在的 $\sim_{\mathrm{im}}$ 之下的等价类.

定理 6.1.1　一个连通图 G 的一个浸入确定一个平面嵌入当且仅当

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{D},\quad I_\mu(\alpha,\beta)=0.\tag{6.1.3}$$

证　由于 G 的任何一个平面嵌入, 或者说一个映射 μ, 使得浸入性 1 和浸入性 2 满足, 必要性是显然的.

反之, 对于任何一个浸入 $\mu(G)$ 满足 (6.1.3) 式, 由 5.2 节中的 Jordan 定理, 对任何 $\alpha, \beta \in E$, $\alpha\ \overline{\text{adj}}\ \beta$, 均可使 $\mu(\alpha)$ 和 $\mu(\beta)$ 无任何公共点, 当然更不会交叉. 因为这时 $\mu(G)$ 对于平面的补的连通片确定了一个平面多面形的面, 它的基准图为 G, 从而 $\mu(G)$ 为 G 的一个平面嵌入. ♮

令 $\mathcal{I}$ 为 G 的所有浸入形成的集合. 为了弄清图的浸入与嵌入的关系, 将 G 处理为一个系统

$$\Pi = \Pi(G) = ([\alpha, \beta], [v, a], [u, v] | \forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta, a \in E),$$

其中 $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$, $[v, a] = [a, v]$, $[u, v] = [v, u]$ 分别称为 2 胞腔、1 胞腔、0 胞腔, 并且引进二元域 GF(2) 上的空间

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \langle [\alpha, \beta] | \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \rangle, \\
\mathcal{L}_1 &= \langle [v, e] | \forall v \in V, \forall e \in E, v\ \overline{\text{ind}}\ e \rangle, \\
\mathcal{L}_0 &= \langle [u, v] | \forall u, v \in V, u\ \overline{\text{adj}}\ v \rangle,
\end{aligned}$$

分别称 $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_0$ 为 2空间、1空间和 0空间, 它们中的向量分别称为 2向量、1向量 和 0向量. 对于 G 的一个浸入 $\mu \in \mathcal{I}$, 令

$$\psi = \psi_\mu = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}} I_\mu(\alpha, \beta)[\alpha, \beta]. \tag{6.1.4}$$

由此可见, ψ 是 $\mathcal{L}_2$ 中的一个向量. 与第 4 章类似地, 还可以引进边缘映射 $\partial_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1} (i = 2, 1, 0)$, 并规定 $\mathcal{L}_{-1} = 0$, 使得它为由在空间的基上按如下方式所定义的延拓到整个空间, 即

$$\begin{cases}
\partial_2([\alpha, \beta]) = [u(\alpha), \beta] + [v(\alpha), \beta] + [\alpha, u(\beta)] + [\alpha, v(\beta)], \\
\partial_1([v, \beta]) = [v, u(\beta)] + [v, v(\beta)], \\
\partial_0([u, v]) = 0,
\end{cases} \tag{6.1.5}$$

其中 $u(e)$, $v(e)$ 表示 $e \in E$ 的两个端点, $e = \alpha$ 或 β. 对偶地, 上边缘映射 $\delta_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i+1} (i = 0, 1, 2)$, 并且规定 $\mathcal{L}_3 = 0$ 为由如下在基上定义的到整个空间上的延拓, 即

$$\begin{cases}
\delta_0([u, v]) = \sum\limits_{e \in E_u} [e, v] + \sum\limits_{e \in E_v} [u, e], \\
\delta_1([v, a]) = \sum\limits_{e \in E_v} [e, a], \\
\delta_2([\alpha, \beta]) = 0.
\end{cases} \tag{6.1.6}$$

为了便于处理, 还要先规定如下的关系:

$$\begin{cases} \forall a,b\in E, [a,b]=0, & (a,b)\notin \mathcal{D}, \\ \forall v\in V, a\in E, [v,a]=0, & v \text{ ind } a, \\ \forall u,v\in V,\ [u,v]=0, & u\text{adj } v\text{或 } u=v. \end{cases} \tag{6.1.7}$$

令 $\Omega=\{(a,b)|\forall a,b\in E\}$. 如果定义

$$\begin{aligned}\sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega} A(\alpha,\beta)[\alpha,\beta] &= \sum_{\alpha\in E}\Big[\alpha, \sum_{\beta\in E} A(\alpha,\beta)\beta\Big] \\ &= \sum_{\beta\in E}\Big[\sum_{\alpha\in E} A(\alpha,\beta)\alpha, \beta\Big],\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

则注意到第 4 章中空间 $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 间的边缘映射和上边缘映射, 就有 $\forall u,v\in V$, $\alpha,\beta,a\in E$,

$$\begin{cases} \partial_2([\alpha,\beta])=[\partial_1\alpha,\beta]+[\alpha,\partial_1\beta], \\ \partial_1([v,a])=[v,\partial_1 a], \\ \partial_0([u,v])=0 \end{cases} \tag{6.1.9}$$

和 $\forall u,v\in V$, $\alpha,\beta,a\in E$,

$$\begin{cases} \delta_0([u,v])=[\delta_0 u,v]+[u,\delta_0 v], \\ \delta_1([v,a])=[\delta_0 v,a], \\ \delta_2([\alpha,\beta])=0. \end{cases} \tag{6.1.10}$$

同样也可以看出 $\partial_i\in \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_{i-1})$, $\delta_i\in \mathrm{Hom}\ (\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_{i+1})(i=0,1,2)$. 换言之, 有形式

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{L}_2 & \xrightarrow{\delta_2} 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \xleftarrow{\partial_0} & \mathcal{L}_0 & \xleftarrow{\partial_1} & \mathcal{L}_1 & \xleftarrow{\partial_2} & \mathcal{L}_2 & \end{array}$$

为可交换的, 其中 $\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_i(\Pi,\mathrm{GF}(2))\ (i=0,1,2)$.

至此, 再回到图的浸入. 由于 $\mathrm{Ker}\ \delta_2=\mathcal{L}_2$, 自然 $\mathcal{L}_2$ 本身就是 Π 的 2上循环空间. 因为任何一个浸入皆为 2 向量, 在 G 中的任一浸入皆为 2 上循环. 这里也称 $\mathcal{L}_2$ 的子空间 $\mathrm{Im}\ \delta_1$ 为 Π 的 2上边缘空间.

定理 6.1.2 若 G 是可平面的, 则对任何 $0\neq[a,v]\in\mathcal{L}_1$, $a\in E$, $v\in V$, 在 Π 上有一个浸入 μ, 使得 $\psi_\mu=\delta_1([a,v])$.

证 由于 G 是可平面的, G 有一个浸入 μ 是平面嵌入, 特别是具有如下条件: $\forall(\alpha,\beta)\in\Omega$, $I_\mu(\alpha,\beta)=0$. 往证对于任何 $[a,v]$, 存在一个浸入 μ_1, 使得 $\psi_{\mu_1}=$

$\delta_1([v,a])$. 事实上, 在由 μ 所确定的平面多面形上, 由 G 的连通性, 存在一个面的序列 $f_1, f_2, \cdots, f_s$, 使得 f_1 ind v, f_s ind $a(s>0)$, 并且 f_i 和 f_{i+1} 的边界上至少有一个公共节点. 由此总可以求得一条曲线 $P(a)$ 连接 a 的两个端点, 使得

$$P(a)\bigcap\mu(b) = \begin{cases} 0 \pmod 2, & b \notin E_v, \\ 1 \pmod 2, & b \in E_v, \end{cases}$$

如图 6.1.1 所示. 这就使得可以造出浸入 μ_1, 使得

$$\mu_1(b) = \begin{cases} \mu(b), & b \neq a, \\ P(a), & b = a. \end{cases}$$

容易验证 $\psi_{\mu_1} = [a, E_v] = [a, \delta_0 v] = \delta_1[a, v]$, 从而定理得证. ♮

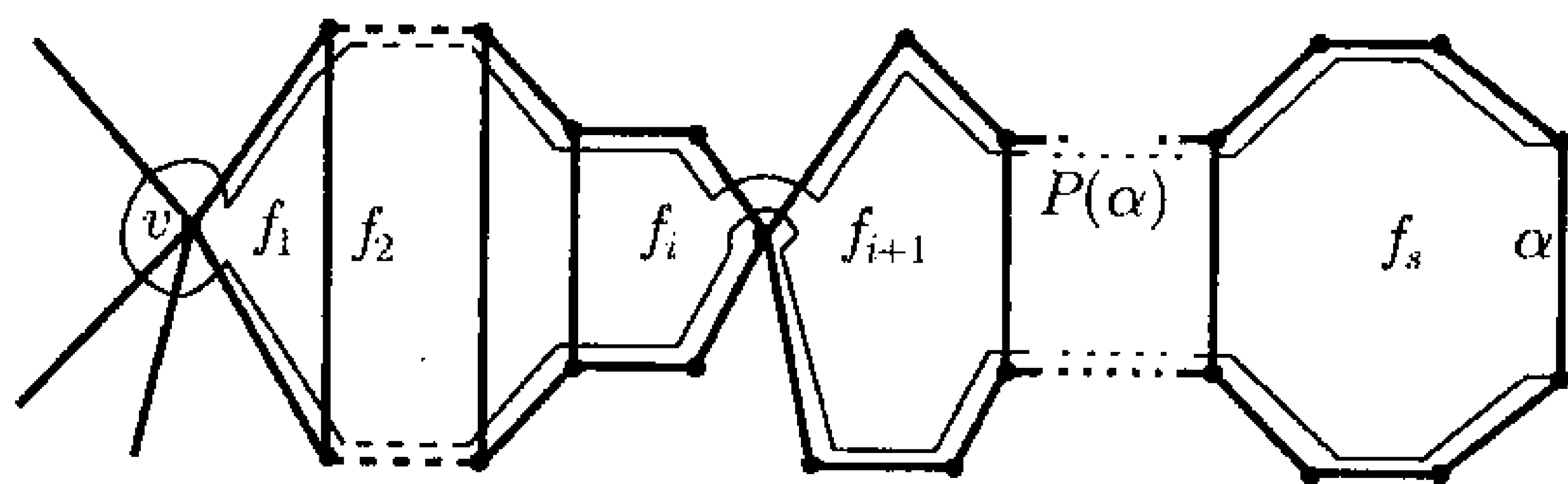


图 6.1.1

实际上, 若 G 是可平面的, 则由它的浸入所确定的所有 2 向量恰与 Π 上的 2 上边缘空间一致. 然而, 若 G 是非可平面的, 则对任何 $[a,v] \in \mathcal{L}_1$, 没有一个浸入 μ, 使得 $\psi_\mu = \delta_1([a,v])$. 这些将会从下一节的讨论中看到.

6.2 吴 (文俊)-Tutte 定理

令 $\mathcal{B}_2 = \mathrm{Im}\,\delta_1$ 为 $\Pi(G)$ 的 2 上边缘空间, $\tilde{\mathcal{H}}_{[2]} = \tilde{\mathcal{H}}_{[2]}(\Pi, \mathrm{GF}(2)) = \mathrm{Ker}\,\delta_2/\mathrm{Im}\,\delta_1 = \mathcal{L}_2/\mathcal{B}_2$ 被称为 $\Pi(G)$ 的 2上同调空间, 进而, 令

$$\Psi = \Psi(G) = \{\psi_\mu | \forall \mu \in \mathcal{I}\}. \tag{6.2.1}$$

在一个浸入 $\mu \in \mathcal{I}$ 上定义一个所谓*初等算子*, 记为 $\pi_{(r,v)}$. 定义如下: 对于 $\gamma \in E$, $v \in V$, $\gamma\ \overline{\mathrm{ind}}\ v$,

$$\pi_{(\gamma,v)}\mu = \begin{cases} \mu(e), & e \neq \gamma, \\ \varphi(\gamma, v), & \text{否则}, \end{cases} \tag{6.2.2}$$

其中 $\varphi(\gamma,v)$ 是一段连接 γ 的两端点的 Jordan 曲线段, 使得在闭 Jordan 曲线 $\mu(\gamma)\cup\varphi(\gamma,v)$ 的内部区域只含 v 一个节点. 自然, $\mu_1 = \pi_{(\gamma,v)}\mu \in \mathcal{I}$, 并且由 Jordan 定理

容易看出

$$I_{\mu_1}(\gamma, a) = \begin{cases} I_\mu(\gamma, a), & a \notin E_v, \\ I_\mu(\gamma, a) + 1, & a \in E_v. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

引理 6.2.1 $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{I}(\mu_1 \not\sim_{\text{im}} \mu_2), \exists (\gamma_i, v_i)(\gamma_i \in E, v \in V, \gamma_i \,\overline{\text{ind}}\, v_i, 1 \leqslant i \leqslant s, s > 1)$, 使得

$$\mu_1 \sim_{\text{im}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi(\gamma_i, v_i)\mu_2, \tag{6.2.4}$$

其中对任何 $\mu \in \mathcal{I}$,

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi_{(\gamma_i, v_i)}\mu = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s-1} \pi_{(\gamma_i, v_i)}(\pi_{(\gamma_s, v_s)}\mu).$$

证 对任何 $a \in E$, 令 $n_{\mu_1,\mu_2}(a)$ 为 Jordan 闭曲线 $\mu_1(a) \cup \mu_2(a)$ 的内部区域中节点的数目, 并且令

$$n_{\mu_1,\mu_2} = \sum_{a \in E} n_{\mu_1,\mu_2}(a).$$

对 $n = n_{\mu_1,\mu_2}$ 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 设 $\gamma \in E$, 使得 v 是在 $\mu_1(\gamma) \cup \mu_2(\gamma)$ 内部区域中的那个节点, 则由 (6.2.3) 式可知

$$\mu_1 \sim_{\text{im}} \pi_{(\gamma,v)}\mu_2.$$

一般地, 设 $\gamma \in E$ 且在 $\mu_1(\gamma) \cup \mu_2(\gamma)$ 的内部有一个节点 v. 可以求得 $\mu_3 = \pi_{(\gamma,v)}\mu_2$, 则由 Jordan 定理,

$$n_{\mu_1,\mu_3}(\gamma) = n_{\mu_1,\mu_2}(\gamma) - 1.$$

然而, 对任何 $\beta \neq \gamma$, $\beta \in E$ 均有 $n_{\mu_1,\mu_3}(\beta) = n_{\mu_1,\mu_2}(\beta)$, 从而 $n_{\mu_1,\mu_3} = n - 1$. 由归纳假设, 存在 $\gamma_i \in E$, $v_i \in V$ $(\gamma_i \,\overline{\text{ind}}\, v_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $l > 1)$, 使得

$$\begin{aligned} \mu_1 &\sim_{\text{im}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant l} \pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu_3 \sim_{\text{im}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant l} \pi_{(\gamma_i,v_i)}(\pi_{(\gamma,v)}\mu_2) \\ &= \prod_{1 \leqslant i \leqslant l+1} \pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu_2, \end{aligned}$$

其中 $\gamma_{l+1} = \gamma$, $v_{l+1} = v$, 从而 (6.2.4) 式成立.

引理 6.2.2 $\Psi \in \tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$.

证 首先, 证明对于任何 $\psi_1 = \psi_{\mu_1}, \psi_2 = \psi_{\mu_2} \in \Psi(\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{I})$ 有 $\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{B}_2$. 事实上, 由 (5.2.3) 式可知对任何 $[v, \gamma] \in \mathcal{L}_1(v \in V, \gamma \in E, v \,\overline{\text{ind}}\, \gamma)$ 有

$$\psi_{\pi_{(\gamma,v)}\mu_2} = \psi_{\mu_2} + \delta_1([v, \gamma]).$$

由引理 6.2.1 可得

$$\mu_1 \sim_{\rm im} \prod_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu_2,$$

从而有

$$\psi_1+\psi_2=\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\delta_1([\gamma_i,v_i])\in\mathcal{B}_2. \tag{6.2.5}$$

或者直接证明对任何 $\psi\in\mathcal{L}_2$, 若存在 $\psi_1\in\varPsi$, 使得 $\psi+\psi_1\in\mathcal{B}_2$, 则 $\psi\in\varPsi$. 由于 $\mathcal{B}_2$ 在集合

$$B_0=\{\delta_1([\gamma,v])|\forall[\gamma,v]\in\mathcal{L}_1\}$$

中有一组基, 从 $\psi+\psi_1\in\mathcal{B}_2$ 可知存在 $[\gamma_i,v_i](1\leqslant i\leqslant k,\ k>1)$, 使得

$$\psi+\psi_1=\sum_{i=1}^{k}\delta_1([\gamma_i,v_i]),$$

从而有

$$\mu\sim_{\rm im}\prod_{1\leqslant i\leqslant k}\pi_{(\gamma_i v_i)}\mu_1,$$

使得 $\psi=\psi_\mu$. 由此即得 $\psi\in\varPsi$. 由 (1.4.2) 式即得引理结论. ♮

定理 6.2.1 一个连通图 G 是可平面的当且仅当 $\varPsi=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$.

证 由 G 的平面性, G 有一个平面嵌入 $\mu\in\mathcal{L}$, $\psi_\mu=0\in\mathcal{B}_2$. 由引理 6.2.2 可知 $\varPsi=\mathcal{B}_2$, 即 $\varPsi=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$. 必要性得证.

反之, 由 $\varPsi=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$ 可知 $\varPsi=\mathcal{B}_2$. 因为 $\psi_\mu=0\in\mathcal{B}_2$, 则必有一个平面嵌入 $\mu\in\mathcal{I}$. 这样就得到了定理的充分性. ♮

定理 6.2.1 使得可以引进变量

$$x_{b,v}=x_{v,b}\in{\rm GF}(2), \tag{6.2.6}$$

其中, $b\in E$, $v\in V$ 是任意的. 对于 G 的任一浸入, 可以建立模 2 方程组, 对任何 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$,

$$\sum x_{b,v}=I_\mu(\alpha,\beta)\ ({\rm mod}\ 2), \tag{6.2.7}$$

其中求和是对于所有的 (b,v), 使得 $b=\alpha$, $\beta\in E_v$, 或 $b=\beta$, $\alpha\in E_v$.

引理 6.2.3 对于图 G, 若存在浸入 $\mu_0\in\mathcal{I}$, 使得方程 (6.2.7) 有解, 则对任何 $\mu\in\mathcal{I}$, 方程均有解.

证　设对于 μ_0, 方程 (6.2.7) 的解为 $x_{b,v}^{(0)}$, 则

$$
\begin{aligned}
\psi_{\mu_0} &= \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} I_{\mu_0}(\alpha,\beta)[\alpha,\beta] = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} \Big(\sum_{b\in E, v\in V} x_{b,v}^{(0)}\Big)[\alpha,\beta] \\
&= \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} \Big(\sum_{\beta\in E_v} x_{\alpha,v}^{(0)} + \sum_{\alpha\in E_v} x_{\beta,v}^{(0)}\Big)[\alpha,\beta] \\
&= \sum_{v\in V}\Big(\sum_{\alpha\in E} x_{\alpha,v}^{(0)}[\alpha,\delta_0 v] + \sum_{\beta\in E} x_{\beta,v}^{(0)}[\delta_0 v,\beta]\Big) \quad (\text{由 (6.1.7) 式}) \\
&= \sum_{v\in V}\Big(\sum_{\alpha\in E} x_{\alpha,v}^{(0)}\delta_1([\alpha,v]) + \sum_{\beta\in E} x_{\beta,v}^{(0)}\delta_1([v,\beta])\Big) \quad (\text{由 (6.1.10) 式}) \\
&\in \operatorname{Im}\delta_1 = \mathcal{B}_2,
\end{aligned}
$$

从而由引理 6.2.2 可知 $\varPsi = \mathcal{B}_2$. 也就是说, 对于任何 $\mu \in \mathcal{I}$, $\psi_\mu \in \mathcal{B}_2$. 由此可见, 对任何 $\mu \in \mathcal{I}$, 方程 (6.2.7) 均有解. ♮

定理 6.2.2　一个连通图 G 是可平面的当且仅当对于它的一个浸入 μ 方程 (6.2.7) 式有解.

证　由于 G 是可平面的, G 有一个浸入 $\mu_0 \in \mathcal{I}$ 是平面嵌入. 然而, 对于平面嵌入 μ_0, $\forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 有 $I_{\mu_0}(\alpha,\beta)=0$; 从而方程 (6.2.7) 式有一组解 $x_{b,v}=0(b\in E, v\in V)$. 由引理 6.2.3 可知方程 (6.2.7) 对 μ 也有一个解. 这就得到了必要性.

反之, 由引理 6.2.3 可知 $\varPsi = \mathcal{B}_2 = 0 \in \tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$. 由定理 6.2.1 即得充分性. ♮

虽然, 在方程 (6.2.7) 中, 方程与变量的数目过多, 不过定理 6.2.2 有这样一个很重要的好处, 使得可以适当地选择 G 的浸入, 以便减少变量和方程的数量. 设 T 为图 G 上的一个树. 若 G 的一个浸入 μ, 具有下面的性质, 则称它为 G 的一个 T浸入.

浸入性 3　在 T 上, 任何两边均不交叉.

浸入性 4　任何相邻的两边 (不仅 T 上的) 均不交叉.

浸入性 5　树 T 上的任何边均不与其他任何边交叉.

由 Jordan 定理显见, 对任意一个树 T 在一个连通图上, 这样的 T 浸入总是存在的.

引理 6.2.4　对于图 G 上的一个给定的树 T, 令 T^* 为由 T 所确定的上树, 则

$$\{[C_a^*, C_b^*] | \forall a,b\in T\} \bigcup \{[C_a^*,\alpha] | \forall a\in T, \forall\alpha\in T^*\} \tag{6.2.8}$$

包含空间 $\mathcal{B}_2$ 的一组基.

证 由引理 4.1.1 和 (4.3.1) 式知 $\forall a \in T$,

$$\delta_1([v,a]) = \left[\sum_{e \in E_v \bigcap T} C_e^*, C_a^* + \sum_{e \in C_a^* \bigcap T^*} e\right], \tag{6.2.9}$$

这样就有

$$\delta_1([v,\alpha]) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{e \in E_v \bigcap T} [C_e^*, \alpha], & \alpha \in T^*, \\ \displaystyle\sum_{e \in E_v \bigcap T} [(C_e^*, C_a^*] + \sum_{e \in E_v \bigcap T} \sum_{\alpha \in C_a^* \bigcap T^*} [C_e^*, \alpha], & a \in T. \end{cases}$$

因为 $\mathcal{B}_2$ 有一个基由 $\delta_1([v,a])([v,a] \in \mathcal{L}_1)$ 中的一部分组成, 从而引理成立. $\natural$

定理 6.2.3 一个连通图 G 是可平面的当且仅当对于一个 T 浸入 μ, 方程组

$$\sum_{\substack{a \in C_\alpha, b \in C_\beta \\ (a,b) \in \mathcal{N} \\ a,b \in T}} x_{a,b} + \sum_{\substack{b \in C_\beta \\ (b,\alpha) \in \mathcal{N} \\ b \in T}} x_{b,\alpha} + \sum_{\substack{a \in C_\alpha \\ (a,\beta) \in \mathcal{N} \\ a \in T}} x_{a,\beta} = I_\mu(\alpha,\beta) \tag{6.2.10}$$

对于所有 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}(\alpha,\beta \in T^*)$ 有一组解.

证 由定理 6.2.1 和引理 6.2.4, G 是可平面的当且仅当对一个浸入 μ, 存在 $x_{a,b} \in \mathrm{GF}(2)$, $y_{a,\gamma} \in \mathrm{GF}(2)(a,b \in T,\ \gamma \in T^*)$, 使得

$$\psi_\mu = \sum_{a,b \in T} x_{a,b}[C_a^*, C_b^*] + \sum_{a \in T, \gamma \in T^*} y_{a,\gamma}[C_a^*, \gamma], \tag{6.2.11}$$

而且由引理 3.1.3 和引理 3.1.4 可知 $\forall a,b \in T$, $\forall \alpha,\beta,\gamma \in T^*$,

$$\begin{cases} ([\alpha,\beta],[C_a^*, C_b^*]) = 1 \Leftrightarrow (a \in C_\alpha) \wedge (b \in C_\beta), \\ ([\alpha,\beta],[C_a^*, \gamma]) = 1 \Leftrightarrow (\gamma = \alpha, a \in C_\beta) \vee (\gamma = \beta, a \in C_\alpha). \end{cases} \tag{6.2.12}$$

由 (6.2.11) 式和 (6.2.12) 式, G 是可平面的当且仅当如下的方程组:

$$I_\mu(\alpha,\beta) = \sum_{a \in C_\alpha, b \in C_\beta} x_{a,b} + \sum_{b \in C_\beta} y_{b,\alpha} + \sum_{a \in C_\alpha} y_{a,\beta}$$

对于所有 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$ 有解.

因为 μ 是一个 T 浸入, 则有

$$\forall (a,b) \in \mathcal{D}(a,b \in T), \quad x_{a,b} = 0. \tag{6.2.13}$$

由引理 3.1.3 和引理 3.1.4 也可知 $\forall (t,\alpha) \in \mathcal{D}(t \in T, \alpha \in T^*)$,

$$([t,\alpha],[C_a^*, C_b^*]) = 1 \Leftrightarrow (t = a, b \in C_\alpha) \vee (t = b, a \in C_\alpha)$$

且由此可得

$$y_{t,\alpha} + \sum_{b \in C_\alpha} x_{t,b} = 0. \tag{6.2.14}$$

令 $x_{t,\alpha} = y_{t,\alpha} + \sum\limits_{b \in C_\alpha} x_{t,b}$ 为新的变量代替 $y_{t,\alpha}(t \in T,\ \alpha \in T^*)$, 则

$$\forall (t,\alpha) \in \mathcal{D}(t \in T, \alpha \in T^*), \quad x_{t,\alpha} = 0. \tag{6.2.15}$$

将 (6.2.14) 式 ~(6.2.16) 式代入 (6.2.13) 式可得 $\forall \alpha, \beta \in T^*$, $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} I_\mu(\alpha,\beta) = & \sum_{\substack{a \in C_\alpha, b \in C_\beta \\ (a,b) \in \mathcal{N} \\ a,b \in T}} x_{a,b} + \sum_{\substack{b \in C_\beta \\ (b,\alpha) \in \mathcal{N} \\ b \in T}} \left(x_{b,\alpha} + \sum_{\substack{a \in C_\alpha \\ a \in T}} x_{b,a} \right) \\ & + \sum_{\substack{a \in C_\alpha \\ (a,\beta) \in \mathcal{N} \\ a \in T}} \left(x_{a,\beta} + \sum_{\substack{b \in C_\beta \\ b \in T}} x_{a,b} \right) \\ = & \sum_{\substack{a \in C_\alpha, b \in C_\beta \\ (a,b) \in \mathcal{N} \\ a,b \in T}} x_{a,b} + \sum_{\substack{b \in C_\beta \\ (b,\alpha) \in \mathcal{N} \\ b \in T}} x_{b,\alpha} + \sum_{\substack{a \in C_\alpha \\ (a,\beta) \in \mathcal{N} \\ a \in T}} x_{a,\beta}. \end{aligned}$$

这就是 (6.2.10) 式, 从而定理得证. ♮

6.3　平面性辅助图

在这一节中, 引进一个给定图 G 的辅助图以判定 G 的平面性. 首先, 必须减少用以判定图的平面性的方程 (6.2.10) 式中变量的数目.

引理 6.3.1　在 (6.2.10) 式中每一个方程均有如下形式: 对任何 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}(\alpha,\beta \in T^*)$,

$$\sum_{(s,r,t)} (x_{s,t} + x_{sr} + x_{rt}) = I_\mu(\alpha,\beta). \tag{6.3.1}$$

证　若在 T 上选择一个节点作为根, 所有 T 的边皆可给以定向, 使得与从根出发沿 T 过此边时所走的方向一致. 与前面相同地, C_γ 为 $\gamma \notin T$ 与 T 所成的基本圈. 对于 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}(\alpha,\beta \notin T$, 即 $\alpha,\beta \in T^*)$, 只需讨论两种情形.

情形 1　$C_\alpha \cap C_\beta = P(u,v)$, 其中 $P(u,v)$ 为 T 上从 u 到 v 的一条路 (不一定是有向的). 这时, 方程 (6.2.10) 具有如下的形式:

$$I_\mu(\alpha,\beta) = \sum_u + \sum_v,$$

其中 $\sum_w (w=u$ 或 $v)$ 表示在 w 处对 $s,t,r \in (C_\alpha \cup C_\beta) \cap E_w$ 求和, 并且有

$$\sum_w = \begin{cases} x_{s,t}+x_{s,l}+x_{t,l}, r \in C_\alpha \bigcap C_\beta \text{且假定 } r=l, \\ (x_{s,t}+x_{r,s}+x_{r,t})+(x_{s,l}+x_{r,l}+x_{r,s}) \\ \qquad +(x_{t,l}+x_{r,t}+x_{r,l}), r \notin C_\alpha \bigcap C_\beta, \end{cases} \tag{6.3.2}$$

其中 r 为 T 上在 w 处指向 w 的边. 当然, 除根外在 T 上的任一节点均有且只有一条指向它的边.

情形 2 $C_\alpha \cap C_\beta = \{v\}$. 这时, 方程 (6.2.10) 具有如下形式:

$$I_\mu(\alpha,\beta) = \sum_v,$$

其中对于 $s,t \in C_\alpha \cap E_v$ 和 $p,q \in C_\beta \cap E_v$ 有

$$\sum_v = \begin{cases} (x_{s,p}+x_{s,t}+x_{p,t})+(x_{s,q}+x_{s,t}+x_{q,t}), \\ \qquad r \in C_\alpha \bigcup C_\beta \text{ 且设 } r=t, \\ (x_{t,p}+x_{t,r}+x_{p,r}) \\ \qquad +(x_{t,q}+x_{t,r}+x_{q,r}) \\ \qquad +(x_{s,p}+x_{s,r}+x_{p,r}) \\ \qquad +(x_{s,q}+x_{s,r}+x_{q,r}), \\ \qquad r \notin C_\alpha \bigcup C_\beta. \end{cases} \tag{6.3.3}$$

综上所述, 引理得证. ♮

定理 6.3.1 一个图 G (当然, 连通的) 是可平面的当且仅当对于 G 的一个 T 浸入, 方程组

$$\sum_{\substack{t \in C_\alpha, s \in C_\beta \\ (s,t) \in \mathcal{N} \\ s,t \neq r}} x_{t,s} = I_\mu(\alpha,\beta) \tag{6.3.4}$$

对所有 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$ 有解, 其中 r 为在 T 上指向 v 的边, $r,s,t \in E_v$, $v \in C_\alpha \cap C_\beta$.

证 根据引理 6.3.1, 允许引进变量代换

$$\tilde{x}_{s,t} = x_{r,s}+x_{r,t}+x_{s,t},$$

并且仍用变量 $x_{s,t}$ 代替 $\tilde{x}_{st}$ 即可将方程 (6.3.1) 转变为方程 (6.3.4). 由定理 6.2.3, 即得定理结论. ♮

至此, 也许有人会注意到在方程 (6.3.4) 中, 无论变量的数目还是方程的数目都比 (6.2.7) 式, 甚至 (6.2.10) 式少得多. 然而, 由于 (6.3.4) 式中的每一个方程都可能

会出现 6 个变量, 但不会更多, 只能用高斯消去法以有效地求解, 这时的计算复杂性为 $O(\nu^6)$, 其中 ν 为图的阶.

若 μ 为 G 的一个 T 浸入, 并且其中 T 为一个确向树, 则称为**确向浸入**. 此后, 凡提及图 G 的一个确向浸入, 均指图上的所有边已确定了方向. 这就是依 3.2 节中的确向过程所得到的, 使得所有基本圈皆有向圈.

引理 6.3.2　设 $T_{\rm od}$ 是 G 上的一个确向树. 令 C_α 为由上树边 α 与 $T_{\rm od}$ 所形成的基本圈(更确切地, 有向圈), 则对于 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}(\alpha,\beta\in T^*_{\rm od})$(自然, $T^*_{\rm od}$ 为 G 上与 $T_{\rm od}$ 相应的上树), 在 (6.3.4) 式中与 $C_\alpha\cup C_\beta$ 有关的恰有两个变量: 一个是由这样的两个相邻边形成的, 使得二者中至少有一个是树边, 并且它们全是离开公共端方向; 另一个则是对于端的方向不同, 离开的总是树边, 进入的总是上树边.

证　当然, 若 $C_\alpha\cap C_\beta=\varnothing$, 即无公共节点. 这时, 没有变量与 $C_\alpha\cup C_\beta$ 有关.

情形 1　$C_\alpha\cap C_\beta=\{v\}(v\in V)$. 由于 C_α 和 C_β 皆为有向圈, 从 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 可知 v 不可能为 $T_{\rm od}$ 的根 (没有树边指向根), 指向 v 的树边 r 必须在 C_α 或 C_β 上. 由 α 和 β 间的对称性可以假设 r 在 C_α 上而不失一般性. 在 C_α 上与 v 关联的另一条边, 记为 s(它可以是上树边), 而且在 C_β 上与 v 关联的发出的边为 t, 它只能是树边. 这样就只能有两个变量 $x_{s,t}$ 和 $x_{s,\beta}$ 在 (6.2.4) 式与 $C_\alpha\cup C_\beta$ 关联的方程中.

情形 2　$C_\alpha\cap C_\beta=P(u,v)$, 即 G 中从 u 到 v 的一条路. 由引理 3.1.3, $P(u,v)$ 必在 $T_{\rm od}$ 上. 在 $P(u,v)$ 上与 u 关联的那条树边用 l 表示, 其方向为从 u 发出. 因为 C_α 和 C_β 皆为有向圈, 在 C_α 和 C_β 上都有一条边指向 u. 由 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 和 α 与 β 之间的对称性, 可以假设 C_α 的那条指向 u 的边为树边. 这样, C_β 上那条指向 u 的边只能是上树边 β, 从而在 u 处只有一个变量 $x_{l,\beta}$. 用类似的理由, 只能 C_α 和 C_β 各有一边从 v 发出. 记 s,t 分别为 C_α,C_β 在 v 处的这样的边, 则 s 和 t 至少有一条边为树边, 从而在 v 处也只能有一个变量 $x_{s,t}$. 结果, 在 (6.2.4) 式与 $C_\alpha\cup C_\beta$ 关联的方程中, 只有变量 $x_{s,t}$ 和 $x_{l,\beta}$.

综上所述, 即得引理结论.　　　　ㄣ

根据引理 6.3.2, 可以称那些相应的两条相邻边均为离开公共端的变量为**树变量**, 常用 $x_{s,t}((s,t)\in\mathcal{N})$ 表示. 当然, 至少 s 和 t 中之一为树边. 那些相应的二邻边在公共端处具有不同方向的变量, 被称为**上树变量**. 常用 $y_{l,\gamma}(l\in T_{\rm od},\gamma\in T^*_{\rm od})$ 表示.

令 $\mathcal{X}_G(T)$ 和 $\mathcal{Y}_G(T^*)$ 分别为 G 上对于一个确向树 $T_{\rm od}$ 的所有树变量和上树变量的集合. 对于两个变量 $x_{s,t}\in\mathcal{X}_G(T)$ 和 $y_{l,\gamma}\in\mathcal{Y}_G(T^*)$, 若存在一个上树边对 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$, 使得 $x_{s,t}$ 和 $y_{l,\gamma}(\gamma=\alpha$ 或 $\beta)$ 恰为与 $C_\alpha\cup C_\beta$ 关联的一对, 由引理 6.3.2 所确定的变量, 则称它们为**合变量**, 并用 $x(T;\alpha,\beta)$ 和 $y(T;\alpha,\beta)$ 表示.

定理 6.3.2　对于 G 的 T 浸入 μ, 方程 (6.3.4) 有解当且仅当对于 G 的一个

确向浸入 μ_0, 方程

$$x(T;\alpha,\beta)+y(T^*;\alpha,\beta)=I_{\mu_0}(\alpha,\beta) \tag{6.3.5}$$

对所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}(\alpha,\beta\in T^*_{\rm od})$ 有解.

证 因为对于一个 T 浸入, 方程 (6.3.4) 有解, 由定理 6.3.1 可知方程 (6.3.1) 有解, 则由定理 6.2.3 有 $\psi_\mu\in\mathcal{B}_2$, 从而由引理 6.2.2 有 $\varPsi=\mathcal{B}_2$. 也就是说, 对于确向浸入 μ_0 也有 $\psi_{\mu_0}\in\mathcal{B}_2$.

由于对 μ_0, 方程 (6.2.10) 有解, 由定理 6.3.1 可得对 μ_0, 方程 (6.3.4) 有解, 从而由引理 6.3.2 得方程 (6.3.5) 有解.

反之, 由方程 (6.3.5) 对 μ_0 有解可知 $\psi_{\mu_0}\in\mathcal{B}_2$, 则用类似的方法可知方程 (6.3.4) 对于 T 浸入 $\mu\in\varPsi$ 有解. ◻

对于 G 的一个给定的确向浸入 μ_0, 可用方程 (6.3.5) 确定一个图, 记为 $\mathrm{Aux}_0(G)=(V^0_{\rm au},E^0_{\rm au})$, 或简记为 Aux_0, 并称它为 G 的**平面性 0 辅助图**, 其中

$$\begin{cases} V^0_{\rm au}=V^0_{\rm au}(G)=\{x|\forall x\in\mathcal{X}_G(T)\}+\{y|\forall y\in\mathcal{Y}_G(T^*)\}, \\ E^0_{\rm au}=E^0_{\rm au}(G)=\{(x,y)|\exists(\alpha,\beta)\in\mathcal{D} \\ \qquad\qquad (\alpha,\beta\in T^*_{\rm od})\ni(x=x(T;\alpha,\beta) \\ \qquad\qquad \wedge y=y(T^*;\alpha,\beta))\}, \end{cases} \tag{6.3.6}$$

而且 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的每一条边 e 都有一个权 $w(e)=I_{\mu_0}(\alpha,\beta)\in\mathrm{GF}(2)$. $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的任何一个子图的权定义为子图上所有边的权之和 (mod 2). 若权为 1, 则称之为**奇权的**; 否则, 称为**偶权的**.

引理 6.3.3 对于一个确向浸入 μ_0, 方程 (6.3.5) 有解当且仅当在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上无奇权圈.

证 利用 4.1 节所定义的在空间 $\mathcal{G}_1(\mathrm{Aux}_0)$ 上的 1 边缘映射 ∂_1, 方程 (6.3.5) 变为 $\forall e\in E^0_{\rm au}$,

$$\partial_1 e=w(e). \tag{6.3.7}$$

必要性. 若不然, 假设 C 是 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的一个奇权圈, 即

$$\sum_{e\in C}w(e)=1.$$

然而, 由方程 (6.3.7) 有

$$0=\sum_{e\in C}\partial_1 e=\sum_{e\in C}w(e)=1.$$

这就出现了矛盾.

充分性. 因为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上无奇权圈, 方程 (6.3.7) 与它的那些由 $e \in T(\mathrm{Aux}_0)$ 所确定的方程等价, 其中 $T(\mathrm{Aux}_0)$ 为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的一个树 (通常为森, 不失一般性, 可假定为树). 然而, 对于 $T(\mathrm{Aux}_0)$, 容易求得方程 (6.3.7) 的一组解.

事实上, 只要选择 $T(\mathrm{Aux}_0)$ 上的一节点为根, 将与它相应的变量置为 0 或 1, 这个解就是唯一确定的. ♮

定理 6.3.3　对于图 G 的一个确向浸入, 方程 (6.3.5) 有解当且仅当对 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的一个树(通常为森, 但总可设为树而不失一般性) $T(\mathrm{Aux}_0)$, 在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中无奇权的基本圈.

证　令 $\mathcal{C}(\mathrm{Aux}_0)$ 为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的循环空间. 容易证明 $\mathcal{C}(\mathrm{Aux}_0)$ 中所有偶权的循环形成 $\mathcal{C}(\mathrm{Aux}_0)$ 的一个子空间, 记为 $\mathcal{C}_0(\mathrm{Aux}_0)$, 而且它可由偶权圈所生成. 由引理 6.3.3 可知方程 (6.3.5) 有解当且仅当

$$\mathcal{C}(\mathrm{Aux}_0)/\mathcal{C}_0(\mathrm{Aux}_0) = 0,$$

或者说, $\mathcal{C}(\mathrm{Aux}_0) = \mathcal{C}_0(\mathrm{Aux}_0)$, 从而由定理 4.2.1, 即得定理结论. ♮

6.4 主 要 定 理

一个图 $G=(V,E)$, 它的边上赋有二元权 w, 即 GF(2) 中的元素. 如果存在对于 V 上的节点的标号 l: "+" 或 "−", 使得对任何 $e=(u,v)\in E$,

$$l(u)\begin{cases} = l(v), & w(e)=0, \\ \neq l(v), & w(e)=1, \end{cases} \tag{6.4.1}$$

则称 G 为平衡的.

引理 6.4.1　对于图 G 的一个确向浸入 μ_0, 其平面性 0 辅助图 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 是平衡的当且仅当在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中无奇权圈.

证　因为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 是平衡的, 于是可知 $\forall z \in V^0_{\mathrm{au}}$,

$$z=\begin{cases} 1, & l(z)=+, \\ 0, & l(z)=- \end{cases}$$

为方程 (6.3.7) 的一组解, 从而也是方程 (6.3.5) 的一组解. 由引理 6.3.3, 即得必要性.

反之, 由引理 6.3.3 知方程 (6.3.5) 有解, 从而方程 (6.3.7) 有解. 设 $\forall z \in V^0_{\mathrm{au}}$, $z=a$ 是方程 (6.3.7) 的一组解, 则 $\forall z \in V^0_{\mathrm{au}}$,

$$l(z)=\begin{cases} +, & a=0, \\ -, & a=1 \end{cases} \tag{6.4.2}$$

满足关系 (6.4.1). 也就是说, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 是平衡的. 充分性得证. ♮

引理 6.4.2 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 没有奇权圈当且仅当

$$U_1 = \{e|\forall e \in E_{\mathrm{au}}^0, w(e) = 1\}$$

为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个 1 上边缘(当然, 也是一个上循环).

证 由引理 6.4.1, V_{au}^0 可划分为如下两个部分:

$$V_{\mathrm{au}}^+ = \{z|\forall z \in V_{\mathrm{au}}^0, l(z) = +\},$$
$$V_{\mathrm{au}}^- = \{z|\forall z \in V_{\mathrm{au}}^0, l(z) = -\},$$

则 $\delta_0 V_{\mathrm{au}}^+ = \delta_0 V_{\mathrm{au}}^- = U_1$. 这就是必要性.

反之, 因为 U_1 是 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个 1 上边缘, 由引理 4.1.1 知任何一个圈都与 U_1 有偶数条边公共, 从而皆为偶权圈. 这就得到了充分性. ♮

定理 6.4.1 下面的说法是等价的:

(1) 图 G 是可平面的;

(2) 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 无奇权圈;

(3) 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 没有奇权的基本圈;

(4) 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的所有奇权边的集合形成一个 1 上边缘;

(5) 对于确向浸入 μ_0, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 是平衡的.

证 由定理 6.3.1, 定理 6.3.2 和引理 6.3.3 可知 (1) $\Leftrightarrow$ (2). 由引理 6.3.3 和定理 6.3.3 可得 (2) $\Leftrightarrow$ (3). 由引理 6.4.2 可知 (3) $\Leftrightarrow$ (4). 最后, 由引理 6.4.1, 引理 6.4.2 有 (4) $\Leftrightarrow$ (5). ♮

令 $E_1(X,Y)$ 和 $E_2(X)$ 是 GF(2) 上的两个方程组. 设 $\mathcal{E}_1(X,Y)$ 和 $\mathcal{E}_2(X)$ 分别为 $E_1(X,Y)$ 和 $E_2(X)$ 的所有解的集合. 记

$$\mathcal{E}_1(X,Y)/Y = \bigcup_Y \{X|\forall (X,Y) \in \mathcal{E}_1(X,Y)\}. \tag{6.4.3}$$

若 $\mathcal{E}_1(X,Y)/Y = \mathcal{E}_2(X)$, 则称 $E_1(X,Y)$ 和 $E_2(X)$ 是共容的.

引理 6.4.3 方程组 $E_1(X,Y;y) = \{x_i + y_i = w_i, i = 1,2,\cdots,n,\ x_j + y = c$, 对于某个固定的 j, $1 \leqslant j \leqslant n\}$ 和方程组 $E_2(X,Y) = \{x_i + y_i = w_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ 是共容的.

证 由于任何 $(X,Y;y) \in \mathcal{E}_1(X,Y,y)$ 均有 $(X,Y) \in \mathcal{E}_2(X,Y)$, 易见

$$\mathcal{E}_1(X,Y;y)/y \subseteq \mathcal{E}_2(X,Y),$$

而且对任何 $(X,Y)\in\mathcal{E}_2(X,Y)$ 有

$$(X,Y;x_j+c)\in\mathcal{E}_1(X,Y;y),$$

从而 $(X,Y)\in\mathcal{E}_1(X,Y;y)/y$, 故 $\mathcal{E}_2(X,Y)/y\subseteq\mathcal{E}_1(X,Y;y)/y$. ♮

引理 6.4.4　令 $\mathcal{D}_0=\{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}(\alpha,\beta\in T^*),\ C_\alpha\cap C_\beta=P(u,v),u\neq v\}$, 则方程 (6.3.5) 对所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 有解当且仅当它对所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}_0$ 有解.

证　因为对任何 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$, 所有那些含变量 $y=y(T^*;\alpha,\beta)$, 使得 $C_\alpha\cap C_\beta=\{v\}$ 的方程在 (6.3.5) 式中是相同的, 由引理 6.4.3 即得引理结论. ♮

引理 6.4.5　方程组 $E_1(Y;x)=\{x+y_i=w_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 和方程组 $E_2(Y)=\{y_i+y_{i+1}=w_i+w_{i+1},i=1,2,\cdots,n-1\}$ 是共容的.

证　因为 $E_1(Y;x)=\{y_1+x=w_1,\ y_i+y_{i+1}=w_i+w_{i+1},\ i=1,2,\cdots,n-1\}$, 由引理 6.4.3 即得引理结论. ♮

对于一个树变量 $x_{s,t}\in\mathcal{X}_G(T)$, 令 $y_{\gamma_1},\cdots,y_{\gamma_k}$ 是所有那些上树变量, 使得在 (6.3.5) 式中与 $x_{s,t}$ 形成合变量 (即在一个方程中), 其中 $\gamma_1=\gamma_1(x_{s,t}),\cdots,\gamma_k=\gamma_k(x_{x,t})$ $(k=k(x_{s,t}))$ 是依照从根始沿由 3.2 节中的确向过程所确定的出现次序, 并且若有两个或更多的关联于同一个节点 v, 则在 v 处依旋的次序规定指向 v 的树边为始点所确定的线性序.

引理 6.4.6　对于 G 的一个确向浸入 μ_0, 方程 (6.3.5) 是相容的当且仅当 $\forall x_{s,t}\in\mathcal{X}_G(T)$,

$$y_{\gamma_i}+y_{\gamma_{i+1}}=w_i+w_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,k-1,k=k(x_{s,t})\tag{6.4.4}$$

有解, 其中 w_i,w_{i+1} 分别为 (6.3.5) 式中以 $x_{x,t}$ 与 $y_{\gamma_i},y_{\gamma_{i+1}}$ 为合变量的方程的常数项.

证　利用引理 6.4.5 于每一个树变量, 由树变量的有限性即得引理结论. ♮

令 $(V,\preceq)$ 为在 G 上由一个确向树所定义的偏序集. 当然, 树的根为最小元. 对任一上树边 $\gamma=\langle u,v\rangle$, 令 $h(\gamma)=v$ 和 $t(\gamma)=u$, 它们分别称为 γ 的首和尾. 自然, 总有 $h(\gamma)\prec t(\gamma)$.

容易看出, 对任何 $u,v\in V$, $u\wedge v=\text{g.l.b.}(u,v)$ 是唯一确定的. 对任何 $\alpha,\beta\in T^*_{\text{od}}$, 令 $\langle\alpha,\beta\rangle=t(\alpha)\wedge t(\beta)$, 并令

$$V_\gamma=\{v|\forall v\in V,\ u_0(\gamma)\preceq v\},\tag{6.4.5}$$

其中 $u_0(\gamma)=\min\{u|\forall u\in V,\ \langle\alpha,\beta\rangle\prec u\preceq t(\gamma)\}$, $\gamma=\alpha$ 或 β.

给定 G 的一个确向浸入 μ_0, 设在 $v\in V$ 处的旋为 $\varrho_1(v)=(abc\cdots d)$, 其中 a 为那条指向 v 的树边. 然后, 定义 $a\cdots\prec b\cdot\prec c\cdot\prec\cdots\cdot\prec d$, 进而在所有上树边的集

合上, 定义一个偏序用 $*\prec$ 表示如下: $\forall\alpha,\beta\in T^*_{\mathrm{od}}$,

$$\alpha *\prec \beta \Leftrightarrow \begin{cases} h(\alpha)\prec h(\beta), & h(\alpha)\neq h(\beta), \\ \alpha\cdot\prec\beta, & h(\alpha)=h(\beta). \end{cases} \tag{6.4.6}$$

令 $\Lambda(\alpha,\beta)=\{\gamma|\forall\gamma\in T^*_{\mathrm{od}},\, t(\gamma)\in V_\alpha\cup V_\beta,\, h(\gamma)\prec\langle\alpha,\beta\rangle\}$, $\alpha,\beta\in T^*_{\mathrm{od}}$. 对于两个上树边 α,β(设 $\alpha*\prec\beta$, 不失一般性), 若

$$\neg\gamma\in\Lambda(\alpha,\beta),\quad \alpha *\prec \gamma *\prec \beta,$$

则称它们是**相继的**, 换句话说, α 在 $*\prec$ 之下被 β 覆盖.

若两个相继的上树变量 y_α 和 y_β, 使得 α 和 β 不是只能在树的同侧, 就是只能在异侧才能在确向嵌入中避免交叉, 则称它们是**相邻的**.

引理 6.4.7 对于 G 的一个确向浸入, 两个上树变量 y_α 和 y_β 是相邻的当且仅当 α 和 β 是相继的, 并且出现在如下所定义的类型 A~ 类型 C 之一当中:

类型 A $\exists\gamma\in T^*_{\mathrm{od}}$,

(1) $h(\gamma)\prec h(\alpha)\prec h(\beta)$;

(2) $h(\beta)\prec\langle t(\alpha),\Delta\rangle\prec\Delta=\langle t(\gamma),t(\beta)\rangle$.

类型 B $\exists\gamma,\delta\in T^*_{\mathrm{od}}$,

(1) $\max(h(\gamma),h(\delta))\prec h(\alpha)=h(\beta)$;

(2) $\langle t(\gamma),t(\alpha)\rangle=\Delta_1\succ\langle\Delta_1,\Delta_2\rangle\prec\Delta_2=\langle t(\delta),t(\beta)\rangle$.

类型 C $\exists\gamma\in T^*_{\mathrm{od}}$,

(1) $h(\gamma)\prec h(\alpha)\preceq h(\beta)$;

(2) $h(\beta)\prec\langle t(\gamma),\Delta\rangle\prec\Delta=\langle t(\alpha),t(\beta)\rangle$.

证 由确向树和确向浸入的性质, 以及导出方程 (6.4.4) 的过程, 通过遍数所有可能情形的讨论, 即可得引理结论, 其细节留给读者. ▯

一个图 G 的*左(或右)优先浸入* 就是这样的一个确向浸入, 使得对任何一个上树边 $\gamma=\langle u,v\rangle$, 若从 v 沿确向树 T_{od} 走向 u 时, 它落在左 (或右) 边. 一个左或右优先浸入也被称为 G 的*标准浸入*.

引理 6.4.8 令 $\mathcal{A}(G;T^*_{\mathrm{od}})$ 为所有对应相邻变量的两个上树边对的集合, 则对于这个确向浸入方程 (6.4.4) 有解当且仅当方程组

$$y_\alpha+y_\beta=\lambda(\alpha,\beta) \tag{6.4.7}$$

对所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(G:T^*_{\mathrm{od}})$ 有解, 其中

$$\lambda(\alpha,\beta)=\begin{cases} 1, & \alpha,\beta \text{ 同在类型 A 或类型 B 中}, \\ 0, & \alpha,\beta \text{ 同在类型 C 中}. \end{cases} \tag{6.4.8}$$

证　首先, 当确向浸入被标准浸入代替之后, 方程 (6.4.4) 变为方程 (6,4,7). 事实上, 从提取方程 (6.4.4) 的过程, 注意到标准浸入的性质, 即可得 (6.4.7) 式. 然后, 由于 (6.4.4) 式的相容性与确向浸入的选法无关, 即得引理结论. ♮

由引理 6.4.8, 又可以造一个图, 用 $\mathrm{Aux}_1(G)=(V_{\mathrm{au}}^1,E_{\mathrm{au}}^1)$ 表示, 并称之为 G 的一个平面性 1 辅助图, 其中

$$\begin{cases} V_{\mathrm{au}}^1=V_{\mathrm{au}}^1(G)=\{\gamma|\forall\gamma\in T_{\mathrm{od}}^*,\exists\alpha\in T_{\mathrm{od}}^*,(\gamma,\alpha)\in\mathcal{A}(G;T_{\mathrm{od}}^*)\}, \\ E_{\mathrm{au}}^1=E_{\mathrm{au}}^1(G)=\mathcal{A}(G;T_{\mathrm{od}}^*). \end{cases} \tag{6.4.9}$$

令 $\mathcal{A}_0(G;T_{\mathrm{od}}^*)=\{(\alpha,\beta)|\forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(G;T_{\mathrm{od}}^*),\lambda(\alpha,\beta)=0\}$, $\mathcal{A}_1(G;T_{\mathrm{od}}^*)=\mathcal{A}(G;T_{\mathrm{od}}^*)-\mathcal{A}_0(G;T_{\mathrm{od}}^*)=\{(\alpha,\beta)|\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(G;T_{\mathrm{od}}^*),\ \lambda(\alpha,\beta)=1\}$, 则有 $\forall e\in E_{\mathrm{au}}^1$,

$$\lambda(e)=\begin{cases} 1, & e\in\mathcal{A}_1(G;T_{\mathrm{od}}^*), \\ 0, & e\in\mathcal{A}_0(G;T_{\mathrm{od}}^*) \end{cases} \tag{6.4.10}$$

作为边上的权.

定理 6.4.2　下面的说法是等价的:

(1) 图 G 是可平面的;

(2) $\mathrm{Aux}_1(G)$ 没有奇权圈;

(3) $\mathrm{Aux}_1(G)$ 没有奇权的基本圈;

(4) $\mathcal{A}_1(G;T_{\mathrm{od}}^*)$ 形成 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 中的一个 1 上边缘;

(5) $\mathrm{Aux}_1(G)$ 是平衡的.

证　与定理 6.4.1 的证明方法类似. ♮

至此, 人们也许注意到了: $\mathrm{Aux}_1(G)$ 和 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的主要区别在于 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的阶的上界为 G 的阶的一个线性函数, 而 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的阶的之界则是一个二次函数.

6.5　注　　记

(1) 关于刻画一个图的平面性, 第一篇正式出版的文章当归于文献 (Kuratowski, K.[1]), 这是 1930 年的事. 几年之后, Whitney, H.[6,7]和接着 MacLane, S.[1,2] 也以他们各自的方法, 给出了图的平面性表征. 吴文俊发表他的定理是在 20 世纪 50 年代 (Wu, W.T.[1]), 其等价形式为定理 6.2.1. 不过, 他的主要目的在于讨论可剖形在欧氏空间实现的更一般的问题. Tutte 所提供的与定理 6.2.1 等价的形式是在 20 世纪 70 年代初 (Tutte, W.T.[16]). 他所用的实数域上的链群是于 20 世纪 50 年代, 由他本人引入图论的 (Tutte, W.T.[4]). 在文献 (Liu, Y.P.[22]) 中, 刘彦佩表明他们独立发现的貌似不同的结果, 实际上, 从 GF(2) 上空间的理论来看是同一的. 刘彦佩还

从布尔方程的角度独立地讨论了这个问题 (Liu, Y.P.[23~25]). 这些均可视为讨论与此有关课题的不同类型的理论基础.

(2) 从 20 世纪 60 年代初, Auslander 和 Parter 在文献 (Auslander, L.-S.V. Parter[1]) 中发表了他们的有关嵌入图到球面上的算法思想起, 出现了一大批有关算法的文章, 如文献 (Goldstein, A.J.[1], Fisher, G.M.[1], Fisher, G.J.-O. Wing[1], Demoucron, G.-Y. Malgrange-R. Pertuiset[1], Weinberg, L.[7], Lin, P.M.[1], Hotz, G.[1–2], Dambit, Ja.[1], Mondshein, L.[1], Hopcroft, J.-R. Tarjan[1,5], Deo, N.[1])等. 特别是 Hopcroft 和 Tarjan 给出了一个线性时间算法. Deo, N.[1] 改正了文献 (Hopcroft, J.-R. Tarjan[5]) 中的一些错误. 在这方面的大多数文章是基于一步一步地嵌入圈到平面上. 在文献 (Tutte, W.T.[8]) 中, Tutte 则用完全不同的想法, 通过解一组线性方程, 同时确定平面嵌入的各节点在平面上的坐标. 吴文俊进一步发展他本人的理论结果, 到通过解模 2 方程组在计算机上实现, 参见文献 (Wu, W.T.[2~4]). 定理 6.2.2 和定理 6.3.1 反映了他的想法的实质.

(3) 将平面性的问题转化为判定一个图是否有奇权圈, 或一个边的子集是否为一个 1 上边缘, 或一个图是否是平衡的想法可从文献 (Liu, Y.P.[1, 2, 19, 22]) 以及其后的文献 (Fraysseix, H.-P. Rosenstiehl[1, 2], Rosenstiehl, P.[3]) 中看到.

(4) 基于定理 6.4.1, 一个 $O(n^2)$(n 为图的阶) 的算法可以容易地发现, 参见文献 (Liu, Y.P.[1]). 然而, 实地计算的结果表明, 特别是对一万个节点以内的图, 比 Hoproft 和 Tarjan 的线性算法更为有效, 参见文献 (Sun, R.[1], Xu, W.X.[1]). 在文献 (Xu, W.X.[1]) 中, 通过数据结构上的改进, 提供了一个 $O(n\log n)$ 的算法.

(5) 虽然定理 6.4.2 表明 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的阶不超过图 G 阶的一个线性函数, $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的度仍是 G 的阶的二次函数, 在第 7 章中, 将会解释如何使得达到计算复杂性的线性性. 原始的讨论可在文献 (Liu, Y.P.[19,22~25]) 中查到.

(6) 在 6.3 节和 6.4 节中所讨论的辅助图, 依赖确向树的选择. 然而, 如何刻画一个图的辅助图, 仍是一个公开的问题 (Liu, Y.P.[23]).

(7) 事实上, 定理 6.4.2 并不依赖浸入的选择. 因为常数 $\lambda(\alpha,\beta)$ 不再由浸入所决定. 虽然平面性 1 辅助图仍依赖由确向树所决定的偏序, 在定理 6.4.2 中, 图的平面性同样不依赖如何选择确向树.

(8) 顺便提一提, 于 1998 年, 在文献 (Archdeacon, D.-J. Siran[1]) 中给出了 θ 图, 并用它判定图的平面性. 恰于 20 年前, 在文献 (Liu, Y.P.[1]) 中给出了派生图 (即这里所说的平面性辅助图) 是 θ 图的一个子图. 然而, 派生图是有效的, θ 图却不是有效的, 参见文献 (Wei, E.L.[1]).

(9) 在文献 (Hao, R.X.-Y.P. Liu[1]) 中可以看出, 平面性辅助图是对于研究非平面图的一个新的启示.

第 7 章　高斯交叉问题

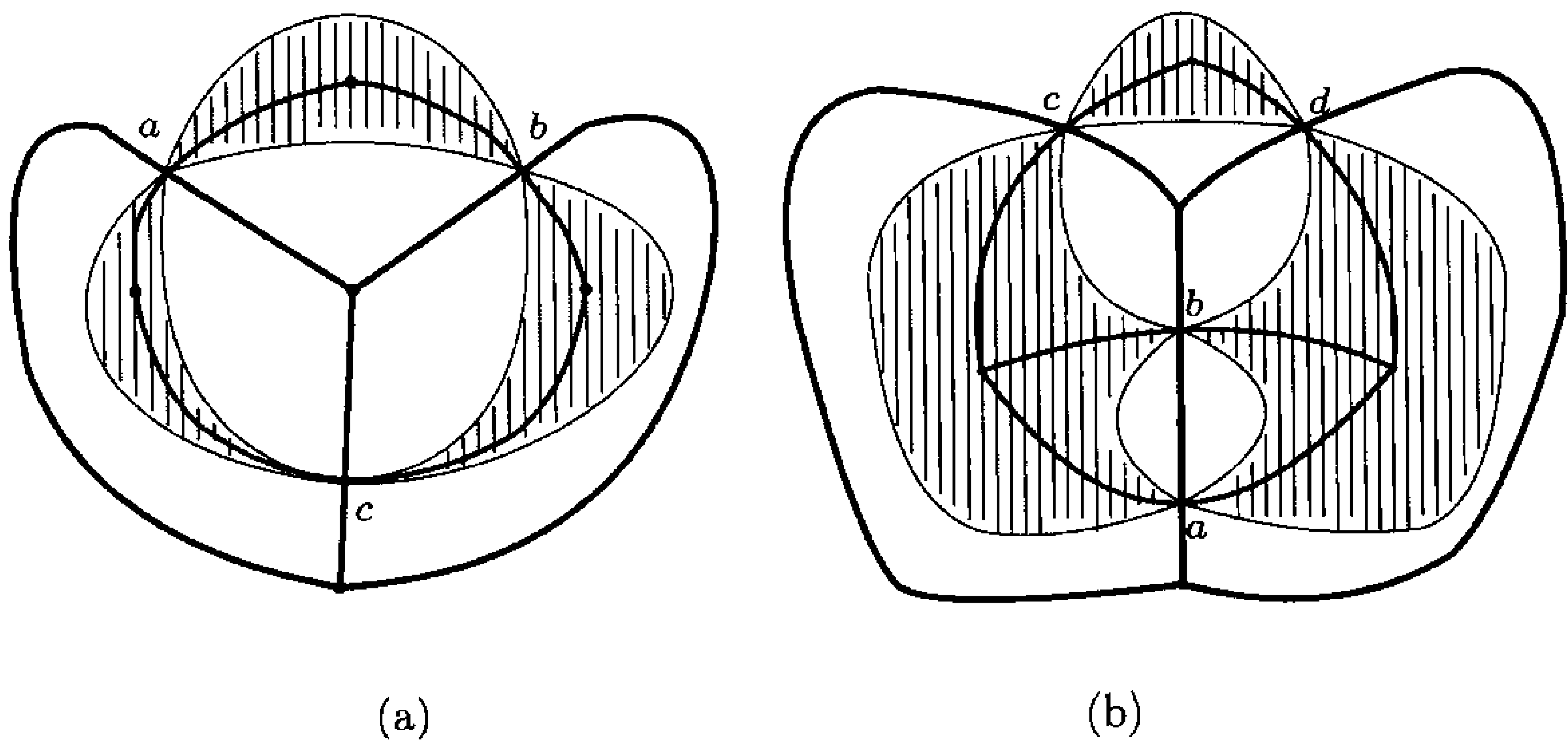
7.1　交 叉 序 列

对于一个 Jordan 闭曲线, 或者说, 一个圈 C, 令 f 是一个从 C 到平面上的连续函数, 使得有有限个自交叉点, 更确切地, 简单交叉点. 所谓*简单交叉* 是指这样的交叉点 $r \in f(C)$, 它不是切点而且恰有 $p, q \in C$, 使得 $f(p) = f(q)$. 后者也称为*二重交叉*. 若 $f(C)$ 的所有自交叉点用互不相同的字母表示, $a, b, c, \cdots$, 则从 $Z = f(C)$ 上的一点 p 出发, 沿着 C 所确定的方向返回到 p, 并将所经过的交叉点的代表字母依次记录下来, 这样就得到一个字母的序列, 称之为 Z 的*交叉序列*. 当然, 它是循环序的. 由于二重交叉性, 在此序列上, 每一个字母恰出现两次. 称具有这种性质的字母的循环序列为*多面形的*.

在图 7.1.1(a) 中, 这个曲线有三个交叉点, 其交叉序列为 $abcabc$. 在图 7.1.1(b) 中有 4 个交叉点, 其序列为 $abcdbadc$. 它们全是偶长的, 即其上字母的出现数为偶. 一个序列, 若存在平面上的一个闭曲线 Z, 使得它为 Z 的交叉序列, 则它本身也称为*交叉序列*. 当然, 任何交叉序列均是多面形的. *高斯交叉问题*就是要确定一个序列是否为一个交叉序列. 换句话说, 给出交叉序列的表征. 令 S_{eq} 为一个字母的序列, $\Xi = \Xi(S_{\text{eq}})$ 为其上字母的集合. 若 S_{eq} 具有如下形式:

$$S_{\text{eq}} = AaBbCaDb, \tag{7.1.1}$$

则称 a 和 b 是*交叉的*, 记为 a int b.



(a)　　　　(b)

图 7.1.1

所谓一个序列 S_{eq} 的**交叉图**是指这样的一个图, 用

$$G(I) = (V(I_{\text{nt}}), E(I_{\text{nt}}))$$

表示, 使得

$$V(I_{\text{nt}}) = \Xi, \quad E(I_{\text{nt}}) = I_{\text{nt}}, \tag{7.1.2}$$

其中 $I_{\text{nt}} = \{(a,b) | \forall a, b \in \Xi, a \text{ int } b\}$.

也许人们已经看到, 图 7.1.1(a) 所示的曲线的交叉序列的交叉图为三角形, 而图 7.1.1(b) 则是一个四边形, 这两个图均为 Euler 的. 也容易看出, 在 $G(I_{\text{nt}})$ 中既无环也无重边, 但孤立节点是允许的. 与 4.4 节中一样, 对于 $a \in V(I_{\text{nt}})$, 令

$$\text{Int } a = \{b | \forall b \in V(I_{\text{nt}}), (a,b) \in E(I_{\text{nt}})\}.$$

引理 7.1.1 对于任何一个交叉序列 S_{eq}, 它的交叉图 $G(I_{\text{nt}})$ 均为 Euler 图.

证 对于 $a \in \Xi$, 设交叉序列 S_{eq} 具有形式 $S_{\text{eq}} = AaBa$, 则对任何 $b \in \Xi(b \neq a)((a,b) \in E(I_{\text{nt}}))$ 当且仅当 b 不但在 A 中而且在 B 中出现. 由 S_{eq} 的简单交叉性, 在 aAa 上与 a 邻近的指向 a 和离开 a 的点皆同时落在闭曲线 aBa 的内部或外部的一个区域中, 由 Jordan 定理, 在 A 和 B 中所出现的交叉点的数目必为偶, 从而 $|\text{ Int } a| = 0 \pmod 2$. 由定理 1.3.6 即得引理结论. ♮

引理 7.1.2 对于交叉序列 $S_{\text{eq}}, \forall a, b \in \Xi((a,b) \notin E(I_{\text{nt}}))$,

$$\left|\text{Int } a \bigcap \text{Int } b\right| = 0 \pmod 2.$$

证 由于 $(a,b) \notin E(I_{\text{nt}})$, S_{eq} 有形式 $S_{\text{eq}} = AaBbCbDa$, 因此, $c \in \text{ Int } a \cap \text{ Int } b$ 当且仅当 c 为在 A 和 C 中皆出现的 aAa 与 bBb 的交叉点. 与引理 7.1.1 的证明中同样地, 因为在 a 的邻域中 aAa 上的点不是在 bBb 的内部, 就是在外部的同一个区域中. 由 Jordan 定理即得 $|\text{ Int } a \cap \text{ Int } b| = 0 \pmod 2$, 引理得证. ♮

若 S_{eq} 是曲线 Z 的交叉序列, 则可以得到一个图. 它的节点就是 Z 上的交叉点, 边就是 Z 上连接两个交叉点, 而不与其他交叉点相遇的曲线段. 由简单交叉性, 这个图必为 4 正则的平面图, 记为 $G(Z)$. 由定理 1.3.7 知 $G(Z)$ 的对偶 (当然, 平面的) 是二部的. 这就是说, $G(Z)$ 的面可以划分为两个部分, 使得在每部分中, 任何两个面的边界至多有一个公共点. 当然, 在每一个节点处的 4 个关联面也分为两个部分, 并且每部分中的两个面为对顶的. 对顶的两个面也称为*相反的*. 对每一部分面的集合还可引进一个图, 使得它的节点为此部分中的面, 和两个节点相邻当且仅当它们的相应面是相反的. 容易证明由这两个部分面所得的两个图互为平面对偶.

令 $G_S(Z)$ 是这两个图中那个不含无限面的. 当然, 另一个即为它的平面对偶 $G_S^*(Z)$. 称它们为交叉序列的关联图. 在图 7.1.1 中, $G_S(Z)$ 和 $G_S^*(Z)$ 分别用粗实线和双粗线表示.

引理 7.1.3　对于一个交叉序列 S_{eq}, 两图 $G_S^*(Z)$ 和 $G_S(Z)$ 皆无双循环.

证　因为 $G_S(Z)$ 和 $G_S^*(Z)$ 皆为平面的, S_{eq} 是在其上由 4.4 节中的通穿规则唯一确定的一个迁, 由定理 4.4.6 即得引理结论. ♮

引理 7.1.4　对于一个交叉序列 S_{eq}, 令

$$U(I_{\text{nt}}) = \{(a,b)|\forall(a,b) \in E(I_{\text{nt}}), \left|\text{Int } a \bigcap \text{Int } b\right| = 0 \pmod 2\},$$

则 $U(I_{\text{nt}}) \in \mathcal{C}^{\perp}(I_{\text{nt}})$, 即 $G(I)$ 的一个 1 上边缘, 或者说, 上循环.

证　由引理 7.1.3 知 $G_S(Z)$ 无双循环, 即 (4.4.3) 式中的 $O = \varnothing$. 这样就有

$$E(G_S(Z)) = \Xi = M + N, \tag{7.1.3}$$

其中 $e \in M$ 或 N 分别是由 $e \in \gamma(e)$ 或 $w(e)$ 所决定的. 由定理 3.3.6 知

$$\{\gamma(e)|\forall e \in \Xi\} \quad \text{和} \quad \{w(e)|\forall e \in \Xi\}$$

分别生成 $G_S(Z)$ 的循环空间 $\mathcal{C}(G_s(z))$ 和上循环空间 $\mathcal{C}^{\perp}(G_s(Z))$. 由 (3.4.8) 式可知 $\text{Int } a = \gamma(a) \cap \omega(a)$, 则有

$$\gamma(a) = \begin{cases} \text{Int } a \bigcup \{a\}, & a \in M, \\ \text{Int } a, & a \in N \end{cases} \tag{7.1.4}$$

和

$$\omega(a) = \begin{cases} \text{Int } a \bigcup \{a\}, & a \in N, \\ \text{Int } a, & a \in M. \end{cases} \tag{7.1.5}$$

因为对于 $(a,b) \in E(I_{\text{nt}})$, 即 $b \in \text{Int } a$, 则有

$$\left|\text{Int } a \bigcap \left(\text{Int } b \bigcup \{b\}\right)\right| = \left|\text{Int } a \bigcup \text{Int } b\right| + 1 \pmod 2.$$

由 (7.1.4) 式和 (7.1.5) 式,

$$\left|\text{Int } a \bigcap \text{Int } b\right| = \begin{cases} (\gamma(a), \omega(b)) \pmod 2 \Leftrightarrow a \in N, b \in M, \\ (\omega(a), \gamma(b)) \pmod 2 \Leftrightarrow a \in M, b \in N. \end{cases}$$

由空间 $\mathcal{C}(G_s(Z))$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}(G_s(Z))$ 的正交性,

$$|\text{Int } a \bigcap \text{Int } b| = 0 \pmod 2 \Leftrightarrow a \in M, b \notin M \text{或 } a \in N, b \notin N.$$

这就意味着 $U(I_{\text{nt}})$ 是 $G(I)$ 的一个 1 上边缘. ♮

事实上, 引理 7.1.1 和引理 7.1.2 也可以直接由 $G_S(Z)$ 导出. 因为 $G_S(Z)$ 无双循环, 由 (3.4.9) 式即得引理 7.1.1. 又对任何 $(a,b) \notin E(I_{\rm nt})$, 即 $b \notin$ Int a 和 $a \notin$ Int b 有

$$\begin{aligned}\text{Int } b\bigcap(\text{Int } a\bigcup\{a\}) &= \text{Int } a\bigcap(\text{Int } b\bigcup\{b\})\\ &= \text{Int } a\bigcap\text{Int } b.\end{aligned}$$

然而, 由 (7.1.4)~(7.1.5) 式可得

$$(\gamma(a),\omega(b)) = \begin{cases} |\text{Int } a\bigcap(\text{Int } b\bigcup\{b\})| \pmod 2, & a\in N, b\in N,\\ |(\text{Int } a\bigcup\{a\})\bigcap\text{Int } b| \pmod 2, & a\in M, b\in M.\end{cases}$$

从而

$$|\text{Int } a\bigcap\text{Int } b| = \begin{cases} (\gamma(a),\omega(b)) \pmod 2, & a\in N, b\in M,\\ (\gamma(b),\omega(a)) \pmod 2, & a\in M, b\in N.\end{cases}$$

由 $\mathcal{C}(G_S(Z))$ 和 $\mathcal{C}^+(G_S(Z))$ 的正交性, 即得引理 7.1.2.

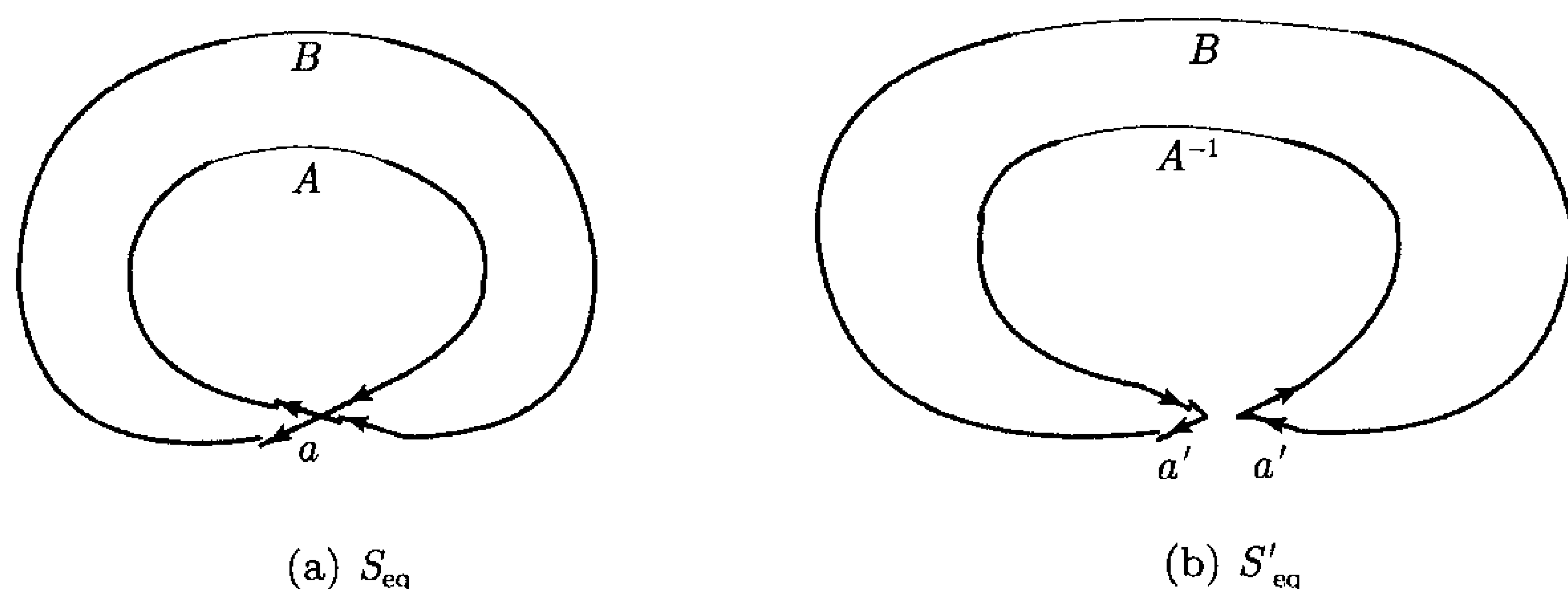
进而, 将在 7.3 节中论证由引理 7.1.1, 引理 7.1.2 和引理 7.1.4 所描述的条件, 对于一个多面形的序列为交叉序列也是充分的. 这就给出了高斯猜想的一个回答.

7.2 Dehn 变换

令 $S_{\rm eq}$ 是字母的一个循环序列. 对于一个交叉点 $a\in\Xi$, 即 $S_{\rm eq}$ 中出现的字母的集合, 将 $S_{\rm eq}=aAaB$ 变为 $S'_{\rm eq}=a'A^{-1}a'B$ 的运算, 被称为*劈分字母* a, 用 λ_a 表示. 当然, 若 $S_{\rm eq}$ 是一个闭曲线 Z 的交叉序列, 则劈分一个字母就是劈分一个交叉点 a, 使所得的曲线 Z' 仍为一个闭曲线. 这时, $S'_{\rm eq}$ 就是 Z' 的交叉序列带有字母 a' 的两次出现. 由于 a' 不再是闭曲线 Z' 的交叉点, 可以想象 a' 就是 Z' 上两个点的标记. 图 7.2.1 显示了这个运算. 这样, $S'_{\rm eq}=\lambda_a(S_{\rm eq})$ 就被称为曲线 Z' 的*标定交叉序列*, 或称为*标定序列*, 当 $S_{\rm eq}$ 不是一个闭曲线的交叉序列时. 由于一般地, $\lambda_a\lambda_b\neq\lambda_b\lambda_a$, 对于 Ξ 中字母的一个给定的线性序, 令

$$\widetilde{S_{\rm eq}} = \prod_{a\in\Xi}\lambda_a(S_{\rm eq}), \tag{7.2.1}$$

并称 $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 是 $S_{\rm eq}$ 的一个*劈分序列*. 自然, $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 是一个标定序列, 并且其中所有字母均带标记.



(a) S_{eq}　　　　(b) S'_{eq}

图 7.2.1

若一个图的节点为 $\widetilde{S_{eq}}$ 上所有带标记的字母, 并且每个出现两次, 两个节点相邻当且仅当它们是相同的字母, 或者它们在 $\widetilde{S_{eq}}$ 上相继, 则称之为序列 S_{eq}(当然, 多面形的) 的**劈分图**, 并记为 $\tilde{G}(S_{eq})$. 相应 $\widetilde{S_{eq}}$ 的闭曲线 $\tilde{Z}$ 自然与圆拓扑等价, 被称为 Z 的**劈分曲线**, 其中 Z 以 S_{eq} 为交叉序列.

引理 7.2.1　对于任一多面形的序列 S_{eq}, 所有劈分图 $\tilde{G}(S_{eq})$ 皆为立方的 (即 3 正则). 若 S_{eq} 是一个交叉序列, 则对于 Ξ 上的任何一个线性序, 劈分图 $\tilde{G}(S_{eq})$ 皆平面的.

证　因为在 $\tilde{G}(S_{eq})$ 上, 每一个节点都与三条边关联: 一个为与它同字母的节点所连的边, 一个为与 S_{eq} 的前继所连的边, 第三个为与它在 S_{eq} 上的后继所连的边, 引理的前一个说法显然.

事实上, $\widetilde{S_{eq}}$ 为任何一个不自交叉的 Jordan 闭曲线 $\tilde{Z}$ 的交叉序列. 沿 $\tilde{Z}$ 依 $\widetilde{S_{eq}}$ 上的次序, 给出带标记的点, 由于 $\tilde{G}(S_{eq})$ 总可视为在劈分曲线 Z 的交叉点时, 将劈得的两个同字母的点用一条直线段连接, 使得无内点与 Z' 公共所最终得到的图. 由于这一运算是在平面上进行的, 故 $\tilde{G}(S_{eq})$ 为平面的. 这就得到了后一个说法. ♮

对于一个曲线 Z 的交叉序列的劈分图 $\tilde{G}(S_{eq})$, 劈分曲线 $\tilde{Z}$ 相应 $\tilde{G}(S_{eq})$ 的一个 Hamilton 圈. 由于 $\tilde{G}(S_{eq})$ 是平面的 (引理 7.2.1), 所有不在 $\tilde{Z}$ 上的边可以分为两类 (由 Jordan 定理): 一类是由所有落在 $\tilde{Z}$ 内部区域的边组成, 称为**内的**; 另一类则是**外的**, 由所有在 $\tilde{Z}$ 外部区域的边组成. 由所有内边端点所组成的 $\widetilde{S_{eq}}$ 的子序列 (循环的), 称为 $\widetilde{S_{eq}}$ 的**内序列**. 类似地, 可知**外序列**的意义. 当然, 不管内序列还是外序列均是多面形的. 若一个多面形的序列, 其中没有交叉的字母, 则称之为 Dyck 字.

引理 7.2.2　一个交叉序列 S_{eq} 的任何劈分图 $\tilde{G}(S_{eq})$ 的内序列和外序列皆为 Dyck 字.

证　直接由上述讨论即可得到引理的结论. ♮

现在可以讨论劈字母运算的逆. 首先, 在 $\tilde{G}(S_{eq})$ 上去掉不在 $\tilde{Z}$ 上的边, 而用

充分接近的平行线段代替. 然后, 在每一条边的端点处, 去掉两条平行线间的部分. 最后, 在每一边相应的平行线段的中点处合而为一, 并记为代表这边端点的字母但不带撇, 如图 7.2.2 所示.

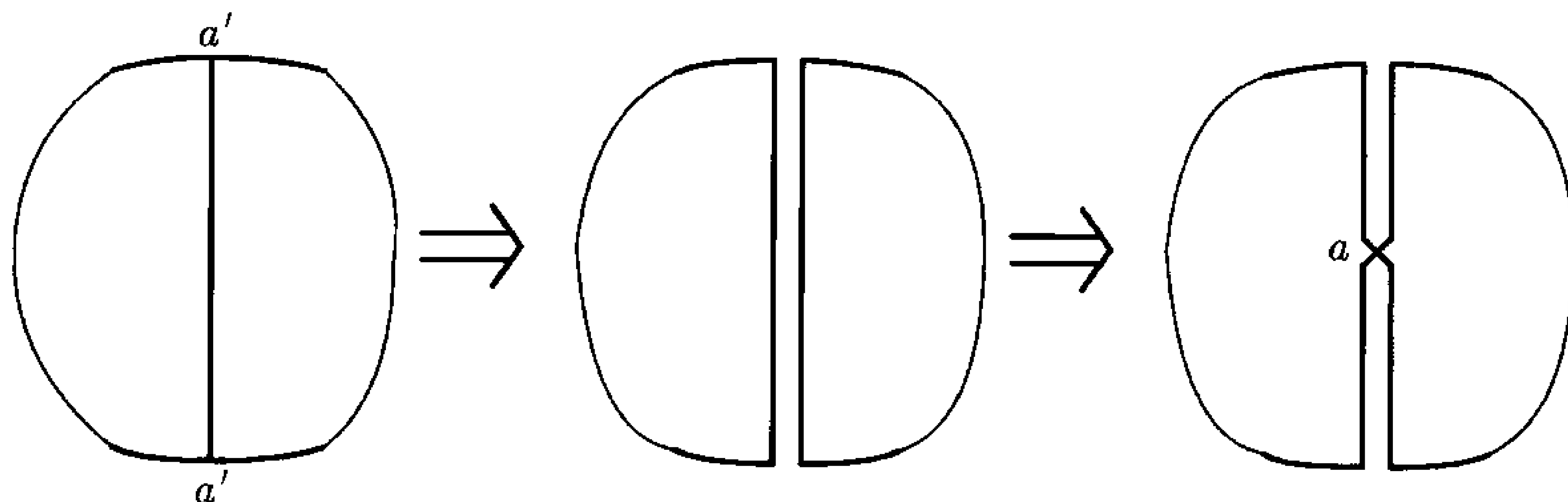


图 7.2.2

设对于所有不在 $\tilde{Z}$ 上的边均作了上述的运算. 如果所得到的是一条闭曲线, 并且它的交叉序列就是 $S_{\rm eq}$, 则称 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 为**可迹的**.

引理 7.2.3 若 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是一个交叉序列 $S_{\rm eq}$ 的劈分图, 则 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是可迹的.

证 根据上述由 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 产生交叉点的过程, 对不在 $\tilde{Z}$ 上的所有边处置之后, 恰得一闭曲线 Z, 其交叉序列为 $S_{\rm eq}$. 因此, $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是可迹的. ♮

对于任何一个序列, 只要它是多面形的, 不一定是交叉序列, 均可以得到劈分序列以及劈分图. 不过, 因为它们依赖在 Ξ 上线性序的选择, 故不是唯一的. 然而, 不管怎样选择 Ξ 上的线性序, 只要有一个劈分序列可以划分为两个 Dyck 字, 并进而相应的劈分图是可迹的, 则任何劈分序列和相应的劈分图都有这些性质.

定理 7.2.1 一个多面形的序列 $S_{\rm eq}$ 是一个交叉序列当且仅当它的劈分序列 $\widetilde{S}_{\rm eq}$ 可以划分为两个 Dyck 字, 并且其劈分图是可迹的.

证 由于必要性可直接由引理 7.2.1~ 引理 7.2.3 得到, 所以只证充分性. 因为 $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 可划分为两个 Dyck 字, $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 可以嵌入到平面上, 使得一个 Dyck 字确定所有那些在曲线 $\tilde{Z}$ 内部的边, 另一个确定所有 $\tilde{Z}$ 外部的边. 在 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 上,

$$C = \tilde{Z}$$

为那个 Hamilton 圈. 进而, 由于 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是可迹的, 则通过在 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 上作劈分的逆的过程 (如上所述) 所得的曲线 Z 就以 $S_{\rm eq}$ 为交叉序列. ♮

引理 7.2.4 对于一个多面形的序列 $S_{\rm eq}$, 其劈分序列 $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 的交叉图 $\tilde{G}(I)$ 是二部的当且仅当 $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 可划分为两个 Dyck 字.

证 若 $\tilde{G}(I)$ 是二部的, 则它的节点集 $\tilde{V}(I_{\rm nt}) = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$. 也就是说, 在 $\tilde{V}_1$(或 $\tilde{V}_2$) 中的任何一对节点, 在 $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 上均是不交叉的. 这样, $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 被划分为两个子序列, 一个由 $\tilde{V}_1$ 的所有字母组成, 另一个由 $\tilde{V}_2$ 中所有字母组成, 从而它们确定了两个 Dyck 字划分 $\widetilde{S_{\rm eq}}$. 必要性得证.

反之, $\widetilde{S_{\text{eq}}}$ 的两个 Dyck 字确定了 $\tilde{V}(I_{\text{nt}})$ 被划分为两个部分, 它们分别由这两个 Dyck 字中的字母组成. 这就得到了充分性. ♮

定理 7.2.2　一个多面形的序列 S_{eq} 是一个交叉序列当且仅当其劈分序列的交叉图 $\tilde{G}(I)$ 是二部的, 而且劈分图 $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ 是可迹的.

证　由引理 7.2.4 和定理 7.2.1, 即得定理结论. ♮

对于一个多面形序列 S_{eq}, 若它的劈分图 $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ 是平面的, 令 $\tilde{Z}$ 为那个与劈分序列 $\tilde{S_{\text{eq}}}$ 相应的 Hamilton 圈. $F_{\text{in}}(S_{\text{eq}})$ 和 $F_{\text{out}}(S_{\text{eq}})$ 分别为 $\tilde{Z}$ 的内部和外部所有面的集合. $E_{\text{in}}(S_{\text{eq}})$ (或 $E_{\text{out}}(S_{\text{eq}})$) 为 $\tilde{Z}$ 的内部 (或外部) 的所有边的集合, 则可以造一个新图, 称为 S_{eq} 的 P-C 图, 并用 $\tilde{G}_{\text{pc}}(S_{\text{eq}}) = (V_{\text{pc}}, E_{\text{pc}})$ 表示, 其中

$$\begin{cases} V_{\text{pc}} = \{f | f \in F_{\text{in}}(S_{\text{eq}})\}, \\ E_{\text{pc}} = E_{\text{pc}}^{(1)} + E_{\text{pc}}^{(2)} \end{cases} \tag{7.2.2}$$

和

$$\begin{cases} E_{\text{pc}}^{(1)} = \{(f_1, f_2) | \forall f_1, f_2 \in V_{\text{pc}}, f_1 \text{ adj } f_2\}, \\ E_{\text{pc}}^{(2)} = \{(f_1, f_2) | \exists (u, v) \in E_{\text{out}}(S_{\text{eq}}), (u \text{ ind } f_1) \wedge (v \text{ ind } f_2)\}. \end{cases}$$

因为 $\tilde{G_{\text{pc}}}(S_{\text{eq}})$ 可嵌入到平面上, 使得 $f \in V_{\text{pc}}$ 是面 $f \in F_{\text{in}}(S_{\text{eq}})$ 内的一个点, $(f_1, f_2) \in E_{\text{pc}}^{(1)}$ 是一条与 f_1 和 f_2 的公共边界交叉的曲线, $(f_1, f_2) \in E_{\text{pc}}^{(2)}$ 为通过 $E_{\text{out}}(S_{\text{eq}})$ 中那条端点并在 f_1 和 f_2 边界上的边. 分别称 $E_{\text{pc}}^{(1)}$ 和 $E_{\text{pc}}^{(2)}$ 为 E_{pc} 的**交叉**和**通过子集**, 而且由定理 3.4.6 也可以造另一个图, 称为 S_{eq} 的 C-P 图, 并用 $\tilde{G}_{\text{cp}}(S_{\text{eq}})$ 表示. 它可由 (7.2.2) 式中将 $F_{\text{in}}(S_{\text{eq}})$ 和 $E_{\text{out}}(S_{\text{eq}})$ 分别用 $F_{\text{out}}(S_{\text{eq}})$ 和 $E_{\text{in}}(S_{\text{eq}})$ 代替而得到. 容易验证, $\tilde{G}_{\text{cp}}(S_{\text{eq}}) = \tilde{G}^*_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$, 即 $\tilde{G}_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$ 的平面对偶. 若 S_{eq} 是一个交叉序列, 则

$$\begin{cases} \tilde{G}_{\text{pc}} \ (\text{或 } \tilde{G}_{\text{cp}})(S_{\text{eq}}) = G_S, \\ \tilde{G}_{\text{cp}} \ (\text{或 } \tilde{G}_{\text{pc}})(S_{\text{eq}}) = G^*_S. \end{cases} \tag{7.2.3}$$

若用 4.4 节中的通穿规则, 对 $\tilde{G}_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$ 所得的迂的集合 $\mathcal{T}_{\text{TT}}$ 仅含单一个迂, 并且次序与 S_{eq} 一致, 则称 $\tilde{G}_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$ 为 T.T.*可迹的*, 或称为*通穿可迹的*. 当然, 由定理 4.4.6 可知可迹性意味着在 $\tilde{G}_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$(同样地, $\tilde{G}_{\text{cp}}(S_{\text{eq}})$) 上无双循环.

引理 7.2.5　对于一个多面形的序列 S_{eq} 的一个平面的劈分图 $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ (如果存在的话), $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ 是可迹的当且仅当 $\tilde{G}_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$ 是通穿可迹的.

证　由于用 4.4 节中的通穿规则, 在 $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ 上所得的单一个迂就是在 $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ 上依劈分的逆过程, 产生所有交叉点所得的那条闭曲线, 故充分性成立. 反之, 上述产生所有交叉点的那条闭曲线, 恰为由通穿规则在 $\tilde{G}(S_{\text{eq}})$ 上所得的那个迂, 从而必要性成立. ♮

引理 7.2.6 对于一个多面形的序列, 一个劈分图 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是可平面的当且仅当其劈分序列 $\widetilde{S_{\rm eq}}$ 可以划分为两个 Dyck 字.

证 由引理 7.2.1 知 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是立方的. 因为 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 是平面的, 不在 Hamilton 圈 $\tilde{Z}$ 上的边可划分为两部分: 一部分由所有那些在 $\tilde{Z}$ 内部的边组成, 而另一部分则是由所有外部的边组成. 由 3 正则性 (即立方性), 这些边的任何两条均不相邻, 从而在每部分中, 边的端点的代表字母形成一个 Dyck 字. 这就得到了必要性.

反之, 将一个 Dyck 字关联的边放入在闭曲线 $\tilde{Z}$ 的内部或外部, 即可得 $\tilde{G}(S_{\rm eq})$ 的一个平面嵌入, 从而它是可平面的. 充分性得证. ♮

定理 7.2.3 一个多面形的序列 $S_{\rm eq}$ 是一个交叉序列当且仅当它的劈分图是可平面的, 并且其 P-C 图 $\tilde{G}_{\rm pc}(S_{\rm eq})$ 是通穿可迹的.

证 由引理 7.2.5, 引理 7.2.6 和定理 7.2.1, 即得定理结论. ♮

7.3 代数原理

一个单面的多面形 Σ, 对于每个字母 a, 若在 Σ 上的两次出现具有相同的幂, 则在这两次出现之间, 所有仅出现一次的字母代表的边形成一个主循环 $\gamma(a)$, $(a,\gamma(a))=1$, 若它的两次出现具有不同的幂, 则这两次出现之间, 所有出现一次的字母代表的边形成一个主上循环 $\omega(a), (\omega(a),a)=1$, 则称 Σ 为*奇异的*. 如果一个多面形的序列 $S_{\rm eq}$ 的字母可以划分为两部分: M 和 N, 使得在 M 中的每个字母两次出现的幂相同, N 中的字母两次出现的幂不同, 得到一个奇异的多面形, 则也称 $S_{\rm eq}$ *是奇异的*.

引理 7.3.1 一个无双循环的图 G 是可平面的当且仅当它有在曲面上的单面嵌入为奇异的.

证 因为 G 是平面的, 并且无双循环, 由定理 4.4.6 可知用通穿规则, 在 G 上只得一个迂 q. 由 4.4 节中所讨论的容易验证, q 是一个奇异的多面形, 从而必要性成立.

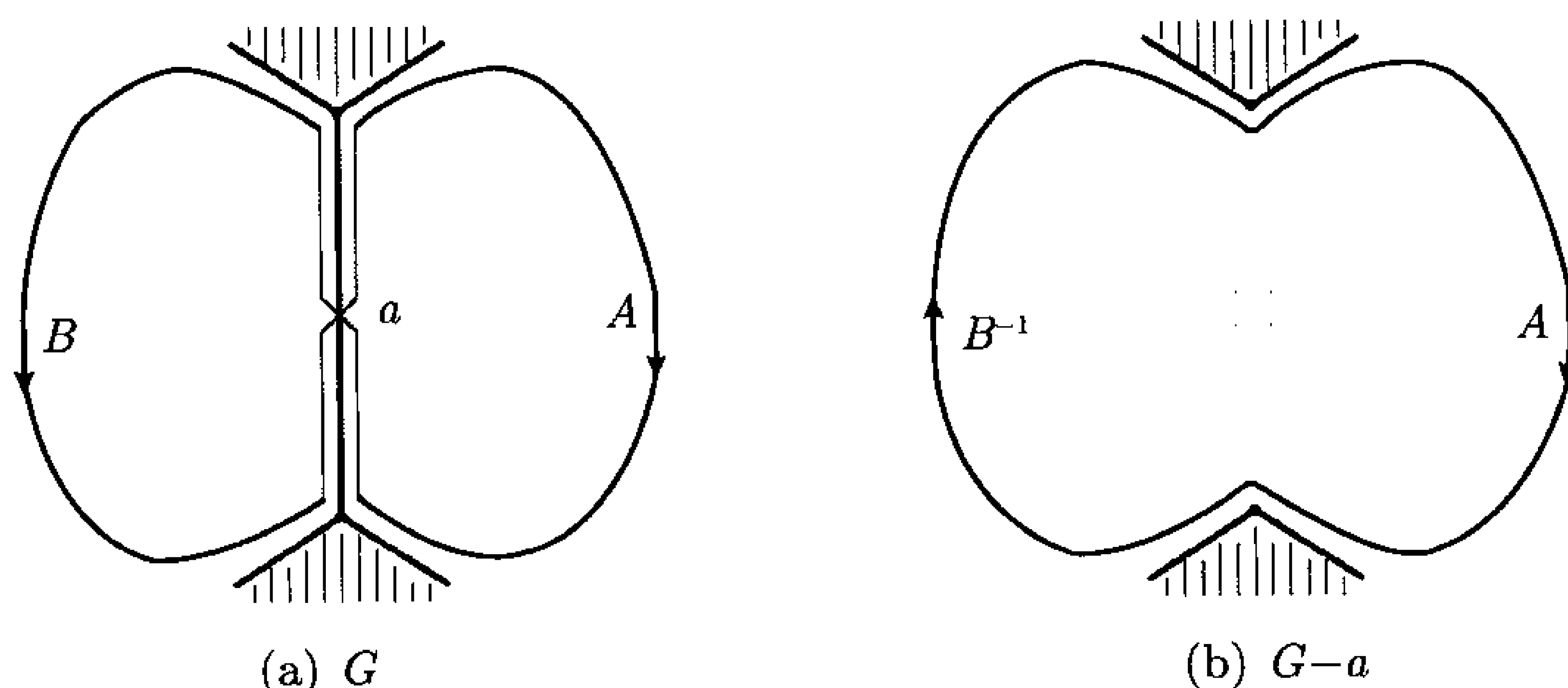
反之, 设 $S_{\rm in}$ 为由 G 的那个奇异多面形所确定的奇异序列. 令 Σ 为 G 在曲面上的这样一个嵌入, 使得在每个节点处的旋, 与用 4.4 节中的通穿规则得到的那个迂所确定的一致. 下面证明 Σ 是一个多面形 (当然, 可定向的), 具有 $\varepsilon-\nu+2$ 个面, 而且它们全是依 3.1 节中的旅行规则所得到的. 对 G 的度 ε 行归纳法. 当 ε 较小时, 容易验证. 一般地, 分两种情形讨论.

情形 1 $\exists a\in M, \gamma(a)=\text{Int}\ a, (a,\gamma(a))=1$. 令 $G'=G-a$. 设 $S_{\rm in}=aAaB$, 则 $S'_{\rm in}=AB^{-1}$ 恰为对于 G' 的那个奇异序列, 如图 7.3.1 所示. 因为 G 没有双循环, 由引理 4.4.2 知 G' 也没有双循环. 用归纳假设, 令 Σ' 是一个具有 $(\varepsilon-1)-\nu+2=\varepsilon-\nu+1$ 个面的可定向多面形. 由于 Σ' 的旋为 Σ 的旋所限定在 Σ' 上的, 则 a 的两个端点

在同一面边界上. 不妨假设此面的形式为 (CD), 这样就有

$$\Sigma = \Sigma' - \{CD\} + \{Ca, a^{-1}D\} \tag{7.3.1}$$

为 G 的一个有 $\varepsilon - \nu + 2$ 个面的可定向多面形.



(a) G　　　(b) $G-a$

图 7.3.1

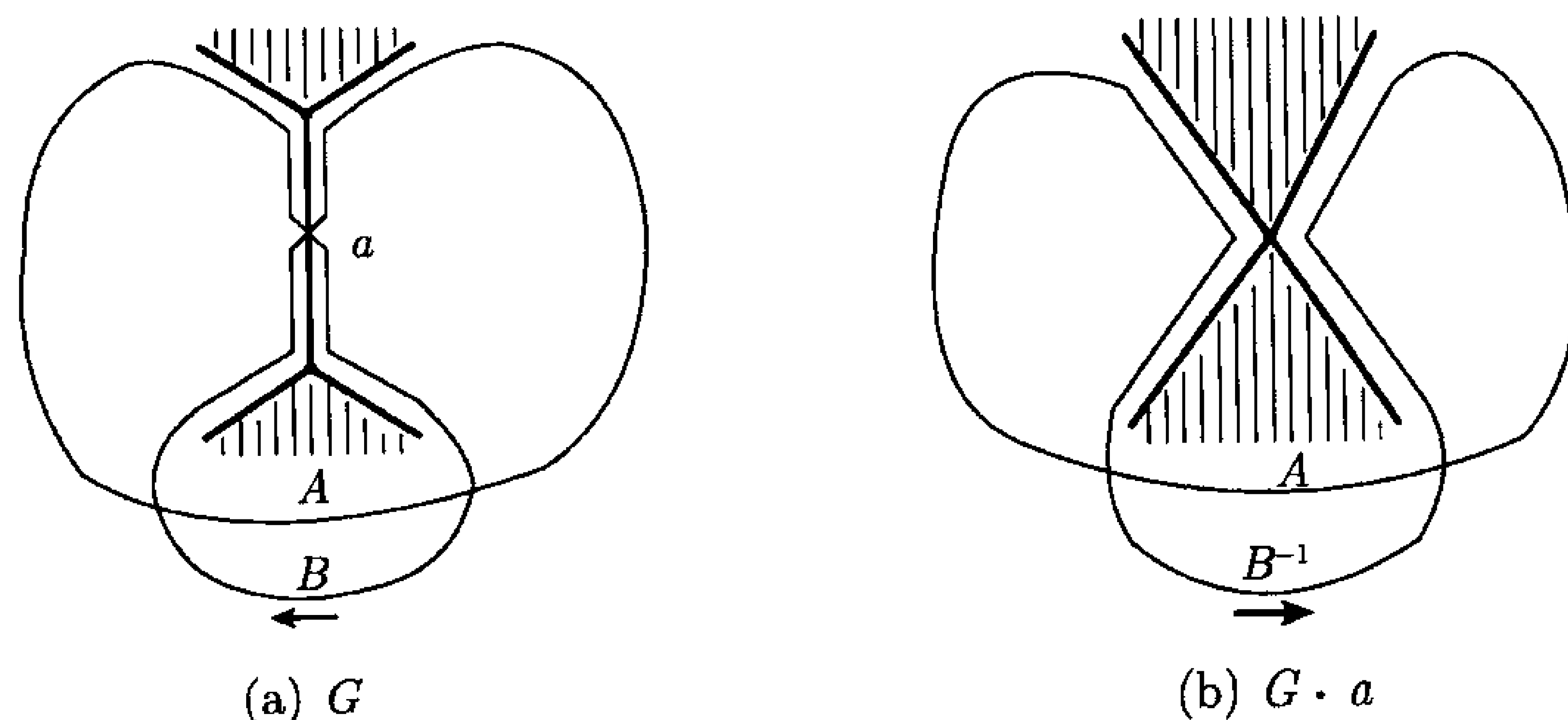
情形 2　$\exists a \in N$, $\omega(a) = \text{Int}\ a$, $(a, \omega(a)) = 1$. 令 $G'' = G \cdot a$ 为在 G 上收缩 a 所得的图. 设 $S_{\text{in}} = aAa^{-1}B$. 因为 G 无双循环, 则由引理 4.4.2 知 G'' 也没有双循环, 而且也容易看出 $S''_{\text{in}} = AB^{-1}$ (图 7.3.2) 为对于 G'' 的那个奇异多面形. 由归纳假设, G'' 是一个具有 $(\varepsilon - 1) - (\nu - 1) + 2 = \varepsilon - \nu + 2$ 面的可定向多面形 Σ'' 的基准图. 令

$$\Sigma'' = (\Sigma\langle a\rangle, C, D), \tag{7.3.2}$$

其中 C 和 D 为与那个收缩 a 得到的节点关联的两个面. 由与情形 1 类似的理由有

$$\Sigma = (\Sigma\langle a\rangle, Ca, a^{-1}D) \tag{7.3.3}$$

就是 G 的具有 $\varepsilon - \nu + 2$ 个面的可定向多面形, 从而由推论 3.2.1 可知 G 是可平面的. 这就得到了充分性. ♮



(a) G　　　(b) $G \cdot a$

图 7.3.2

引理 7.3.2 一个多面形的序列 S_{eq} 是一个交叉序列当且仅当它是奇异的.

证 由引理 7.1.3 知 G_S 没有双循环, 进而由引理 4.4.3 知交叉序列 S_{eq} 上的字母可划分为两类: M 和 N, 而且, 由定理 7.2.3 知 G_S 是可平面的, 从而由引理 7.3.1 得 S_{eq} 为奇异的. 必要性得证.

反之, 因为 S_{eq} 是奇异的, 由引理 7.3.1 知与 S_{eq} 的关联图 G_S 同构的基准图是可平面的, 并且无双循环. 然而, 由 4.4 节中的通穿规则所得到的那个迂, 恰以 S_{eq} 为其交叉序列. 这样就得到了充分性. ♮

定理 7.3.1 一个多面形的序列 S_{eq} 是一个交叉序列当且仅当其交叉图 $G(I)$ 具有如下性质:

(1) $G(I)$ 是 Euler 图;

(2) $\forall a, b \in V(I_{\text{nt}})$ $((a,b) \notin E(I_{\text{nt}}))$,

$$\left|\text{Int } a \bigcap \text{Int } b\right| = 0 \pmod 2;$$

(3) $U(I_{\text{nt}})$ 为一个 1 上边缘.

证 由引理 7.1.1~ 引理 7.1.3, 即得必要性.

只需证充分性. 由性质 (3), $V(I_{\text{nt}}) = \Xi(S_{\text{eq}})$ 可划分为 M 和 N, 使得

$$U(I_{\text{nt}}) = \{(a,b) | \forall a \in M, \forall b \in N, (a,b) \in E(I_{\text{nt}})\}. \tag{7.3.4}$$

令 G_S 为那个由赋 M 中字母的两次出现以相同的幂, N 中字母的两次出现以不同幂, 从 S_{eq} 得到的多面形的基准图, 如果定义

$$\gamma_S(a) = \begin{cases} \text{Int } a \bigcup \{a\}, & a \in M, \\ \text{Int } a, & a \in N \end{cases} \tag{7.3.5}$$

和

$$\omega_S(a) = \begin{cases} \text{Int } a, & a \in M, \\ \text{Int } a \bigcup \{a\}, & a \in N, \end{cases} \tag{7.3.6}$$

则有以下论断:

论断 1 $\forall a, b \in E(G_S) = \Xi(S_{\text{eq}})$, $(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = 0$.

证 若不是, 设对某 $a, b \in E(G_S)$, $(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = 1$, 则由 (7.3.5) 式和 (7.3.6) 式, 有

$$(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = \begin{cases} |\text{Int } a| = 0 \pmod 2)(\text{性质 (i)}),\text{当} \quad a = b, \\ |\text{Int } a \bigcap \text{ Int } b| = 0 \pmod 2)(\text{性质 (ii)}), \\ \qquad\qquad \text{当 } a \neq b \text{ 和 } (a,b) \notin E(I_{\text{nt}}). \end{cases}$$

这时, 只剩下 $a \neq b$ 且 $(a,b) \in E(I_{\text{nt}})$ 的情形. 若 a, b 同在 M 中或同在 N 中, 则

$$(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = \left|(\text{Int } a \bigcup \{a\}) \bigcap \text{Int } b\right| \pmod 2.$$

但由性质 (3), 有 $|\text{Int } a \cap \text{ Int } b| = 1 \pmod 2$. 这就意味着 $(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = 0$, 与假设条件矛盾. 若 a 和 b 中一个属 M, 另一个属于 N, 则由性质 (3) 有

$$(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = \left|\text{Int } a \bigcap \text{ Int } b\right| = 0 \pmod 2.$$

又与假设条件矛盾, 从而只能论断成立. ♮

论断 2　G_S 无双循环.

证　首先, 因为 $\gamma_S(a)$ 是 G_S 中的一个迂, 则有

$$\gamma_S(a) \in \text{ Ker } \partial_1 = \mathcal{C}(G_S),$$

即 G_S 的循环空间. 由论断 1, $w(a) \in \mathcal{C}^{\perp}(G_S)$, 即 G_S 的上循环空间. 然后, 由 (7.3.5) 式和 (7.3.6) 式, 有

$$\forall a \in E(G_S), \quad a = \gamma_S(a) + \omega_S(a), \tag{7.3.7}$$

从而由 (3.4.1)~(3.4.3) 式可知 G_S 无双循环, 即得论断结论. ♮

论断 3　G_S 是可平面的.

证　由论断 1 和论断 2 知对任一 $a \in E(G_S)$, $\gamma_S(a)$ 和 $\omega_S(a)$ 分别为它的主循环和主上循环. 进而由 G_S 的定义, 那个以 G_S 为基准图的多面形确定了 G_S 在一个曲面上的单面嵌入是奇异的. 由引理 7.3.1, 即得论断结论. ♮

由论断 3, G_S 的单面嵌入中的那个面与在 S_{eq} 上的次序一致, 从而 S_{eq} 是奇异的. 引理 7.3.2 导致定理成立. ♮

因为高斯首先发现定理 7.3.1 中的条件 (1) 和 (2), 称满足条件 (1) 和 (2) 的多面形的序列为*高斯序列*.

7.4　交叉问题

利用与定理 5.4.2 的证明类似的方法, 可以从定理 7.3.1 得到接下的定理.

定理 7.4.1　令 S_{eq} 是一个高斯序列, $G(I)$ 为它的交叉图, 并且边集上赋有如下方式的权:

$$\forall e \in E(I_{\text{nt}}), \quad \omega(e) = \begin{cases} 1, & e \in U(I_{\text{nt}}), \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \tag{7.4.1}$$

则下面的说法是等价的:

(1) S_{eq} 是一个交叉序列;

(2) $G(I)$ 没有奇权圈;

(3) $G(I)$ 没有奇权基本圈;

(4) $U(I_{\text{nt}})$ 为 $G(I)$ 的一个 1 上边缘;

(5) $G(I)$ 是平衡的.

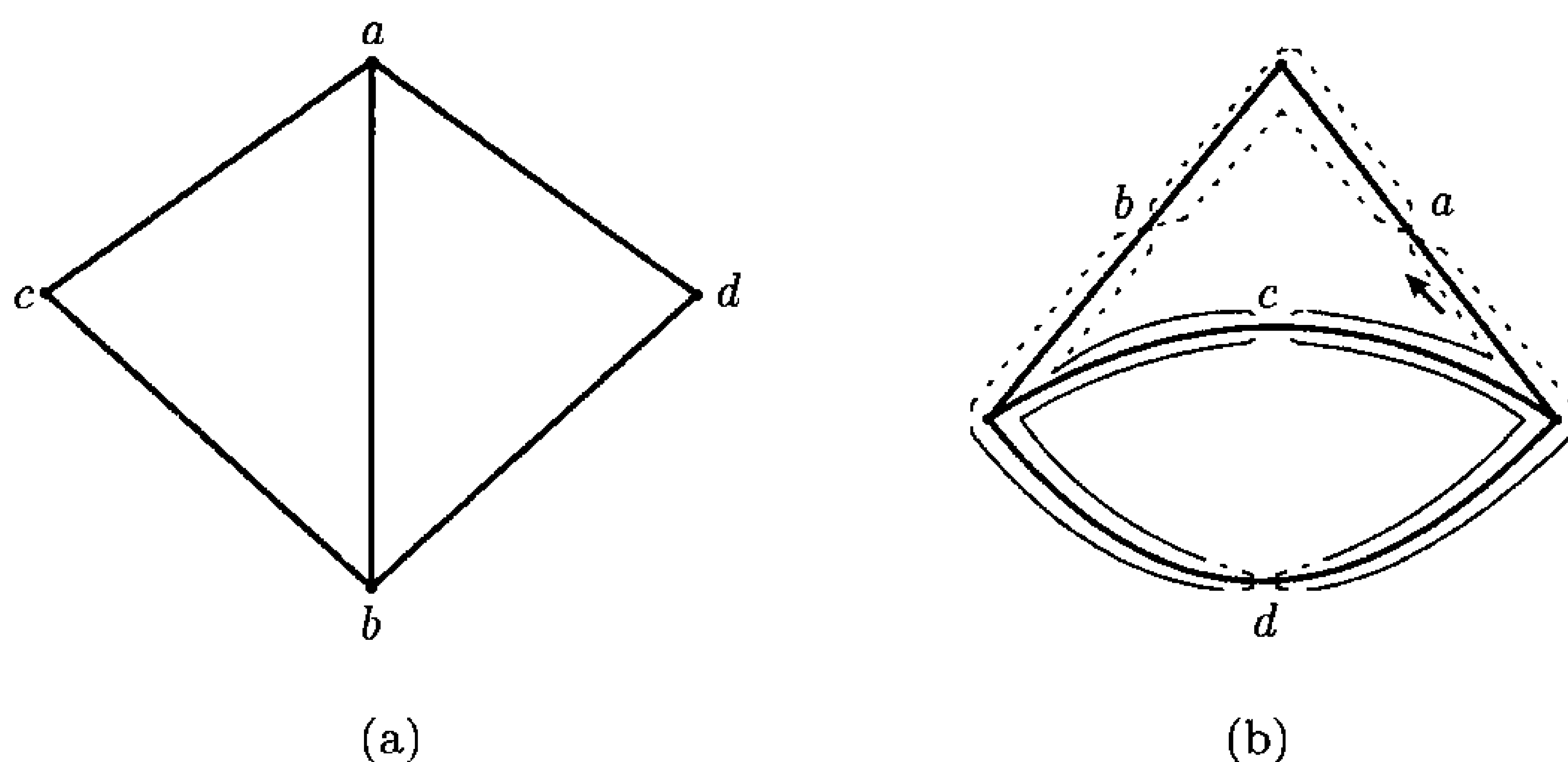
现在可以看到定理 7.4.1 中后 4 个条件的任何一个都仅依赖 $G(I)$ 本身. 或者说, 它们都是高斯猜想的条件.

这里还需要特别指出的是, 如果 S_{eq} 是一个交叉序列, 则由引理 7.3.2, 相应多面形的基准图 G_S 与 G_{pc}, 或者它的对偶 G^*_{pc}(它们均在 7.2 节中给出) 同构, 而且不依赖于在确定这些图时作劈分运算的次序的选择. 但如果 S_{eq} 不是交叉序, 虽然有时 G_{pc} 或 G^*_{pc} 可以被确定, 却绝不可能与相应 S_{eq} 的任何一个可迹的多面形基准图 G_S 同构.

令 $S_{\text{eq}} = abcdabdc$, 其交叉图为 $G(I)$, 如图 7.4.1(a) 所示. 它不是 Euler 图, 从而 S_{eq} 不是一个交叉序列. 然而, 其劈分序列

$$\widetilde{S_{\text{eq}}} = \lambda_d\lambda_c\lambda_b\lambda_a S_{\text{eq}} = a'b'c'a'd'c'd'b'$$

有 G_{pc}, 如图 7.4.1(b) 所示. 它无双循环, 但不是可迹的.



(a) (b)

图 7.4.1

若一个多面形的序列 S_{eq} 具有形式 $S_{\text{eq}} = CD$, 使得如果将 C 和 D 均视为循环序时, 它们均为多面形的, 则称 S_{eq} 为*可分离的*. 进而, 若 C 和 D 作为多面形的序列均不再可分离, 则它们均被称为 S_{eq} 的*连通片*. 当然, 一个不可分离的多面形的序列本身就是一个连通片.

引理 7.4.1 一个交叉序列 S_{eq} 本身是一个连通片当且仅当其 P-C 图 G_{pc} 是一个块 (即不可分离的).

证 因为 S_{eq} 是一个交叉序列, 则定理 7.3.1 中所定义的图 G_S 与 S_{eq} 的 P-C

图同构. 先证必要性. 设 $G_S = G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \{v\}$, v 为 G_S 的一个节点. 由引理 7.2.5 知 G_S 是可平面的且无双循环, 则由 4.4 节中的通穿规则, 在 G_S 上得到的那个唯一的迂 q 必具有形式 $q = AB = S_{\text{eq}}$, 使得其中的 A 由 $G_i(i = 1, 2)$ 之一中的代表边的字母组成, B 为由另一个的代表边的字母组成, 从而序列 S_{eq} 是可分离的.

反之, 由上面方法的逆向过程即可得充分性. ♮

引理 7.4.2　对于一交叉序列 S_{eq}, 它的 P-C 图 $G_{\text{pc}}(S_{\text{eq}})$ 是一个块当且仅当它的交叉图 $G(I)$ 是连通的.

证　因为 $G(I)$ 是连通的当且仅当它的相应的序列 S_{eq} 是一个连通片. 由引理 7.4.2, 即得引理结论. ♮

定理 7.4.2　一个交叉序列 S_{eq} 有 $r(\geqslant 1)$ 个连通片当且仅当在平面上有 2^{r-1} 个拓扑不等价的闭曲线, 使得 S_{eq} 为它们公共的交叉序列.

证　由于 S_{eq} 是一个有 $r(\geqslant 1)$ 个连通片的交叉序列, 引理 7.4.1 和引理 7.4.2 表明, 定理对 $r = 1$ 的情形成立. 对 r 用归纳法. 设 $S_{\text{eq}} = AB$, 使得 $S_{\text{eq}_2} = B$ 为一个连通片, 从而 $S_{\text{eq}_1} = A$ 有 $r - 1$ 个连通片. 从定理 7.3.1 的证明过程可知, 一个交叉序列仅由一个闭曲线表示当且仅当它本身是一个连通片. 因为这时, S_{eq} 中的字母仅有一种方式由 $U(I_{\text{nt}})$ 划分为 M 和 N, 以及 M_i 和 $N_i(i = 1, 2)$ 为 S_{eq_i} 中字母的划分, 则在固定 M_1 和 N_1 之下, $\{M_1 \cup M_2, N_1 \cup N_2\}$ 和 $\{M_1 \cup N_2, N_1 \cup M_2\}$ 为 S_{eq} 的两个划分, 从而由它们可得 S_{eq} 的两个拓扑不等价的实现. 由归纳假设, S_{eq_1} 有 $2^{(r-1)-1} = 2^{r-2}$ 个不同的实现. 因此, S_{eq} 共有 $2 \cdot 2^{r-2} = 2^{r-1}$ 个不同的实现. 这就得到了必要性.

反之, 用与定理 5.3.4 的证明类似的讨论, 即可得充分性. ♮

7.5　注　　记

(1) 本章所讨论的问题是由高斯首先提出和研究的, 参见文献 (Gauss, C.F.[1]). 他猜想交叉序列的表征仅依赖交叉图, 并且发现了定理 7.3.1 中的前两个条件. 然而, 那时他未能解决. 此问题的第一个解答出现在文献 (Dehn, M.[1]) 中. 但 Dehn 的解答, 如定理 7.2.1 所述, 与高斯所猜想的全然不同. 如高斯所猜想的第一个表征出现在文献 (Treybig, L.R.[1]) 中. 然而, 方法甚为复杂, 尤不适于计算. 进一步的讨论可参见文献 (Francis, G.K.[1], Liu, Y.P.[31], Marx, M.L.[1], Rosenstiehl, P.[4], Rosenstiehl, P.-R.C. Read[1], Read, R.C.-P. Rosenstiehl[1], Titus, C.J.[1], Whitney, H.[9]).

(2) 关于算法, Dehn 的方法, 如定理 7.2.1 所建议的, 相当简单. 事实上, 算法复杂性为 $O(n^2)$, n 为序列中字母的数目. 不过 Dehn 的文章, 如 Grunbaum 所说,

相当长而且不易读, 参见文献 (Grunbaum, B.[1]). 另一方面, 基于高斯猜想的算法, 如定理 7.3.1 所示, 为 $O(n^3)$. 它是由 Read 和 Rosenstiehl 所发现的. 不管怎样, 基于定理 7.2.3, 利用在 8.1 节中将会讨论的判定 3 正则 Hamilton 图的平面性的结果, 可以设计一个 $O(n)$ 的算法. 进而, 对于一些推广的问题, 也可得到 $O(n)$ 的算法. 这方面的结果可参见文献 (Rosenstiehl, P.[4], Rosenstiehl, P.-R. Tarjan[2], Liu, Y.P.[27]).

(3) 关于 4 正则平面图有两个互为平面对偶的关联图, 与 $G(Z)$ 有 $G_S(Z)$ 和 $G_S^*(Z)$ 一样, 曾被用来计数平面四边形剖分. 借此, 又导致有根平面 3 网的计数, 这些可参见文献 (Mullin, R.C.-P. Schellenberg[1], Liu, Y.P.[31]).

(4) 这里的交叉图与第 6 章以及进而在第 8 章中讨论的平面性辅助图似有异曲同工之妙.

(5) 本章的理论在研究拓扑学中的纽结问题时起着重要作用. 这一点将会在第 17 章中看到.

第8章　平 面 嵌 入

8.1　左和右确定

首先, 讨论有关立方的, 或者说, 3 正则图当确向树在一个 Hamilton 圈上的情形时, 平面性判定与确立平面嵌入的问题. 已经在第 7 章中看到了, 这类图对于高斯交叉问题尤为重要. 实际上, 一个交叉序列的膀分图就是这类图.

引理 8.1.1　对于 3 正则图 G, 其上有一个确向树 $T_{\rm od}$ 为路 (特别地, 在一个 Hamilton 圈上), 则有事实: 每一个上树边 $\gamma \in T_{\rm od}^*$ 在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中伴随至多两个变量, 一个为树变量, 另一个为上树变量.

证　由 3 正则性知, 若任何两个基本圈 $C_\alpha, C_\beta (\alpha, \beta \in T_{\rm od}^*)$ 有公共节点, 则必有公共边. 不失一般性, 可设 $h(\alpha) \prec h(\beta)$, 其中 $\prec$ 为 6.4 节中所提到的在一个确向树上的偏序集 $(V; \preceq)$ 中的序关系. 由定理 6.3.2 知与 $C_\alpha \cup C_\beta$ 关联的两个变量中, 一个为树变量, 另一个为上树变量. 用 y_β 表示后者, 它由 β 与那条从 $h(\beta)$ 发出的树边所形成. 用 x_α 或者 x_β 表示前者. 因为 $T_{\rm od}$ 是一条路, 它分别应 α, 或那条从 $t(\alpha)$ 发出的树边, 当 $t(\alpha) \prec t(\beta)$; 或应 β, 或那条从 $t(\beta)$ 发出的树边, 否则. 由于 y_β 和 x_α 分别为与 β 和 α 关联的唯一的上树变量和树变量, 即得引理结论. ♮

由引理 8.11 可以看出, 对于 G, 其平面性 0 辅助图 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的阶在 3 正则的条件下是 G 的阶的一个线性函数, 但 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的度仍然是 G 的阶的一个二次函数. 为了减少平面性辅助图的度, 可以想象分为两个阶段: 其一为判定平面性, 求出 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个子图, 使得它有奇权圈当且仅当 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 有奇权圈; 其二为将一个可平面图嵌入到平面上, 使得这个子图的连通片的数目与 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的相同. 并且它的度越小越好.

由于 $T_{\rm od}$ 是一条路, 偏序集 $(V, \preceq)$ 确定了一个线性序. 令 $S_{\rm eq}$ 为节点处相应的与此线性序一致的变量序列, 并且 $S_{\rm eq}$ 的最小和最大元分别记为 y 和 x. 这时, (y, x) 必为 G 的 Hamilton 圈上的那条上树边. 一个子序列

$$S_{\rm ub} = \tilde{y}_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta x_\alpha \tilde{x}_\gamma \ (\text{或 } y_\beta \tilde{y}_\alpha y_\gamma x_\beta \tilde{x}_\alpha x_\gamma),$$

$$y \preceq \tilde{y}_\beta \prec y_\alpha, x_\alpha \prec \tilde{x}_\gamma \preceq x \ (\text{或 } y \preceq y_\beta \prec \tilde{y}_\alpha, \tilde{x}_\alpha \prec x_\gamma \preceq x),$$

如果存在 l ($l = k \pmod 2$, $k \geqslant 1$), 使得

$$(\tilde{y}_\beta, x_\beta) = \begin{cases} y_k y_\alpha \left(\prod\limits_{\substack{i=1 \\ y_1=y_\beta}}^{k-1} y_i x_{i+1} \right) y_\gamma x_\beta, & k \geqslant 2, \\ y_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta, & k=1, \end{cases} \tag{8.1.1}$$

其中 $\tilde{y}_\beta = \begin{cases} y_k, & k \geqslant 2, \\ y_\beta, & k=1, \end{cases}$

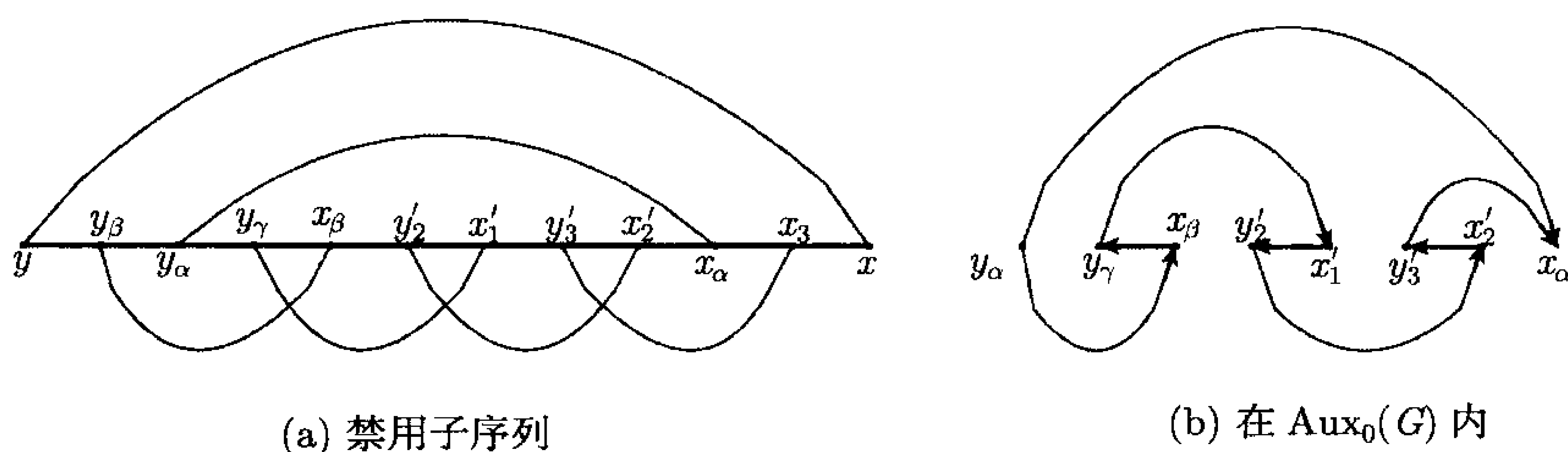
$$(y_\gamma, \tilde{x}_\gamma) = \begin{cases} y_\gamma x_\beta \left(\prod\limits_{\substack{i=1 \\ x_1=x_\gamma}}^{l-1} y'_{i+1} x'_i \right) x_\alpha x'_l, \\ y_\gamma x_\beta x_\alpha x_\gamma, \quad l=1, \end{cases} \tag{8.1.2}$$

其中 $\tilde{x}_\gamma = \begin{cases} x'_l, & l \geqslant 2, \\ x_\gamma, & l=1 \end{cases}$ (或如果存在一个 $k=1 \pmod 2$, $k \geqslant 3$, 使得 $S_{\rm eq}(G)$ 有如下的子序列:

$$(\tilde{y}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) = y_k y_\gamma \left(\prod_{i=1}^{k-1} y_i x_{i+1} \right) x_\beta x_1,$$

其中 $\tilde{y}_\alpha = y_k$, $\tilde{x}_\alpha = x_1$), 则称之为**禁用的**.

图 8.1.1(a) 给出一个禁用子序列, 图 8.1.1(b) 为这个子序列在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中相应的部分. 由 3 正则性和确向树在 Hamilton 圈上, 在每个节点处至多有一个变量, $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的节点与原图上相同, 但意义不同.



(a) 禁用子序列　　(b) 在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 内

图 8.1.1

引理 8.1.2 一个确向树 $T_{\rm od}$ 在 Hamilton 圈上的 3 正则图 G 是可平面的当且仅当 $S_{\rm eq}(G)$ 不含禁用的子序列.

证 先证必要性. 设 $S_{\rm eq}(G)$ 有一个禁用子序列 $S_{\rm ub} = \tilde{y}_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta x_\alpha \tilde{x}_\gamma$, 则由于总能在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中发现一个奇权圈, 如图 8.1.1 对于 (8.1.1) 式和 (8.1.2) 式中 $k=1$

和 $l=3$ 所示, 从定理 6.4.1 可得 G 必为非可平面的. 注意, 在图 8.1.1(a) 中, 横线表示 $T_{\rm od}$. 而在图 8.1.1(b) 中, 粗线表示权为 1, 箭头显示了依 $S_{\rm ub}$ 的线性序求出一个奇权圈的过程.

反之, 用对于一般 3 正则 Hamilton 图的引理 7.2.6, 借助于枚举可能之情形, 即可发现只要 G 是非可平面的, 则必导致一个禁用子序列的出现. ♮

只要 G 被确定是可平面的 (因为假定 G 是 3 正则的且有一个确向树 $T_{\rm od}$ 在一个 Hamilton 圈上, 可以用引理 8.1.2 的证明中提到的方法), 总能沿 G 上由 $T_{\rm od}$ 所确定的线性序, 求得 ${\rm Aux}_0(G)$ 的一个支撑森, 使得它的连通片的数目与 ${\rm Aux}_0(G)$ 的相同, 并且称这样的森为 G 的**平面性 c 辅助图**, 记为 ${\rm Aux}_c(G)$. 为了使 G 的浸入是唯一确定的, 总是将其上的那个 Hamilton 圈作为平面上的一个 Jordan 闭曲线. 所有不在这个圈上的边全放在这个曲线之同侧 (如内部或外部), 这时, 方程 (6.3.5) 必为如下形式:

$$\left.\begin{aligned} &y_\alpha+x_\alpha=0, \quad \forall\alpha\in T^*_{\rm od},\\ &y_\alpha+x_\beta=1, \quad \forall\alpha,\beta\in T^*_{\rm od}, \end{aligned}\right\} y_\alpha\prec x_\beta\prec x_\alpha\prec x_\beta. \tag{8.1.3}$$

由 (8.1.3) 式中第一类型的方程, 所有的解必为 $x_\alpha=y_\alpha$ $(\alpha\in T^*_{\rm od})$ 的形式, 从而上树边可以分为如下两类:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}_0=\{\alpha|\forall\alpha\in T^*_{\rm od}, y_\alpha=x_\alpha=0\},\\ &\mathcal{A}_1=\{\alpha|\forall\alpha\in T^*_{\rm od}, y_\alpha=x_\alpha=1\}. \end{aligned}\right. \tag{8.1.4}$$

定理 8.1.1　任何一个 3 正则可平面图 G 若有一个确向树 $T_{\rm od}$ 在一个 Hamilton 圈上, 则必有这样的一个平面嵌入, 使得所有 $\mathcal{A}_0$ 中的边皆在 $T_{\rm od}$ 的右 (或左) 侧, 而所有 $\mathcal{A}_1$ 中的边皆在 $T_{\rm od}$ 的左 (或右) 侧.

证　由定理 6.4.1 可知方程 (8.1.3) 在 ${\rm Aux}_c(G)$ 上的任何一组解均可以延拓到 ${\rm Aux}_0(G)$ 上. 按照 (8.1.3) 式的第二类方程, 如果 $\alpha,\beta\in T^*_{\rm od}$ 在上述的浸入中交叉, 则它们不可能属于 (8.1.4) 式中的同一类, 即 $\alpha\in\mathcal{A}_0$ 和 $\beta\in\mathcal{A}_1$, 或者 $\alpha\in\mathcal{A}_1$ 和 $\beta\in\mathcal{A}_0$, 从而定理得证. ♮

另一方面, 也许人们会想到利用 ${\rm Aux}_1(G)$. 同样地, 对于 3 正则的图, 但其上有一个确向树是路, 不限定在 Hamilton 圈上. 因为 $T_{\rm od}$ 是一条路, 在由 (6.4.6) 式所定义的 $T^*_{\rm od}$ 上, 或相应地, $V^1_{\rm au}(G)$ 上的偏序 $*\!\prec$ 变为如下确定的线性序:

$$\alpha *\!\prec \beta \Leftrightarrow h(\alpha)\prec h(\beta).$$

进而, 还允许定义另一个在 $T^*_{\rm od}$(或相应地, $\mathcal{X}_G(T)$) 上的线性序, 用 $\prec\!*$ 表示: $\forall\alpha,\beta\in T^*_{\rm od}(x_\alpha,x_\beta\in\mathcal{X}_G(T))$,

$$\alpha\prec\!*\,\beta\ (\text{或}\ x_\alpha\prec\!*\,x_\beta)\Leftrightarrow t(\alpha)\prec t(\beta). \tag{8.1.5}$$

由引理 8.1.1, 在这里有

$$|\mathcal{X}_G(T)| \leqslant \nu. \tag{8.1.6}$$

对于一对上树变量 (y_α, y_β), 若在 $\cdot \prec$ 或者就 3 正则的情形, 同样地 $\preceq$ 之下, α 覆盖 β 或 α 被 β 所覆盖, 则 α 和 β 被称为**相继的**.

令 $\mathcal{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od})$ 是所有那些 $\mathcal{A}_0(G;T^*_{\rm od})$ 中相邻而且相继的上树边对的集合. 当然, 如 (6.4.9) 式所定义的, 总有

$$\mathcal{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od}) \subseteq \mathcal{A}_0(G;T^*_{\rm od}) \subset E^1_{\rm au}(G)$$

且在 3 正则情形下,

$$|\mathcal{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od})| \leqslant \nu(G). \tag{8.1.7}$$

记 $\mathcal{A}_{0n}(G;T^*_{\rm od}) = \mathcal{A}_0(G;T^*_{\rm od}) - \mathcal{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od})$. 由于对任何 $(y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_{0n}(G;T^*_{\rm od})$, 从 (6.4.8) 式和 (6.4.10) 式可知总有 $\xi \in T^*_{\rm od}$ 出现在引理 6.4.7 所定义的类型 C 中, 使得

$$\begin{cases} h(\alpha) \prec h(\xi) \prec h(\beta), \\ t(\xi) \preceq \langle t(\alpha), t(\gamma) \rangle. \end{cases}$$

令 $t(\xi_0) = \max t(\xi)$, 其中 ξ 取遍所有满足上述性质的. 定义一个映射

$$\tau : \mathcal{A}_{0n}(G;T^*_{\rm od}) \to \mathcal{X}_G(T),$$

使得

$$\tau(y_\alpha, y_\beta) = x_{\xi_0}. \tag{8.1.8}$$

引理 8.1.3 映射 τ 是一个单射.

证 用反证法. 不失一般性, 假设 (y_α, y_β), $(y_\gamma, y_\delta) \in \mathcal{A}_{0n}$ $(G;\ T^*_{\rm od})$, 使得 $\tau(y_\alpha, y_\beta) = \tau(y_\gamma, y_\delta) = x_\xi$ 且 $\alpha < \beta, \gamma \prec \delta$, $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$. 由 x_ξ 的定义, $(h(\alpha), h(\beta))$ 与 $(h(\gamma), h(\delta))$ 不允许是交错的. 因此, 不计对称性, 只可能有两种情形发生.

情形 1 $h(\alpha) \preceq (\gamma) \prec h(\xi) \prec h(\delta) \preceq h(\beta)$ 且不是 $h(\alpha) \prec h(\gamma)$, 就是 $h(\delta) \prec h(\beta)$. 因为 $(y_\gamma, y_\delta) \in \mathcal{A}_0(G;T^*_{\rm od})$, 即 γ 和 δ 在类型 C 中, 则有

$$\max\{t(\delta), t(\gamma)\} \prec \min\{t(\alpha), t(\beta)\}.$$

然而, 由于 $t(\xi) \prec \min\{t(\gamma), t(\delta)\}$, 必有 $\tau(y_\alpha, y_\beta) \neq x_\xi$. 与 $\tau(y_\alpha, y_\beta) = x_\xi$ 的前提条件矛盾.

情形 2 $h(\gamma) \prec h(\alpha) \prec h(\xi) \prec h(\beta) \prec h(\delta)$. 因为 $(y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_0(G;T^*_{\rm od})$, 必有 $t(\xi) \prec \min\{t(\alpha), t(\beta)\}$. 又与 $\tau(y_\gamma, y_\delta) = x_\xi$ 的条件矛盾.

因此, 只能引理结论成立. ♮

由 (8.1.6) 式和引理 8.1.3 即得

$$|\mathcal{A}_{0n}(G;T^*_{od})| \leqslant \nu(G). \tag{8.1.9}$$

进而, 由于在这里的情形下, 根据引理 5.4.6, 每一个树变量至多关联一对上树变量, 使得在类型 A 或类型 B 中出现, 故

$$|\mathcal{A}_1(G;T^*_{od})| \leqslant \nu(G). \tag{8.1.10}$$

定理 8.1.2　对任何 3 正则且有一个确向树为路 (不一定在 Hamilton 圈上) 的图 G 有

$$|E^1_{au}(G)| \leqslant 3\nu(G). \tag{8.1.11}$$

证　由 (6.4.9) 式和上面所讨论的有

$$E^1_{au}(G) = \mathcal{A}_{0s}(G;T^*_{od}) + \mathcal{A}_{0n}(G;T^*_{od}) + \mathcal{A}_1(G,T^*_{od}),$$

则由 (8.1.7) 式、(8.1.9) 式和 (8.1.10) 式, 即得定理结论. ♮

类似地, 对于任何有一确向树 T_{od} 为路的图 G(不一定是 3 正则的), 因为引理 8.1.1 和 (8.1.5)~(8.1.10) 式均可延伸到这种情形, 其平面性 1 辅助图 $\text{Aux}_1(G)$ 也满足关系 (8.1.11) 式. 正如文献 (Sun, X.R.[1]) 中所示, 需要特别指出的只是 (8.1.8) 式中的 ξ_0 用 ξ'_0 代替, 其中 $h(\xi'_0) = \min\{h(\xi)|h(\alpha) \prec h(\xi) \prec h(\beta),\ t(\xi) = t(\xi_0)\}$. 同时, 由于这时在每个节点处, 允许更多的上树边发出, 而不是在 3 正则时只有一个, 在 $\mathcal{X}_G(T)$ 上的线性序 $\prec *$ 也需要延拓到这种较一般的情形. 不过, 也可以将这种情形变换为 3 正则的情形. 下一节将会详述这一想法.

而且, 通过将确向树 T_{od} 划分为路, 将 G 上的问题分解为对于路的, 在最一般的情形, 也可以得到与定理 8.1.2 类似的结果. 只不过要通过一系列的处理之后, 才能实现这种分解.

8.2　禁 用 构 形

令 $(V,\preceq)$ 为由图 $G=(V,E)$ 上的一个确向树所确定的偏序集. 这一节及下一节的目的在于求禁用构形的完备集. 所谓*禁用构形*, 在这里就是指这样的一类极小子图, 使得它的出现必导致其基准图 (或者说, 母图) 为非可平面的, 而且它本身不再有这种性质的真子图. 其*完备集* 就是指任何非可平面图均有它的一个元素作为禁用构形, 而且这里的禁用构形是用序关系 $\preceq$ 描写的, 以便于建立算法. 由与 6.3 节中类似的讨论, 因为任何极小的非可平面图, 特别是禁用构形, 必均为 3 连通的,

这里仍可只局限于 3 连通的图而不失一般性, 也常称这种对于平面性的禁用构形为**平面性障碍**.

首先, 还是研究 Hamilton 图, 并且确向树限制在其上. 令 G 就是这种图, 它的确向树 T_{od} 是一条 Hamilton 路, 对于 $v \in V$, 记

$$\begin{cases} B(v) = \{\alpha | \forall \alpha \in T^*_{\text{od}}(\alpha \neq \alpha_0),\ t(\alpha) = v\}, \\ H(v) = \{\alpha | \forall \alpha \in T^*_{\text{od}}(\alpha \neq \alpha_0),\ h(\alpha) = v\}, \end{cases} \tag{8.2.1}$$

其中 α_0 是 Hamilton 圈上的那条上树边. 因为 T_{od} 是 Hamilton 圈上的路, 则有 $\forall v \in C$,

$$\rho(v) = |B(v)| + |H(v)| + 2. \tag{8.2.2}$$

由 G 无重边, 可记

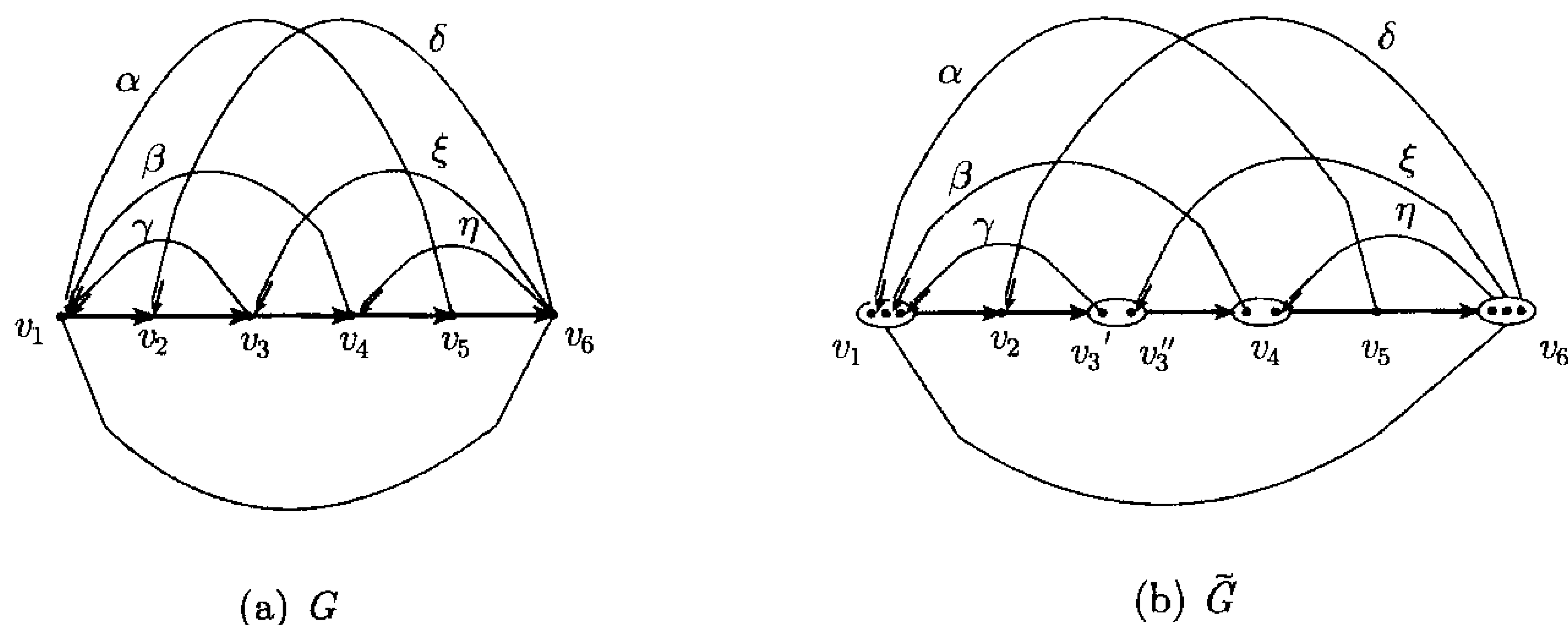
$$\begin{cases} B(v) = \{\alpha'_i | h(\alpha'_1) \prec h(\alpha'_2) \prec \cdots \prec h(\alpha'_t)\}, \\ H(v) = \{\alpha_i | t(\alpha_1) \prec t(\alpha_2) \prec \cdots \prec t(\alpha_h)\}, \end{cases} \tag{8.2.3}$$

其中 $t = |B(v)|$ 和 $h = |H(v)|$.

对任何 $v \in V$, $\rho(v) > 3$, 用 $\rho(v) - 2$ 个节点的路 $v'_1 \prec v'_2 \prec \cdots \prec v'_t \prec v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_h$ (v'_t 处在 v 的位置) 在 T_{od} 上代替 v, 使得

$$\begin{cases} t(\alpha'_{t+1-i}) = v'_i, & i = 1, 2, \cdots, t, \\ h(\alpha_j) = v_{h+1-j}, & j = 1, 2, \cdots, h. \end{cases} \tag{8.2.4}$$

将所得的图用 $\tilde{G}$ 表示, 则 $\tilde{G}$ 是 3 正则的, 并且其上的确向树 $\widetilde{T_{\text{od}}}$ 是在 Hamilton 圈上的一条路, 如图 8.2.1 所示. 称从 G 到 $\tilde{G}$ 的每一步, 甚至整个过程为**伸长**. 伸长的逆运算被称为**缩短**.



(a) G　　(b) $\tilde{G}$

图 8.2.1

引理 8.2.1　一个确向树在 Hamilton 圈上的图 G 是可平面的当且仅当如上所确定的 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是可平面的.

证　事实上, 若在 $T^*_{\rm od}$ 上的线性序, 取为与 $\tilde{G}$ 由 $\widetilde{T_{\rm od}}$ 所确定的偏序集 $(\tilde{V},\preceq)$ 一致, 由于 $\widetilde{T_{\rm od}}$ 是一条路, 只有引理 5.4.7 中的类型 A 和类型 C 允许在 G 中出现, 进而容易验证, $\mathrm{Aux}_1(G)\cong\mathrm{Aux}_1(\tilde{G})$, 其中 G 和 $\tilde{G}$ 中上树变量之间的自然对应所导致的 $V^1_{\rm au}(G)$ 和 $V^1_{\rm au}(\tilde{G})$ 之间的对应就是 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 和 $\mathrm{Aux}_1(\tilde{G})$ 之间的一个同构, 从而由定理 5.4.2, 即得引理结论. ♮

基于引理 8.2.1, 可以在给定的条件下, 作出对 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 度的估计.

定理 8.2.1　对于一个确向树在 Hamilton 圈上的图 $G=(V,E)$ 有

$$\varepsilon(\mathrm{Aux}_1(G))\leqslant 12\nu(G)-36. \tag{8.2.5}$$

证　由定理 8.1.2 可知 $\varepsilon(\mathrm{Aux}_1(\tilde{G}))\leqslant 3\nu(\tilde{G})$. 因为根据 6.1 节中所讨论的, 可以得到

$$\varepsilon(G)=|E(G)|\leqslant 3\nu(G)-6,$$

在 $\tilde{G}$ 中至多有

$$2(3\nu(G)-6-\nu(G)+1-1)=3\nu(G)-12$$

个附加的节点, 而且由引理 8.2.1 的证明过程可得

$$\varepsilon(\mathrm{Aux}_1(G))=\varepsilon(\mathrm{Aux}_1(\tilde{G}))\leqslant 3(\nu(G)+3\nu(G)-12),$$

从而即得 (8.2.5) 式. 定理得证. ♮

在一个确向树 $T_{\rm od}$ 为 Hamilton 圈上的路的图 $G=(V,E)$ 中, 若两个上树边 $\alpha,\beta\in T^*_{\rm od}$ 满足

$$h(\alpha)\preceq h(\beta)\preceq t(\beta)\preceq t(\alpha),$$

则称它俩是*平行的*, 并用 $\alpha//\beta$ 表示; 如果

$$h(\alpha)\prec h(\beta)\prec t(\alpha)<t(\beta),$$

则称它们为*交错的*, 并用 $\alpha\bowtie\beta$ 表示; 否则, 称它们是*串行的*, 记为 $\alpha|-|\beta$, 或者说满足关系

$$h(\alpha)\prec t(\alpha)\preceq h(\beta)\prec t(\beta).$$

引理 8.2.2　一个确向树 $T_{\rm od}$ 在 Hamilton 圈上的图 G 是可平面的当且仅当除在 Hamilton 圈上的那条上树边外, 所有的上树边可划分为两类: I 和 O, 使得在同一类的任何两条边均非交错的.

证 由引理 8.2.1, 只需讨论 $\tilde{G}$. 它是 3 正则的, 而且确向树 $\widetilde{T_{\rm od}}$ 在 Hamilton 圈上. 由引理 7.2.6, $\tilde{G}$ 有两个 Dyck 字, 而且每个 Dyck 字确定了一类上树边, 使得其中的任两边都不交错. 同时, 由 (8.2.4) 式可知 G 中的两个上树边是交错的当且仅当它们在 $\tilde{G}$ 中的相应边是交错的. 由引理 8.2.1 即可得引理的结论. ♮

在一个图 $G=(V,E)$ 中, 确向树 $T_{\rm od}$ 确定了一个偏序集 $(V,\preceq)$. 任何两个节点 u 和 v, 若满足如下的条件:

(1) $\forall w\in V\ (u\prec w\prec v)$, $\rho_G(w)=2$, 或者 u 被 v 覆盖;

(2) $\max\{t(\alpha)|\forall\alpha\in T_{\rm od}^*, h(\alpha)=v\}\prec\min\{t(\beta)|\forall\beta\in T_{\rm od}^*,\ h(\beta)=u\}$;

(3) $\max\{h(\alpha)|\forall\alpha\in T_{\rm od}^*, t(\alpha)=v\}\prec\min\{h(\beta)|\forall\beta\in T_{\rm od}^*,\ t(\beta)=u\}$,

则被称为**可缩短的**. 由条件 (1) 也可以说路 $P(u,v)$ 是可缩短的. 如果 $T_{\rm od}$ 在一个 Hamilton 圈上, 则 G 是可平面的当且仅当

$$G'=\prod_{e\in P(u,v)}G\cdot e$$

是可平面的, 其中 $P(u,v)$ 是一条可缩短的路. 若一个图 H 可以从 G 经过一系列地收缩 $T_{\rm od}$ 上可缩短路上的边而得到, 则称 G **可缩短到** H.

定理 8.2.2 一个确向树 $T_{\rm od}$ 在 Hamilton 圈上的图 G 是可平面的当且仅当 G 没有一个子图可缩短到如下的构形 A 或构形 B:

构形 A $\exists\alpha,\beta,\gamma,\delta\in T_{\rm od}^*$,

$$h(\delta)=h(\dot\beta)\prec h(\alpha)\prec h(\dot\gamma)\prec h(\dot\beta)\prec t(\alpha)\prec t(\dot\gamma)=t(\delta),$$

其中对于某 $l=k\ ({\rm mod}\ 2)$,

$$\dot\beta=\begin{cases}\beta, & l=1,\\ h(\beta_l)\left(\prod_{i=1}^{l-1}h(\beta_i)t(\beta_{i+1})\right)t(\beta_1), & l\geqslant 1.\end{cases}\tag{8.2.6}$$

这里, $h(\delta)=h(\beta_l)=h(\dot\beta)$, $h(\beta_{l-1})=h(\alpha)$, $t(\beta_2)=h(\dot\gamma)$, $t(\beta_1)=t(\dot\beta)$, $t(\beta_i)=h(\beta_{i-2})$, $i=3,4,\cdots,l$, $\beta_i\in T_{\rm od}^*$, $1\leqslant i\leqslant l$, 以及

$$\dot\gamma=\begin{cases}\gamma, & k=1,\\ h(\gamma_1)\left(\prod_{i=2}^{k}h(\gamma_i)t(\gamma_{i-1})\right)t(\gamma_k), & k>1.\end{cases}\tag{8.2.7}$$

这里, $h(\gamma_1)=h(\dot\gamma)$, $h(\gamma_2)=t(\dot\beta)$, $t(\gamma_{k-1})=t(\alpha)$, $t(\gamma_k)=t(\dot\gamma)=t(\delta)$, $t(\gamma_i)=h(\gamma_{i+2})$, $i=1,2,\cdots,k-2$, $\gamma_i\in T_{\rm od}^*$, $1\leqslant i\leqslant k$.

构形 B　$\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in T_{\mathrm{od}}^*$,

$$h(\delta) = h(\beta) = h(\hat{\alpha}) \prec h(\gamma) \prec t(\beta) \prec t(\hat{\alpha}) = t(\gamma) = t(\delta),$$

其中对某 $r = 1 \pmod 2$,$r \geqslant 3$,

$$\hat{\alpha} = h(\alpha_1)h(\alpha_2)\left(\prod_{i=1}^{r-2} t(\alpha_i)h(\alpha_{i+2})\right)t(\alpha_{r-1})t(\alpha_r). \tag{8.2.8}$$

这里, $h(\hat{\alpha}) = h(\alpha_1) = h(\beta) = h(\delta)$, $h(\alpha_2) = h(\gamma)$, $t(\alpha_{r-1}) = t(\beta)$, $t(\hat{\alpha}) = t(\alpha_r) = t(\gamma) = t(\delta)$, $t(\alpha_i) = h(\alpha_{i+2})$, $i = 1, 2, \cdots, r-2$, $\alpha_i \in T_{\mathrm{od}}^*$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

证　由引理 8.2.1 可以只讨论 3 正则图 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, 其中确向树为 $\widetilde{T_{\mathrm{od}}}$. 因为 $\tilde{G}$ 经过伸长所得到. 从 $\tilde{G}$ 的一个确向树 T_{od} 在 Hamilton 圈上可知, $\widetilde{T_{\mathrm{od}}}$ 也是在 Hamilton 圈上.

根据定理 8.1.1, $\tilde{G}$ 是可平面的当且仅当 $\tilde{G}$ 不含有一个禁用序列

$$S_{\mathrm{ub}1} = \tilde{y}_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta x_\alpha \tilde{x}_\gamma \quad 或 \quad S_{\mathrm{ub}2} = y_\beta \tilde{y}_\alpha y_\gamma x_\beta \tilde{x}_\alpha x_\gamma.$$

因为 $\widetilde{T_{\mathrm{od}}}$ 在 Hamilton 圈上, 于是总可选择 δ 为 Hamilton 圈上的那条上树边. 可以看出, $S_{\mathrm{ub}1}$ 在 $\tilde{G}$ 中出现当且仅当构形 A 在 G 中出现, $S_{\mathrm{ub}2}$ 在 $\tilde{G}$ 中出现当且仅当构形 B 在 G 中出现. 事实上, 通过缩短即可得到, 从而由引理 8.2.1 即可导出定理结论. ♮

当然, 可以用引理 8.2.2, 通过与定理 8.1.1 的证明类似的方式, 直接证明定理 8.2.2. 但是, 定理 8.2.2 不能简单地引申到确向树为路, 但不在 Hamilton 圈上的情形. 在下一节将会看到, 一般的图的平面性禁用构形的表征.

现在开始考察确向树是路, 但不一定在 Hamilton 圈上情形下的平面性 1 辅助图 $\mathrm{Aux}_1(G; T_{\mathrm{od}}^*)$, 以便直接估计它的度.

令 $(V, \preceq)$ 为 T_{od} 在 $G = (V, E)$ 上所确定的偏序集. 由定理 8.1.1, 这时仍允许用上树边区别树变量, 即 $\mathcal{X}_G(T) = \{x_\alpha | \forall \alpha \in T_{\mathrm{od}}^*\}$. 因为可能会出现 $\alpha, \beta \in T_{\mathrm{od}}^*$, 使得 $h(\alpha) = h(\beta)$ 或者 $t(\alpha) = t(\beta)$. 这个偏序集 $(V, \preceq)$ 不能导致 $\mathcal{Y}_G(T)$ 或 $\mathcal{X}_G(T)$ 上的一个线性序, 定义 $\forall \alpha, \beta \in T_{\mathrm{od}}^*$,

$$y_\alpha * \prec y_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \prec \beta, & h(\alpha) \prec h(\beta), \\ t(\alpha) \succ t(\beta), & 否则 \end{cases} \tag{8.2.9}$$

和

$$x_\alpha \prec * \; x_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} t(\alpha) \prec t(\beta), & 当\ t(\alpha) \neq t(\beta), \\ h(\alpha) \succ h(\beta), & 否则. \end{cases} \tag{8.2.10}$$

容易验证, $*\prec$ 和 $\prec*$ 分别为 $\mathcal{Y}_G(T)$ 和 $\mathcal{X}_G(T)$ 上的线性序. 当 (8.2.9) 式所定义的 $*\prec$ 作为 T^*_{od} 上的线性序时, 似乎仅是 (6.4.6) 式所定义的一种特殊情形. 然而, 在这里, 它们之间无异.

若两个变量 $y_\alpha, y_\beta \in \mathcal{Y}_G(T)$, 其中一个覆盖另一个, 则也称它们是**相继的**, 并且用 $y_\alpha\ \mathrm{suc}_{*\prec}\ y_\beta$ 或反之表示. 令

$$\mathcal{A}_{0\mathrm{s}}(G;T^*_{\mathrm{od}}) = \Big\{(y_\alpha, y_\beta)|\forall(y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_0(G;T^*_{\mathrm{od}}), y_\alpha\ \mathrm{suc}_{*\prec}\ y_\beta\Big\} \tag{8.2.11}$$

和

$$\mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G;T^*_{\mathrm{od}}) = \mathcal{A}_0(G;T^*_{\mathrm{od}}) - \mathcal{A}_{0\mathrm{s}}(G;T^*_{\mathrm{od}}),$$

则这时平面性 1 辅助图 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的边集为

$$E^1_{\mathrm{au}}(G) = \mathcal{A}_{0\mathrm{s}}(G;T^*_{\mathrm{od}}) + \mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G;T^*_{\mathrm{od}}) + \mathcal{A}_1(G;T^*_{\mathrm{od}}). \tag{8.2.12}$$

引理 8.2.3 对于确向树 T_{od} 为图 $G=(V,E)$ 中的路有

$$|\mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G;T^*_{\mathrm{od}})| \leqslant \nu(G). \tag{8.2.13}$$

证 首先, 可以造一个映射

$$\tau : \mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G;T^*_{\mathrm{od}}) \to \mathcal{X}_G(T),$$

使得对任何 $(y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G;T^*_{\mathrm{od}})$, $\tau(y_\alpha, y_\beta) = x_\xi$, 其中

$$x_\xi = \min_{*\prec}\Big\{x_\gamma|\forall\gamma \in T^*_{\mathrm{od}}, y_\alpha * \prec y_\gamma * \preceq y_\beta\Big\}. \tag{8.2.14}$$

然后, 证明 τ 是一个单射. 假若不然, 设 $(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1})$, $(y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) \in \mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G;T^*_{\mathrm{od}})$, $\tau(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) = \tau(y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) = x_\xi$. 不失一般性, 总可以令 $y_{\alpha_1} * \prec y_{\beta_1}$, $y_{\alpha_2} * \prec y_{\beta_2}$, 但 $(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) \neq (y_{\alpha_2}, y_{\beta_2})$. 由相邻性, 只需讨论两个可能情形.

情形 1 $y_{\alpha_2} * \prec y_{\alpha_1} * \prec y_{\beta_1} * \prec y_{\beta_2}$. 自然, 至多 $y_{\alpha_2} = y_{\alpha_1}$ 和 $y_{\beta_1} = y_{\beta_2}$ 之一成立. 然而, 这时有

$$t(\xi) \prec \min\{t(\alpha_1), t(\beta_1)\} \leqslant \min\{t(\alpha_2), t(\beta_2)\}.$$

由 6.4 节中类型 C 的定义, 可不妨假设 α_1 满足

$$y_{\alpha_2} * \prec y_{\alpha_1} * \prec y_{\beta_2}.$$

由于 $t(\alpha_1) \succ t(\xi)$, 这就导致与 $\tau(y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) = x_\xi$ 矛盾.

情形 2　$y_{\alpha_1} *\prec y_{\alpha_2} *\prec y_{\beta_2} *\prec y_{\beta_1}$. 由相邻性和类型 C 的定义, 只可能

$$t(\xi) \prec \max(t(\alpha_1), t(\beta_1)) \prec \min(t(\alpha_2), t(\beta_2)).$$

然而, 这又会导致与 $\tau(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) = x_\xi$ 矛盾.

这样, 由单射性即得

$$|\mathcal{A}_{0\mathrm{n}}(G; T^*_{\mathrm{od}})| \leqslant |\mathcal{X}_G(T)| \leqslant 3\nu(G) - 6.$$

引理得证. ♮

定理 8.2.3　若确向树 T_{od} 是图 $G = (V, E)$ 上的一条路, 则有

$$|E^1_{\mathrm{au}}(G)| \leqslant 9\nu(G) - 19. \tag{8.2.15}$$

证　因为确向树 T_{od} 为 G 上的路, 在

$$\mathcal{A}_1(G; T^*_{\mathrm{od}}) (\subseteq E^1_{\mathrm{au}}(G))$$

中的每一条边只允许与一个类型 A 关联 (见 6.4 节). 对于 $x_\alpha \in \mathcal{X}_G(T)$, 由 (5.4.4) 式知在 $\mathcal{A}_1(G; T^*_{\mathrm{od}})$ 中, 至多有一对相邻的上树变量. 也就是说,

$$|\mathcal{A}_1(G; T^*_{\mathrm{od}})| \leqslant |\mathcal{X}_G(T)| \leqslant 3\nu - 6. \tag{8.2.16}$$

由 (8.2.12) 式, (8.2.15) 式, (8.2.16) 式和

$$|\mathcal{A}_{0\mathrm{s}}(G; T^*_{\mathrm{od}})| \leqslant |\mathcal{Y}_G(T)| - 1 \leqslant 3\nu - 7$$

可得

$$|E^1_{\mathrm{au}}(G)| \leqslant 3(3\nu(G) - 6) - 1 = 9\nu(G) - 19.$$

这就是定理的结论. ♮

8.3 基本序表征

令 $G = (V, E)$ 是一个一般的图, 当然, 它是连通的, 其上的确向树为 T_{od}. 由 T_{od} 所确定的偏序集 $(V, \preceq)$ 导出一个序, 并称之为 G 的*基本序*, 用 $*\prec$ 表示. 由 (6.4.6) 式所定义的就是一例. 将 T^*_{od} 视为所有上树边的集合时, $*\prec$ 是定义在 T^*_{od} 上的. 基于这个基本序, 在 6.4 节中定义了平面性 1 辅助图 $\mathrm{Aux}_1(G)$.

引理 8.3.1　一个图 $G = (V, E)$, T_{od} 为其上的一个确向树, G 是可平面的当且仅当所有 T^*_{od} 中的上树边, 可以划分为两类: $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$, 使得在同一类中的任两

个上树边均不会同出现在类型 A 或类型 B 中 (在引理 6.4.7 中定义的)和任两个出自不同类的上树边不会同出现在类型 C 中(也在引理 6.4.7 中给出了定义).

证 若 G 是可平面的, 则由定理 6.4.2(5) 可知 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 是平衡的. 令 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 分别为所有那些两端同带 "+" 和 "−" 的上树边的集合. 由定理 6.4.2(4) 可知任何两条同在 $\mathcal{P}_1$ 或 $\mathcal{P}_2$ 中的上树边, 不可能同出现在类型 A 或类型 B 中, $\mathcal{P}_1$ 中的任何一条上树边均不可能与 $\mathcal{P}_2$ 中的任一边同出现在类型 C 中. 这就得到了必要性.

反之, 根据 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 所满足的性质, 那些权为 1 的边的两端, 只能分别属于 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$, 故它们形成 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的一个 1 上边缘. 由定理 6.4.2(4) 即得充分性. ♮

对于两条上树边 $\alpha,\beta\in T^*_{\mathrm{od}}$, 用 $\alpha\ \mathrm{Sam}_0\ \beta$ 表示它们同在一个类型 C 中, 用 $\alpha\ \mathrm{Dif}_0\ \beta$ 表示它们同在一个类型 A 或类型 B 中. 当然, Sam_0 和 Dif_0 均具有对称性, 则引理 8.3.1 建议将 Sam_0 和 Dif_0 延伸到那些尚未定这些关系的上树边对上, 而成为 Sam 和 Dif, 使得满足如下的准则:

准则 1 $(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Dif}\ \gamma)\Rightarrow\alpha\ \mathrm{Sam}\ \gamma$.

准则 2 $(\alpha\ \mathrm{Sam}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Sam}\ \gamma)\Rightarrow\alpha\ \mathrm{Sam}\ \gamma$.

准则 3 $(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Sam}\ \gamma)\Rightarrow\alpha\ \mathrm{Dif}\ \gamma$.

对于两条上树边 $\alpha,\beta\in T^*_{\mathrm{od}}$, 可能会产生这样的情形: 一方面得到 $\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta$, 而另一方面却又得到 $\alpha\ \mathrm{Sam}\ \beta$. 如果对任何一对上树边, 均不出现这种情形, 则称这两个关系为在 T^*_{od} 上*适定的*.

引理 8.3.2 在一个图 $G=(V,.E)$ 上, 对于确向树 T_{od} 的所有上树边可以划分为如引理 8.3.1 所描述的两类 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 当且仅当 Dif 和 Sam 在 T^*_{od} 上是适定的.

证 记 $\widetilde{\mathrm{Aux}}_1(G)$ 为在 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 上添加所有那些边, 使得代表其两端的上树边满足 Dif 或者 Sam. 由引理 8.3.1 和定理 6.4.2, 只需要证明 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 上有奇权圈当且仅当在 $\widetilde{\mathrm{Aux}}_1(G)$ 上有奇权圈. 事实上, 准则 1∼ 准则 3 不会产生新的奇权圈 (只要 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 不含奇权圈), 也绝不会减没奇权圈 (若 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 有奇权圈), 从而引理得证. ♮

定理 8.3.1 一个图 $G=(V,E)$, 若 $*\!\prec$ 为由确向树所确定的, 定义在 T^*_{od} 上的一个基本序, 则 G 是可平面的当且仅当在 G 中没有如下构形 1∼ 构形 5 中的一个:

构形 1 $\exists\alpha,\beta\in T^*_{\mathrm{od}}(\alpha *\!\prec\beta)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Dif}_0\beta)\wedge(\alpha\ \mathrm{Sam}_0\beta).$$

构形 2 $\exists\alpha,\beta,\gamma\in T^*_{\mathrm{od}}(\alpha *\!\prec\beta *\!\prec\gamma)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Dif}\ \gamma)\wedge(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \gamma).$$

构形 3　$\exists\alpha,\beta,\gamma \in T^*_{\text{od}}(\alpha *\!\!\prec \beta *\!\!\prec \gamma)$,

$$(\alpha \text{ Sam } \beta) \wedge (\beta \text{ Sam } \gamma) \wedge (\alpha \text{ Dif } \gamma).$$

构形 4　$\exists\alpha,\beta,\gamma \in T^*_{\text{od}}(\alpha *\!\!\prec \beta *\!\!\prec \gamma)$,

$$(\alpha \text{ Dif } \beta) \wedge (\beta \text{ Sam } \gamma) \wedge (\alpha \text{ Sam } \gamma).$$

构形 5　$\exists\alpha,\beta,\gamma \in T^*_{\text{od}}(\alpha *\!\!\prec \beta *\!\!\prec \gamma)$,

$$(\alpha \text{ Sam } \beta) \wedge (\beta \text{ Dif } \gamma) \wedge (\alpha \text{ Sam } \gamma).$$

证　由引理 8.3.1 和引理 8.3.2, 若 G 是可平面的, 则 Dif 和 Sam 为适定的. 假若构形 1∼ 构形 5 中之一出现, 则 Dif 和 Sam 就不可能是适定的. 因为这时必出现两个上树边同时满足 Dif 和 Sam, 从而必要性得证.

反之, Dif 和 Sam 必皆适定. 若不然, 下面两种情形之一必发生.

情形 1　$\exists\alpha,\beta \in T^*_{\text{od}}$, $(\alpha \text{ Dif}_0\ \beta) \wedge (\alpha \text{ Sam}_0\ \beta)$ 这就是构形 1. 与前提条件矛盾.

情形 2　$\exists\alpha,\beta \in T^*_{\text{od}}$, $(\alpha \text{ Dif } \beta) \wedge (\alpha \text{ Sam } \beta)$. 由上面的准则, 必存在 $\gamma \in T^*_{\text{od}}$,

$$\gamma *\!\!\prec \alpha *\!\!\prec \beta, \quad \alpha *\!\!\prec \gamma *\!\!\prec \beta,$$

或者 $\alpha *\!\!\prec \beta *\!\!\prec \gamma$. 不妨假设 $\alpha *\!\!\prec \beta *\!\!\prec \gamma$, 使得构形 2∼ 构形 5 中之一出现. 又与前提条件矛盾.

从而, 由引理 8.1.2 和引理 8.1.1, 充分性得证.　♮

虽然定理 8.3.1 本身已经允许建立一个线性算法, 以判定图的平面性, 而不必考虑平面性辅助图. 人们也许仍然要问, 是否有一类平面性辅助图, 使得它的度只受限于原图 G 的阶的一个线性函数. 下面就引入所谓*平面性 2 辅助图*, 记为 $\text{Aux}_2(G)$, 并且证明它的度以 G 的阶的某个线性函数为上界.

引理 8.3.3　令 $s=(u,v)$, $t=(u,w)$ 为从 u 发出的两条边. 记

$$\begin{cases} E(s,T^*_{\text{od}}) = \{\alpha|\forall\alpha \in T^*_{\text{od}}, (h(\alpha) \prec u) \wedge (v \preceq t(\alpha)\}, \\ E(t,T^*_{\text{od}}) = \{\alpha|\forall\alpha \in T^*_{\text{od}}, (h(\alpha) \prec u) \wedge (w \preceq t(\alpha)\}, \end{cases} \tag{8.3.1}$$

其中 T_{od} 为 G 上的一个确向树, 并确定一个偏序集 $(V,\preceq)$. 如果

$$\min\{h(\alpha)|\forall\alpha \in E(t,T^*_{\text{od}})\} \prec \min\{h(\alpha)|\forall\alpha \in E(s;T^*_{\text{od}})\},$$

则对于可平面图有

$$\begin{cases} \forall\alpha,\beta \in E(s,T^*_{\text{od}}), \quad \alpha\ \overline{\text{Dif}}\ \beta, \\ \forall\alpha,\beta \in E(t,T^*_{\text{od}}), \quad \alpha \text{ Sam } \beta. \end{cases} \tag{8.3.2}$$

证 设 $E(s;T^*_{\rm od})=\{\alpha_i\in T^*_{\rm od}|\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant k,\ h(\alpha_1)\preceq\cdots\preceq h(\alpha_k)\prec u\}$, $E(t;T^*_{\rm od})=\{\beta_j\in T^*_{\rm od}|\forall j,\ 1\leqslant j\leqslant l,\ h(\beta_1)\preceq\cdots\preceq h(\beta_k)\prec u\}$, 则由已知条件有 $\alpha_1\prec\beta_1$. 先证 (3.8.2) 式中的后一说法. 如果 $l=1$, 即 $E(t;T^*_{\rm od})=\{\beta_1\}$, 则 β 本身可视为 β Sam β. 此说法为真. 对 l 用归纳法. 设对于

$$E(t,T^*_{\rm od})=\{\beta_2,\beta_2,\cdots,\beta_l\}$$

后一说法成立, 则可分如下两种情形讨论:

情形 1 若 $\neg\alpha\in E(t,T^*_{\rm od})$, $h(\beta_1)\prec h(\alpha)\prec h(\beta_2)$, 则由于 $h(\alpha_1)\prec h(\beta_1)$, β_1 和 β_2 必同出现在类型 C 中 (引理 6.4.7 中所定义), 故 β_1 Sam_0 β_2. 由归纳假设可知这一说法为真.

情形 2 否则, 设 $h(\beta_1)\prec h(\alpha_{i_1})\preceq h(\alpha_{i_1+1})\preceq\cdots\preceq h(\alpha_{i_1+s})\prec h(\beta_2)$. 由引理 6.4.7 和引理 6.4.8 有

$$\beta_1\ \mathrm{Dif}\ \alpha_{i_1}\ \mathrm{Sam}\ \alpha_{i_1+1}\ \mathrm{Sam}\ \cdots\ \mathrm{Sam}\ \alpha_{i_1+s}\ \mathrm{Dif}\ \beta_2.$$

由准则 1~ 准则 3, 对于可平面图有 β_1 Sam β_2, 这一说法仍为真.

综合情形 1 和情形 2, (8.3.2) 式的后一说法得证.

另一方面, 若 $h(\alpha_1)\preceq h(\alpha_2)\preceq\cdots\preceq h(\alpha_i)\preceq h(\beta_1)$, $h(\beta_1)\prec h(\alpha_{i+1})$, 则由引理 6.4.7 和引理 6.4.8 可知

$$\alpha_1\ \overline{\mathrm{Dif}}\ \alpha_2\ \overline{\mathrm{Dif}}\ \cdots\ \overline{\mathrm{Dif}}\ \alpha_i.$$

又由 (8.3.2) 式的后一说法有

$$\alpha_{i+1}\ \mathrm{Sam}\ \alpha_{i+2}\ \mathrm{Sam}\ \cdots\ \mathrm{Sam}\ \alpha_k,$$

从而 (8.3.2) 式的前一个说法得证. ♮

根据引理 8.3.3, 若存在 $\alpha\in E(s;T^*_{\rm od})$ 和 $\beta\in E(t,T^*_{\rm od})$, 使得

$$\alpha\ \mathrm{Dif}_0\ \beta\quad 或\quad \alpha\ \mathrm{Sam}_0\ \beta,$$

则分别定义 s 和 t 满足关系

$$s\ \mathrm{Dif}\ t\quad 或\quad s\ \mathrm{Sam}\ t.$$

对于图 $G=(V,E)$, 令

$$A(v;T_{\rm od})=\{e|\forall e\in E_v,v\to e\},\tag{8.3.3}$$

其中 $v\to e$ 表示 e 的方向为由 v 发出的. 若 G 是可平面的, 则由引理 8.3.2 和引理 8.3.3, 对任何 $v\in V$, 关系 Dif 和 Sam 在 $A(v;T_{\rm od})$ 上是适定的. 这样一来, 对于平

面性, 或同样地, 对于平面嵌入, 只要讨论那些具有此性质的图就够了. 这种图被称为**平面性可取的**.

在每一个节点 $v \in V$ 处, 可以在 $A(v; T_{\text{od}})$ 上规定一个线性序. 对于任何 $a, b \in A(v; T_{\text{od}})$, 用 $a | \prec b$ 表示在这个线性序下 a 被 b 所覆盖. 令 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 或 $\hat{C}$ 分别为这样的类型 A, 类型 B 或类型 C, 如引理 6.4.7 中所定义, 使得与它们关联的树变量相应的两边在公共节点处, 依那个线性序一个覆盖另一个. 进而, 令 $(\alpha, \beta) \subset \hat{A}, \hat{B}$ 或 $\hat{C}$ 表示 (α, β) 分别同出现在 $\hat{A}, \hat{B}$ 或 $\hat{C}$ 中, 则对于图 $G = (V, E)$, 由其上一个确向树 T_{od} 确定一个偏序集 $(V, \preceq)$, 可以按如下方式构造它的一个**平面性 2 辅助图**. 用 $\text{Aux}_2(G) = (V_{\text{au}}^2, E_{\text{au}}^2)$ 表示.

$$\begin{cases} V_{\text{au}}^2 = V_{\text{au}}^1, \\ E_{\text{au}}^2 = \{(y_\alpha, y_\beta) \in E_{\text{au}}^1 | \forall (\alpha, \beta) \subset \hat{A}, \hat{B} \text{ 或 } \hat{C}\}. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

类似地, E_{au}^2 中的边 (y_α, y_β) 具有权 $w(y_\alpha, y_\beta) = 1$ 或 0, 分别由 $(\alpha, \beta) \subset \hat{A}$, $\hat{B}$ 或 $\hat{C}$ 所确定, 并且, 令

$$\mathcal{A}_1^2(G; T_{\text{od}}^*) = \{e | \forall e \in E_{\text{au}}^2,\ w(e) = 1\}.$$

定理 8.3.2　对一个图 (当然, 是平面性可取的) $G = (V, E)$, T_{od} 为其上的一个确向树, 下面的说法是相互等价的:

(1) 图 G 是可平面的;

(2) $\text{Aux}_2(G)$ 无奇权圈;

(3) $\text{Aux}_2(G)$ 无奇权基本图;

(4) $\mathcal{A}_1^2(G; T_{\text{od}}^*)$ 形成 $\text{Aux}_2(G)$ 的一个 1 上边缘;

(5) $\text{Aux}_2(G)$ 是平衡的.

证　与定理 6.4.1 的证明类似. ▫

一般来说, 正如上面所讨论的, 可知 $\text{Aux}_2(G) \subseteq \text{Aux}_1(G)$. 然而, 若 G 是 3 正则的, 则有 $\text{Aux}_2(G) = \text{Aux}_1(G)$.

引理 8.3.4　若 G 是 3 正则的, T_{od} 为其上的一个确向树 (这里, 不必是路), 则

$$\varepsilon(\text{Aux}_2(G)) \leqslant \frac{3\nu(G)}{2} - 3\nu_3(T_{\text{od}}) + 1, \tag{8.3.5}$$

其中 $\nu_3(T_{\text{od}}) = |\{v | \forall v \in V, \rho_{T_{\text{od}}}(v) = 3\}|$.

证　令 $(V_{\text{au}}^2,\ * \prec)$ 为由 (6.4.6) 式确定的基本序所导出的偏序集. 因为 T_{od} 一般不是路, 其中 $* \prec$ 不一定是线性序. 记 $\hat{\mathcal{A}}_0(G; T_{\text{od}}^*)$ 和 $\hat{\mathcal{A}}_1(G; T_{\text{od}}^*)$ 分别为由 (6.4.8) 式和 (6.4.9) 式以 $\hat{A}, \hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 代替 A, B 和 C 所确定的. 自然,

$$\hat{\mathcal{A}}_i(G; T_{\text{od}}^*) = \mathcal{A}_i^2(G; T_{\text{od}}^*), \quad i = 0, 1.$$

令

$$\hat{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od}) = \{(y_\alpha, y_\beta)|\forall(y_\alpha,y_\beta)\in\hat{A}_0(G;T^*_{\rm od}), y_\alpha *|\!\prec y_\beta\},\tag{8.3.6}$$

$$\hat{A}_{0n} = \hat{A}_0(G;T^*_{\rm od}) - \hat{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od}),$$

其中 $*|\!\prec$ 表示与 $*\prec$ 相应的覆盖关系, 则有

$$E^2_{\rm au} = \hat{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od}) + \hat{A}_{0n}(G;T^*_{\rm od}) + \hat{A}_1(G;T^*_{\rm od}).\tag{8.3.7}$$

根据上面提到的同样的理由有

$$\begin{cases} |\hat{A}_{0s}(G;T^*_{\rm od})| \leqslant |\mathcal{Y}_G(T)|, \\ |\hat{A}_1(G;T^*_{\rm od})| \leqslant |\mathcal{X}_G(T)|, \end{cases}\tag{8.3.8}$$

其中 $\mathcal{X}_G(T)$ 和 $\mathcal{Y}_G(T)$ 分别为 G 的树变量和上树变量的集合.

而且, 也可定义一个映射 $\tau:\hat{A}_{0n}(G;T^*_{\rm od})\to\mathcal{X}_G(T)$, 使得

$$\tau(y_\alpha,y_\beta) = x_\xi,$$

其中 ξ 由如下的关系所确定:

$$t(\xi) = \max\{t(\eta)|\forall\eta\in T^*_{\rm od},\ h(\alpha)\prec h(\eta)\prec h(\beta)\}.\tag{8.3.9}$$

可以看出, 在由 $T_{\rm od}$ 所确定的偏序集 $(V,\preceq)$ 上有

$$t(\xi)\preceq v_{\alpha,\beta} = \langle t(\alpha),t(\beta)\rangle = t(\alpha)\wedge t(\beta).$$

从 G 的 3 正则性即可得知 τ 是一个单射. 这就意味着

$$|\hat{A}_{0n}(G;T^*_{\rm od})| \leqslant |\mathcal{X}_G(T)| - \nu_3(T_{\rm od}).\tag{8.3.10}$$

又由于

$$\varepsilon(T^*_{\rm od}) = \frac{3}{2}\nu(G) - \nu(G) + 1 = \frac{\nu(G)}{2} + 1,$$

于是有

$$\begin{cases} |\mathcal{Y}_G(T)| = \dfrac{\nu(G)}{2} - 1, \\ |\mathcal{X}_G(T)| \leqslant \dfrac{\nu(G)}{2} - \nu_3(T_{\rm od}) + 1. \end{cases}\tag{8.3.11}$$

最后, 由 (8.3.6)~(8.3.10) 式有

$$\varepsilon(E^2_{\rm au}) \leqslant |\mathcal{Y}_G(T)| + 2|\mathcal{X}_G(T)| - \nu_3(T_{\rm od}),$$

进而由 (8.3.11) 式即得引理结论. ♮

令 $G=(V,E)$ 是一个平面性可取的图. 下面将引进两类运算, 以便将 G 转变为一个 3 正则图 $\tilde{G}$, 使得 $\tilde{G}$ 是可平面的当且仅当 G 是可平面的.

首先, 对于 $\alpha\in T_{\text{od}}^{*}$ $(h(\alpha)=v,\ u\preceq t(\alpha),\ a=(v,u)\in E_v,\rho(v)\geqslant 4)$, 将 v 劈分为 $v'(=v)$ 和 $v''(\succeq v')$, 使得 a 和所有 $\beta\in T_{\text{od}}^{*}$ $(h(\beta)=v$ 和 $u\prec t(\beta))$ 与 v'' 关联. 这种运算被称为伸长 v. 若 $\rho(v'')>3$, 继续伸长 v'' 直到所有 $h(\beta)$ 皆为 3 次的. 然后, 当没有一个上树边指向一个次大于 3 的节点, 则对于次大于 3 的节点 v, 即 $s=|A(v;T_{\text{od}})|\geqslant 3$, 劈分为 $v_1,v_2,\cdots,v_{s-1}$, 使得

$$v_i|\prec v_{i+1}\Leftrightarrow\gamma(a_s;v)\leqslant\gamma(a_{i+1};v)\preceq\gamma(a_i;v),\quad i=1,2,\cdots,s-2,\tag{8.3.12}$$

其中

$$\gamma(a_i;v)=\min\{h(\beta)|\forall\beta\in T_{\text{od}}^{*},t(\beta)\preceq h(a_i)\},\quad a_i\in A(v;T_{\text{od}}),1\leqslant i\leqslant s.\tag{8.3.13}$$

进行这种运算, 直到不能继续为止所得的图, 记为 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$, 被称为 G 的伸长图. 当然, T_{od} 连同所有附加的边 (v',v'') 和 (v_i,v_{i+1}) 就形成了 $\tilde{G}$ 上的确向树, 也用 $\widetilde{T_{\text{od}}}$ 表示. 这就使得能够对于平面性可取的图 G 用 $(\tilde{V},\preceq)$ 定义另一个偏序集 $(\mathcal{X}_G,\preceq *)$ 如下: $\forall x_1,x_2\in\mathcal{X}_G(T)$,

$$x_1\preceq\ *\ x_2\Leftrightarrow\tilde{v}(x_1)\preceq\tilde{v}(x_2).\tag{8.3.14}$$

其中 $\tilde{v}(x)$ 为 G 上与树变量 $x\in\mathcal{X}_G(T)$ 关联的节点. 由 3 正则性, 则有一个从树变量到 $\widetilde{T_{\text{od}}}$ 的内节点 (非显节点) 的一个单射. 基于 $(\mathcal{X}_G(T),\preceq *)$, 在每个节点 $v\in V$ 处, $A(v,T_{\text{od}})$ 上的一个线性序也可以被确定. 在下面的讨论中, 总是假定平面性 2 辅助图 $\text{Aux}_2(G)$ 与 G 的每个节点处的这个线性序相伴.

引理 8.3.5　一个图 $G=(V,E)$ (当然, 是平面性可取的)是可平面的当且仅当它的伸长图是可平面的.

证　因为容易验证

$$\text{Aux}_2(G)\subseteq\text{Aux}_2(\tilde{G}),\tag{8.3.15}$$

充分性是显然的. 反之, 由引理 8.3.1 可知 G 的所有上树边可以划分为两类, 具有特定的性质, 而且由引理 8.3.2 和引理 8.3.3, 这又导致在 $\tilde{G}$ 上所有上树边的带同样性质的划分. 再由引理 8.3.1 可知 $\tilde{G}$ 也必为可平面的. 这就得到了必要性. ♮

定理 8.3.3　对任何平面性可取的图 $G(V,E)$, T_{od} 为其上的一个确向树, 则有

$$\varepsilon(\text{Aux}_2(G)\leqslant 6\nu(G)-3\nu_1(T_{\text{od}}))-11,\tag{8.3.16}$$

其中 $\nu_1(T_{\text{od}})$ 为 T_{od} 上显节点的数目.

证 因为除了 $\widetilde{T_{\text{od}}}$ 上的显节点和 3 次节点外, 每个节点都恰与一条上树边关联, 于是有

$$\nu(\tilde{G}) = 2\varepsilon(\widetilde{T_{\text{od}}}^*) + \nu_3(\widetilde{T_{\text{od}}}) - \nu_1(\widetilde{T_{\text{od}}}). \tag{8.3.17}$$

由关系

$$\nu_1(\widetilde{T_{\text{od}}}) = \nu_1(T_{\text{od}}), \quad \nu_3(\widetilde{T_{\text{od}}}) = \nu_1(\widetilde{T_{\text{od}}}) - 2, \quad \varepsilon(\widetilde{T_{\text{od}}}^*) = \varepsilon(G) - \nu(G) + 1$$

可得

$$\nu(\tilde{G}) = 2(\varepsilon(G) - \nu(G) + 1) - 2 \leqslant 2(2\nu(G) - 6). \tag{8.3.18}$$

这里的不等式是考虑到对于平面性只需限定 G 至多有 $3\nu(G)-6$ 条边. 由引理 8.3.4 有

$$\begin{aligned}\varepsilon(\text{Aux}_2(\tilde{G})) &\leqslant \frac{3}{2}(2(2\nu(G) - 6)) - 3\nu_3(\widetilde{T_{\text{od}}}) + 1\\ &= 3(2\nu(G) - 6) - 3\nu_1(T_{\text{od}}) + 7\\ &= 6\nu(G) - 3\nu_1(T_{\text{od}}) - 11,\end{aligned}$$

从而由引理 8.3.5 和 (8.3.15) 式即得定理结论. ♮

8.4 数平面嵌入

设图 $G = (V, E)$, 在其上给定一个确向树 T_{od}, 根据 8.3 节所讨论的, 已判定它是可平面的. 令 $\text{Aux}_2(G) = (V_{\text{au}}^2, E_{\text{au}}^2)$ 为 G 的平面性 2 辅助图. 在 $\text{Aux}_2(G)$ 上, 造一个方程组

$$y_\alpha + y_\beta = \begin{cases} 0, & (y_\alpha, y_\beta) \in \hat{A}_0(G; T_{\text{od}}^*), \\ 1, & (y_\alpha, y_\beta) \in \hat{A}_1(G; T_{\text{od}}^*), \end{cases} \tag{8.4.1}$$

其中 $\hat{A}_0(G; T_{\text{od}})$ 和 $\hat{A}_1(G; T_{\text{od}}^*)$ 由 (8.3.6) 式和 (8.3.7) 式所定义.

由定理 8.3.2 和定理 6.3.3, 方程 (8.4.1) 有解.

引理 8.4.1 方程 (8.4.1) 至少有两组解, 并且它恰有两组解当且仅当 $\text{Aux}_2(G)$ 是连通的.

证 若 $Z = \{z_\alpha | \forall \alpha \in T_{\text{od}}^*\}$ 为方程 (8.4.1) 的一组解, 则 $\bar{Z} = \{\bar{z}_\alpha | \forall \alpha \in T_{\text{od}}\}$ 也是它的一组解, 其中

$$\bar{z}_\alpha = \begin{cases} 0, & z_\alpha = 1, \\ 1, & z_\alpha = 0. \end{cases}$$

当然, $\bar{Z} \neq Z$. 这就得到定理的前一个结论.

对后一结论, 因为如若 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 不连通, 方程 (8.4.1) 至少有 4 组解, 从而必要性显然. 充分性可以由下述事实直接导出:

若将某变量 y_α 固定取为 0 或 1, 则方程 (8.4.1) 沿 $\mathrm{Aux}_2(G)$ 上的一个树是适定的, 而且由 (8.4.1) 式的相容性, 这个唯一解可扩展到 (8.4.1) 式中的所有方程, 并且由连通性, 在 $\mathrm{Aux}_2(G)$ 上存在一个支撑树. ♮

若 $g_1(G)$ 和 $g_2(G)$ 为图 $G=(V,E)$ 的两个平面嵌入, 因为它们均为平面的多面形. 由对偶性可知 $g_1(G)\cong g_2(G)$, 或者说, 拓扑等价当且仅当存在一个双射 $\tau: g_1(E)\to g_2(E)$, 使得

$$\forall v\in V,\quad \varrho(g_1(v);g_1(G))=\varrho(\tau(g_1(v));g_2(G)),\tag{8.4.2}$$

或者

$$\forall v\in V,\quad \varrho(g_1(v);g_1(G))=\varrho^{-1}(\tau(g_1(g));g_2(G),\tag{8.4.3}$$

其中 $\varrho(g_1(v);g_1(G))$ 为在 $g_1(G)$ 中 $g_1(v)$ 处 $\{g_1(e)|\forall e\in E_v\}$ 的旋, ϱ^{-1} 为如 2.1 节中定义的旋 ϱ 的逆.

令 T_{od} 为 G 上的一个确向树. 为方便起见, 可以想象用 O 表示的根被劈分为一条边 (O_{-1},O). 当然, 此边在所得图的相应确向树上, 并且只有一条上树边与 O_{-1} 关联, 记为 α_{-1}, 使 $t(\alpha_{-1})$ 在所有与 O 关联的上树边中在 $(V,\preceq)$ 之下为极大的. 这时, 除 α_{-1} 外, 所有其他的上树边都在 $\mathcal{Y}_G(T)$ 中有相应的变量, 并称它们为**活动的**.

令 $\mathcal{A}_{\mathrm{ct}}(G;T_{\mathrm{od}})$ 为所有活动的边的集合, 或者说,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ct}}(G;T_{\mathrm{od}})=\{\alpha|\forall\alpha\in T^*_{\mathrm{od}},\alpha\neq\alpha_{-1}\}.$$

进而, 对于平面嵌入 $g=g(G)$, 令 $\mathcal{R}(T_{\mathrm{od}};g)$ 和 $\mathcal{L}(T_{\mathrm{od}};g)$ 分别表示那些右活动边和左活动边的集合. 所谓*右边*或*左边*是指当沿 T_{od} 从其首到尾在此两端附近的此边上的点落在右手或左手一侧. 自然, 对于 G 的一个平面嵌入 g 有

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ct}}(G;T_{\mathrm{od}})=\mathcal{R}(T_{\mathrm{od}};g)+\mathcal{L}(T_{\mathrm{od}};g).\tag{8.4.4}$$

定理 8.4.1　若 g 是图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入, T_{od} 为其上一个确向树, 则

$$y_\alpha=\begin{cases}c, & \alpha\in\mathcal{R}(T_{\mathrm{od}};g),\\ \bar{c}, & \alpha\in\mathcal{L}(T_{\mathrm{od}};g)\end{cases}\tag{8.4.5}$$

对于 $\alpha\in\mathcal{A}_{\mathrm{ct}}(G;T_{\mathrm{od}})$ 是方程 (8.4.1) 的一组解. 反之, 若对一个图 $G=(V,E)$, T_{od} 为其上确向树且方程 (8.4.1) 有一组解: $\forall\alpha\in\mathcal{A}_{\mathrm{ct}}(G;T_{\mathrm{od}})$,

$$y_\alpha=\begin{cases}c, & \alpha\in\mathcal{B}_0(G;T_{\mathrm{od}}),\\ \bar{c}, & \alpha\in\mathcal{B}_1(G;T_{\mathrm{od}}).\end{cases}\tag{8.4.6}$$

自然, $\mathcal{A}_{\text{ct}}(G;T_{\text{od}})=\mathcal{B}_0(G;T_{\text{od}})+\mathcal{B}_1(G;T_{\text{od}})$, 则 G 只有一个平面嵌入 g, 使得

$$\begin{cases}\mathcal{B}_0(G;T_{\text{od}})=\mathcal{R}(G;T_{\text{od}}),\\ \mathcal{B}_1(G;T_{\text{od}})=\mathcal{L}(G;T_{\text{od}}).\end{cases}\tag{8.4.7}$$

证 因为 g 是图 G 的一个平面嵌入, 对于 $\alpha,\beta\in\mathcal{A}_{\text{ct}}(G;T_{\text{od}})$, 若 $(y_\alpha,y_\beta)\in\hat{\mathcal{A}}_1(G;T^*_{\text{od}})$, 即 α 和 β 同出现在 $\hat{A}$ 或 $\hat{B}$ 中, 则 α 和 β 必处在不同的侧: $\mathcal{R}(T_{\text{od}};g)$ 和 $\mathcal{L}(T_{\text{od}};g)$, 从而

$$y_\alpha=c\text{ 和 }y_\beta=\bar{c}\quad\text{或}\quad y_\alpha=\bar{c}\text{ 和 }y_\beta=c.$$

此两种情形均满足方程

$$y_\alpha+y_\beta=c+\bar{c}=1.$$

否则, 若 $(y_\alpha,y_\beta)\in\mathcal{A}_0(G;T^*_{\text{od}})$, 也即 α 和 β 必落在同侧: $\mathcal{R}(T_{\text{od}};g)$ 或 $\mathcal{L}(T_{\text{od}};g)$, 从而

$$y_\alpha=y_\beta=c\quad\text{或}\quad y_\alpha=y_\beta=\bar{c}$$

均满足方程

$$y_\alpha+y_\beta=c+c=\bar{c}+\bar{c}=0.$$

因此, (8.4.5) 式为方程 (8.4.1) 的一组解.

反之, 根据 (8.4.6) 式, 依如下的方式构造 G 的一个平面嵌入, 使得满足 (8.4.7) 式: 对于 $v\in V$, 令 t_v 为那条指向 v 的树边, $t_i(1\leqslant i\leqslant l)$, $s_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 为所有那些从 v 发出的边, 使得上树边 $\alpha=t_i$ 或者 $h(t_i)\preceq t(\alpha)$, $\alpha\neq t_i$, $1\leqslant i\leqslant l$, $h(\alpha)\prec v$, 均有 $\alpha\in\mathcal{B}_0(G;T_{\text{od}})$, 上树边 $\beta=s_i$ 或者 $h(s_i)\preceq t(\beta)$, $\beta\neq s_i$, $1\leqslant i\leqslant k$, $h(\beta)\prec v$, 均有 $\beta\in\mathcal{B}_1(G;T_{\text{od}})$, 则有

$$(t_vt_1\cdots t_ls_ks_{k-1}\cdots s_1)\subseteq\varrho(v;g)\tag{8.4.8}$$

当且仅当

$$\begin{cases}\gamma(t_l)\preceq\gamma(t_{l-1})\preceq\cdots\preceq\gamma(t_1),\\ \gamma(s_k)\preceq\gamma(s_{k-1})\preceq\cdots\preceq\gamma(s_1),\end{cases}\tag{8.4.9}$$

其中对于 $x=t_1,t_2,\cdots,s_1,s_2,\cdots$,

$$\gamma(x)=\begin{cases}h(x),\text{当}x\in T^*_{\text{od}},\\ (h(\alpha_1),h(\alpha_2),\cdots),\quad\text{否则}.\end{cases}$$

这里, $\alpha_1 *\!\prec \alpha_2 *\!\prec\cdots$,

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}=\{\alpha|\forall\alpha\in T^*_{\text{od}},h(x)\preceq t(\alpha),h(\alpha)\prec v\}.$$

进而，对于任何 $x = t_i \in T_{\rm od}(1 \leqslant i \leqslant l)$ 或 $x = s_i \in T_{\rm od}(1 \leqslant i \leqslant k)$，设 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s\} = \{\xi | \forall \xi \in \mathcal{B}_0(G; T_{\rm od}), (h(x) \preceq t(\xi)) \wedge (h(\xi) = v)\}$，$t(\xi_1) \succeq t(\xi_2) \succeq \cdots \succeq t(\xi_s)$ 和 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r\} = \{\eta | \forall \eta \in \mathcal{B}_1(G; T_{\rm od}), (h(x) \preceq t(\eta)) \wedge (h(\eta) = v)\}$，$t(\eta_1) \preceq t(\eta_2) \preceq \cdots \preceq t(\eta_r)$，则

$$\langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s x \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_r \rangle \subseteq \varrho(v; g), \tag{8.4.10}$$

即为 v (或 $g(v)$) 处的旋中的一段. 当然，由定理 8.3.1 和定理 8.3.2，对于一个可平面图，上面的做法总能完成，并且由 Jordan 定理可知所得到的确为一个平面嵌入 g 满足 (8.4.7) 式. ♮

从引理 8.4.1，允许称方程 (8.4.1) 的一组解和它的补为其解的合对. 令 $\mathcal{S}(G; T_{\rm od})$ 为方程 (8.4.1) 的解的所有合对的集合.

引理 8.4.2　对于图 $G = (V, E)$，确向树 $T_{\rm od}$ 在一个 Hamilton 圈上有 $|\mathcal{S}(G; T_{\rm od})|$ 与 $T_{\rm od}$ 的选择无关，$|\mathcal{S}(G; T_{\rm od})|$ 就是 G 的不同平面嵌入的数目.

证　因为在这里，$\mathrm{Aux}_2(G) = \mathrm{Aux}_1(G)$，无需假定平面性的可取性，而只就 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 而论即足够，并且，由定理 8.4.1 可知每一个活动的边只能落在相应 Hamilton 圈的闭曲线的内部或外部区域. 根据类型 A，类型 B 或类型 C 的定义，活动边上述的一个状态，恰与在方程 (8.4.1) 的解中相应的变量取值为 0 或 1 一致. 因此，由上面所说的和将在 12.1 节、12.2 节中看到的可知方程 (8.4.1) 的解中合对的数目 $|\mathcal{S}(G; T_{\rm od})|$ 不依赖 $T_{\rm od}$ 的选择，而且它就是 G 的不同平面嵌入的数目. ♮

定理 8.4.2　对于图 $G = (V, E)$ 有一个确向树 $T_{\rm od}$ 在 Hamilton 圈上，它的不同平面嵌入的数目为

$$\eta_{\rm pe}(G) = 2^{c(\mathrm{Aux}_1(G)) - 1}, \tag{8.4.11}$$

其中 $c(\mathrm{Aux}_1(G))$ 为 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 中连通片的数目.

证　由引理 8.4.2 知 $|\mathcal{S}(G; T_{\rm od})|$ 在这里不依赖 $T_{\rm od}$ 的选择而且由引理 8.4.1 可知

$$|\mathcal{S}(G; T_{\rm od})| = 2^{c(\mathrm{Aux}_1(G)) - 1},$$

从而引理 8.4.2 意味着 $\eta_{\rm pe}(G) = |\mathcal{S}(G; T_{\rm od})|$，即得定理结论. ♮

如果图 G 不是 Hamilton 图，必须考虑一个劈对与至少三个基本劈块关联的情形. 然而，在 Hamilton 的情形，由于无重边，这种情况不必考虑. 因为在这时，若有一个劈对与三个基本劈块关联，则必有一个基本劈块仅由一条不在 Hamilton 圈上的边组成. 这条边本身就相应 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的一个连通片. 事实上，它只是 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的一个孤立节点. 一般地，由 5.3 节中所讨论的，可以只讨论简单 2 可分离的平面图而不失一般性. 因为任何简单 2 可分离的情形绝不会有一个基本劈块，仅由一条边组成，$\alpha_{\rm Bl}(G)$(如 5.3 节中所定义) 即变为基本劈块的数目.

引理 8.4.3 一个图 G, T_{od} 为它的一个确向树, 是 3 连通的 (非 2 可分离的) 当且仅当 $\text{Aux}_1(G)$ 是连通的.

证 设 G 是 3 连通的, 但 $\text{Aux}_1(G)$ 并不连通. 由引理 8.4.1, 对于 $\text{Aux}_1(G)$ 的方程 (8.4.1) 的解至少有两个合对. 然而, 由定理 8.4.1, G 至少有两个不同的一平面嵌入. 这就与定理 5.3.3 矛盾, 从而必要性成立.

反之, 若 $\text{Aux}_1(G)$ 是连通的, 则由引理 8.4.1, 对于 $\text{Aux}_1(G)$ 的方程 (8.4.1) 的解中恰有一个合对, 进而由定理 8.4.1, 按照 (8.4.7) 式的方式, 只有一个平面嵌入. 因此, 由定理 5.3.3, G 必为 3 连通的. 充分性得证. ♮

如果 G 是 2 可分离的, 则可能会有一个劈对 $\{u, v\}$ 至少与三个劈块关联, 而且它们中没有一个是由一条边组成. 然而, $\text{Aux}_1(G)$ 不依赖在一个劈对处劈块的循环次序的选择, 而这种循环次序却是由平面嵌入唯一决定的, 或者说, 不同的循环次序确定了不同的平面嵌入, 从而在一般的情形下, 对于 $\text{Aux}_1(G)$ 的方程 (8.4.1) 的解的合对不再唯一地引出 G 的一个平面嵌入.

引理 8.4.4 对于任何一个不可分离图 G(当然, 简单 2 可分离的), T_{od} 为其上的一个确向树, $\text{Aux}_1(G)$ 是不连通的当且仅当 G 至少有一个劈对. 所有相应在 $\text{Aux}_1(G)$ 的同一连通片上的节点的上树边, 在 G 的同一个基本劈块之中. 两个相应 $\text{Aux}_1(G)$ 的不同连通片上的节点在 G 的不同的基本劈块中.

证 引理的第一个结论实际上是引理 8.4.3 的另一个说法. 因此为真.

假设 α 和 β 是两个上树边, 而且分别在 G 的劈块 A 和 B 中. 如果 y_α 与 y_β 在 $\text{Aux}_1(G)$ 中是连通的, 则有一条路 $P(y_\alpha, y_\beta)$ 在 $\text{Aux}_1(G)$ 中. 不妨取这样的 α 在 A 中, β 在 B 中, 使得路 $P(y_\alpha, y_\beta)$ 为最短. 由 A 和 B 选择的任意性, 路 $P(y_\alpha, y_\beta)$ 只能是一条边. 若 α 和 β 同在类型 C 中, 即 $\alpha\ \text{Sam}_0\ \beta$. 由于简单 2 可分离性, 从定理 8.4.1 依 5.3 节中所定义的将 A 反射可得 G 的另一个平面嵌入, 使得对于 $\text{Aux}_1(G)$ 的方程 (8.4.1) 的解, 它所确定的与原来的之间 y_α 的值改变了, 但 y_β 的值不变. 这样就有 $\alpha\ \text{Dif}\ \beta$ 与 $\alpha\ \text{Sam}_0\ \beta$ 矛盾. 类似地, 也可以证明不可能有 $\alpha\ \text{Dif}_0\ \beta$, 从而 y_α 和 y_β 不可能在 $\text{Aux}_1(G)$ 的同一连通片中. 这就证明了第二个结论.

进而, 假设 $\alpha, \beta \in T^*_{\text{od}}$ $(y_\alpha, y_\beta \in V^1_{\text{au}})$ 在 G 的同一个基本劈块 A 中. 如果 y_α 和 y_β 在 $\text{Aux}_1(G)$ 中不连通, 则由定理 8.4.1 可以得到 G 的另一个平面嵌入, 使得 β 的状态改变了, 而 α 的则不变. 由定理 5.3.4, A 必需含有一个劈对, 这就与 A 是一个基本劈块矛盾, 从而只能 y_α 与 y_β 在 $\text{Aux}_1(G)$ 中连通. 第三个结论也为真. ♮

定理 8.4.3 对任一不可分离的可平面图 G (当然, 是简单 2 可分离的), T_{od} 为其上一确向树, G 的拓扑不等价的平面嵌入的数目为

$$\eta_{\text{pe}}(G) = 2^{c(\text{Aux}_2(G))-1}. \tag{8.4.12}$$

证 因为 $\text{Aux}_2(G)$ 是连通的当且仅当 $\text{Aux}_1(G)$ 是连通的, 从引理 8.4.4 和定

理 5.3.4 即得定理结论.

更进一步, 定理 8.4.3 可以引申到一般的不可分离可平面图 G, 无需是简单 2 可分离的. 这时, G 的不同平面嵌入的数目为

$$\eta_{\mathrm{pe}}(G) = 2^{\hat{c}(\mathrm{Aux}_2(G))-1}\prod_{i\geqslant 1}((s_i-1)!)^{l_i}, \tag{8.4.13}$$

其中 $\hat{c}(\mathrm{Aux}_2(G))$ 为 $\mathrm{Aux}_2(G)$ 的除去所有那些特殊的孤立点之外的连通片的数目. 这里的所谓特殊是指每个孤立点对应的上树边的两端均形成 G 的一个劈对. 关于 s_i 和 l_i 的意义可在 5.3 节中得到, 在 12.1 节和 12.2 节中也将看到 (8.4.13) 式的正确性.

8.5　注　记

(1) 关于 3 正则可平面图的平面嵌入, 在 8.1 节中的讨论取自文献 (Liu, Y.P.[19]), 但 (8.1.1) 式和 (8.1.2) 式比原来的要清楚得多, 而且关于线性性的估计在那里第一次出现. 在这一章, 还看到了这一方法引申到一些更一般的情形, 特别是确向树是路, 但不一定在 Hamilton 圈上的情形, 如文献 (Sun, X.R.[1], Xu, W.X.[1]).

(2) 平面性与平面嵌入的基本序表征首先是在文献 (Liu, Y.P.[23~25]) 中研究的. 那里利用的是布尔的方法, 但所给出的禁用构形过于复杂. 不管怎样, 在 8.3 节中, 则大为简化, 而且这里还提供了关于线性性的更为具体的估计.

(3) 在 8.4 节中, 给出了确定一个图的不同平面嵌入数目的一般公式. 在文献 (Liu, Y.P.[24]) 中仅提供了 Hamilton 可平面图的情形.

(4) 如何表征平面性辅助图, 即使对一类特殊的, 如 3 正则的图, 仍然是一个公开的问题. 当然, 3 正则的图对于确向树为路的平面性 0 辅助图就是区间图, 如文献 (Golumbic, M.C.[2]).

第 9 章　纵横曲面嵌入

9.1　纵横曲面模型

因为亏格为 0 的曲面, 或拓扑等价的平面, 已经充分研究过了, 这里特别强调亏格非 0 的可定向曲面, 类似地, 不可定向曲面. 本节先讨论适用于嵌入正交性的一般曲面模型.

曲面模型 1　一个大正方形连同其内无公共点的小正方形.

首先遇到的问题是如何安置这些小正方形. 因为与所选的目标有关, 这里仅以考虑折数为例.

令 l, s 和 d 分别为大正方形边长、小正方形边长和两个最接近正方形间的距离. 取 k 为正方形的总个数, 则这个模型的一个曲面必满足

$$l = (k-1)s + kd = (k-1)(s+d) + d. \tag{9.1.1}$$

定理 9.1.1　在曲面模型 1 中, 一个可定向曲面的亏格为 $p \geqslant 1$ 当且仅当每个正方形具有形式 $(aba^{-1}b^{-1})$ 且 $k = p$.

证　由 2.4 节中的运算 3 和定理 2.4.2, 亏格 p 的可定向曲面标准型, 如 (2.5.2) 式, 即

$$\prod_{i=0}^{k-1}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) \quad 和 \quad k = p.$$

这就是必要性.

反之, 借助定理 2.4.2 和定理 2.4.1 的另一个方向, 即得充分性.

定理 9.1.1 允许用一个 $l \times l$ 的正方形 S_0 和 $k-1$ 个 $s \times s$ 小正方形 $S_1, \cdots, S_{k-1}$ 置于 S_0 的对角线上, 使得邻近两个正方形间的距离为 d, 表示一个亏格 $p = k$ 的可定向曲面, 如图 9.1.1(a) 所示.

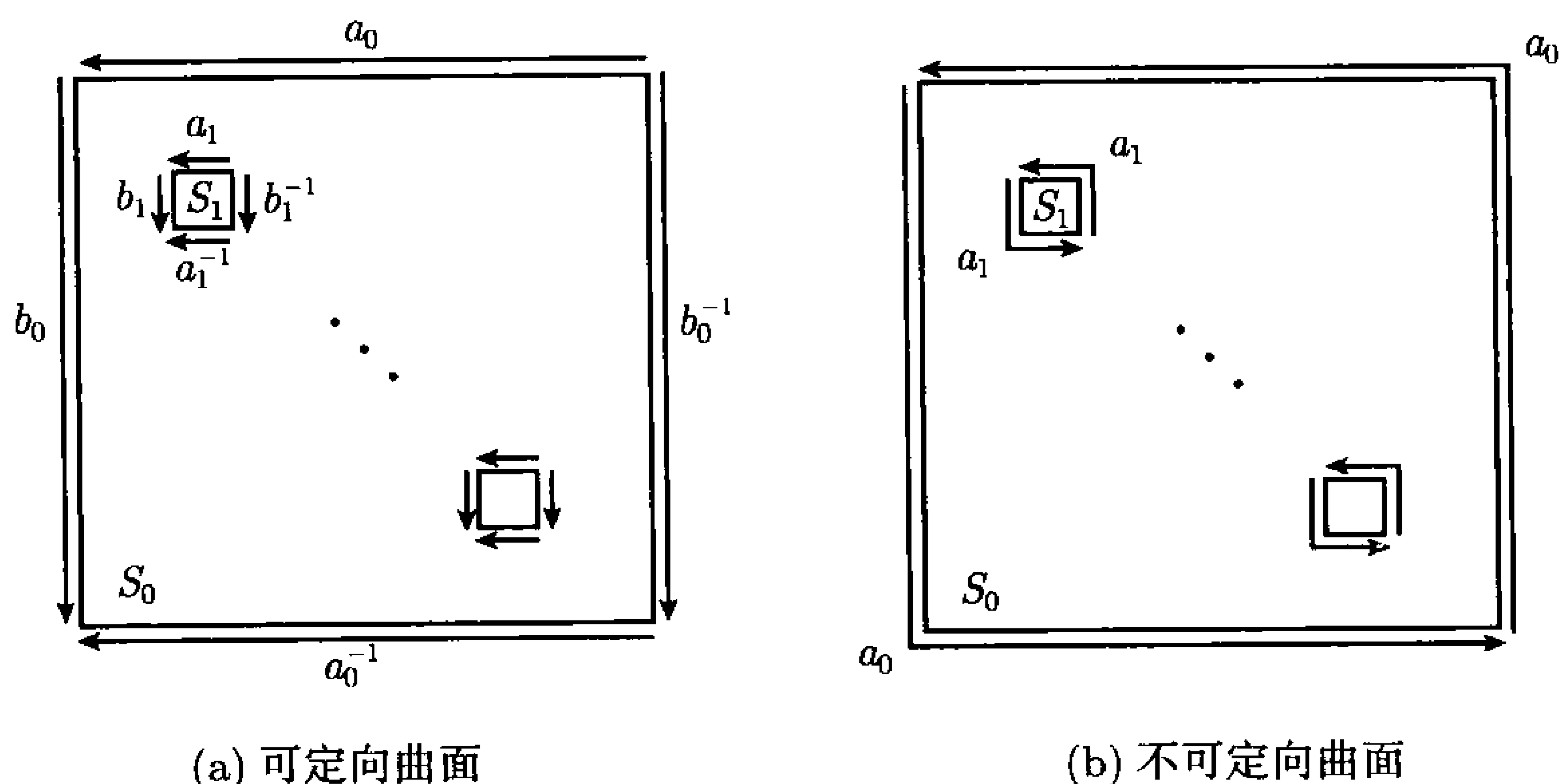
定理 9.1.2　在曲面模型 1 中, 一个不可定向曲面的亏格为 $q \geqslant 1$ 当且仅当每个正方形具有形式 (aa) 且 $k = q$.

证　基于定理 2.4.1 和定理 2.4.2, 亏格 q 的不可定向曲面标准型 (2.5.3) 形如

$$\prod_{i=0}^{k-1}(a_i a_i) \quad 和 \quad k = q.$$

这就是必要性.

反之, 借助定理 2.4.2 和定理 2.4.1 的另一个方向, 即得充分性. ♮



(a) 可定向曲面　　(b) 不可定向曲面

图 9.1.1

定理 9.1.2 允许用一个 $l \times l$ 的正方形 S_0 和 $k-1$ 个 $s \times s$ 小正方形 $S_1, \cdots, S_{k-1}$ 置于 S_0 的对角线上, 使得邻近两个正方形间的距离为 d, 表示一个亏格 $q=k$ 的不可定向曲面, 如图 9.1.1(b) 所示.

曲面模型 2　一个正方形或一个最接近正方形的矩形, 连同长 2β 边界上的一个 β 尺.

实际上, 这种模型下的曲面就是图的嵌入联树模型中的长 2β 关联单面形, 如 3.3 节中所述.

定理 9.1.3　在曲面模型 2 之下, 一个可定向曲面的亏格为 $p \geqslant 1$ 当且仅当 $\delta = 0$ 连同单面形不可约长 $4p$, 其中 δ 为 β 位的二进制数, 如 3.3 节中所述.

证　由定理 2.5.3 和文献 (Liu, Y.P.[46]) 中的引理 3.2.1, 考虑到一个曲面的可定向亏格是它的准亏格之半, 即得定理结论. ♮

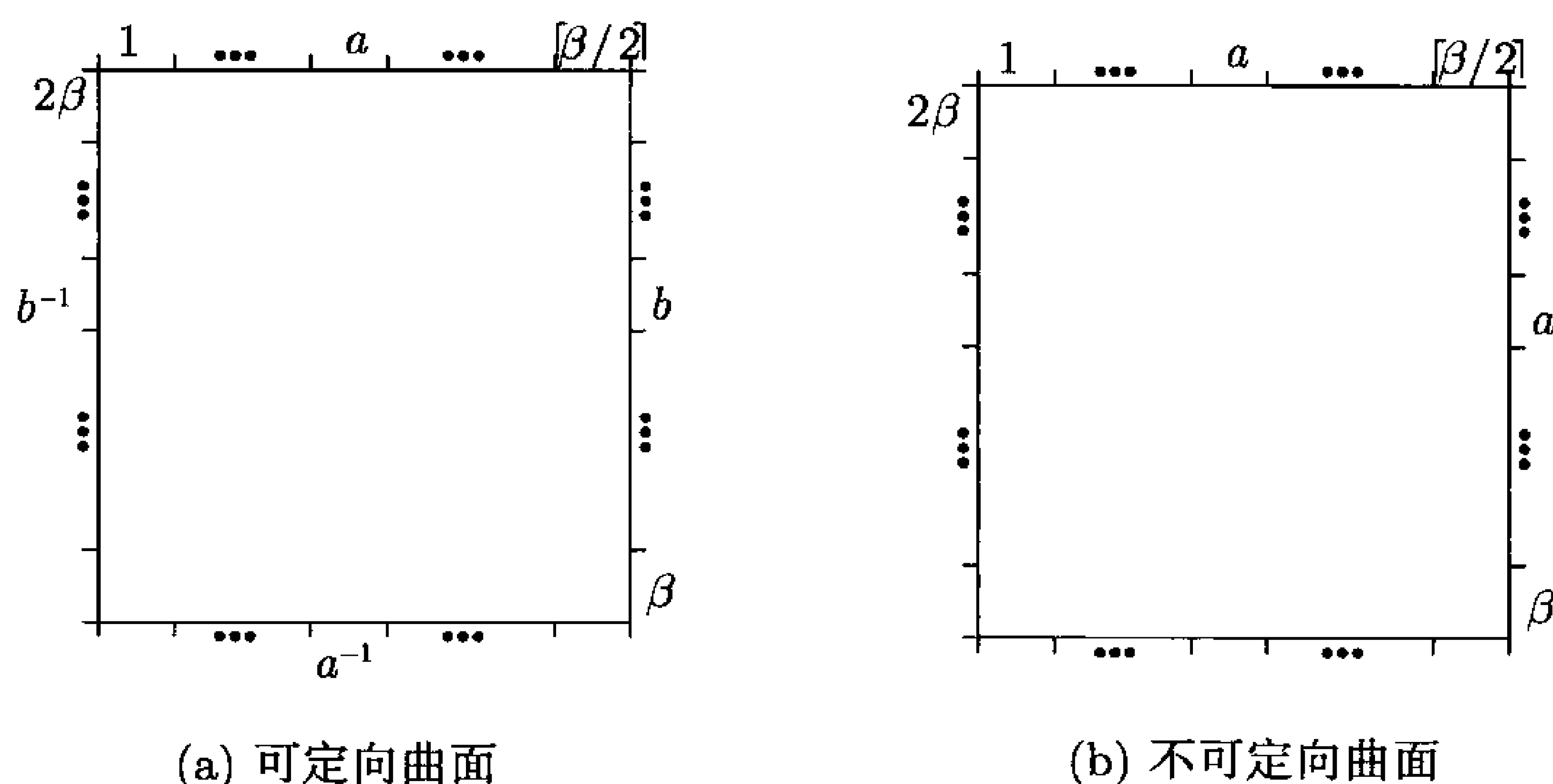
根据定理 9.1.3, 可以用一个不可约长 $4p$ 的 $\lfloor \beta/2 \rfloor \times \lceil \beta/2 \rceil$ 矩形表示长 2β 亏格 p 的可定向曲面. 当然, 如果 $\beta = 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, 这个矩形就是一个正方形, 如图 9.1.2(a) 所示.

定理 9.1.4　在曲面模型 2 之下, 一个不可定向曲面的亏格为 $q \geqslant 1$ 当且仅当 $\delta \neq 0$ 连同单面形不可约长 $2q$, 其中 δ 为 β 位的二进制数, 如 3.3 节中所述.

证　与定理 2.5.3 的证明类似地可得定理结论. ♮

基于定理 9.1.4, 可以用一个不可约长 $2q$ 的 $\lfloor \beta/2 \rfloor \times \lceil \beta/2 \rceil$ 矩形表示长 2β 亏格 q 的不可定向曲面. 当然, 如果 $\beta = 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, 这个矩形就是一个正方形, 如图 9.1.2(b) 所示.

曲面模型 3　一个正方形或一个最接近正方形的矩形, 连同边界上一个标准尺.



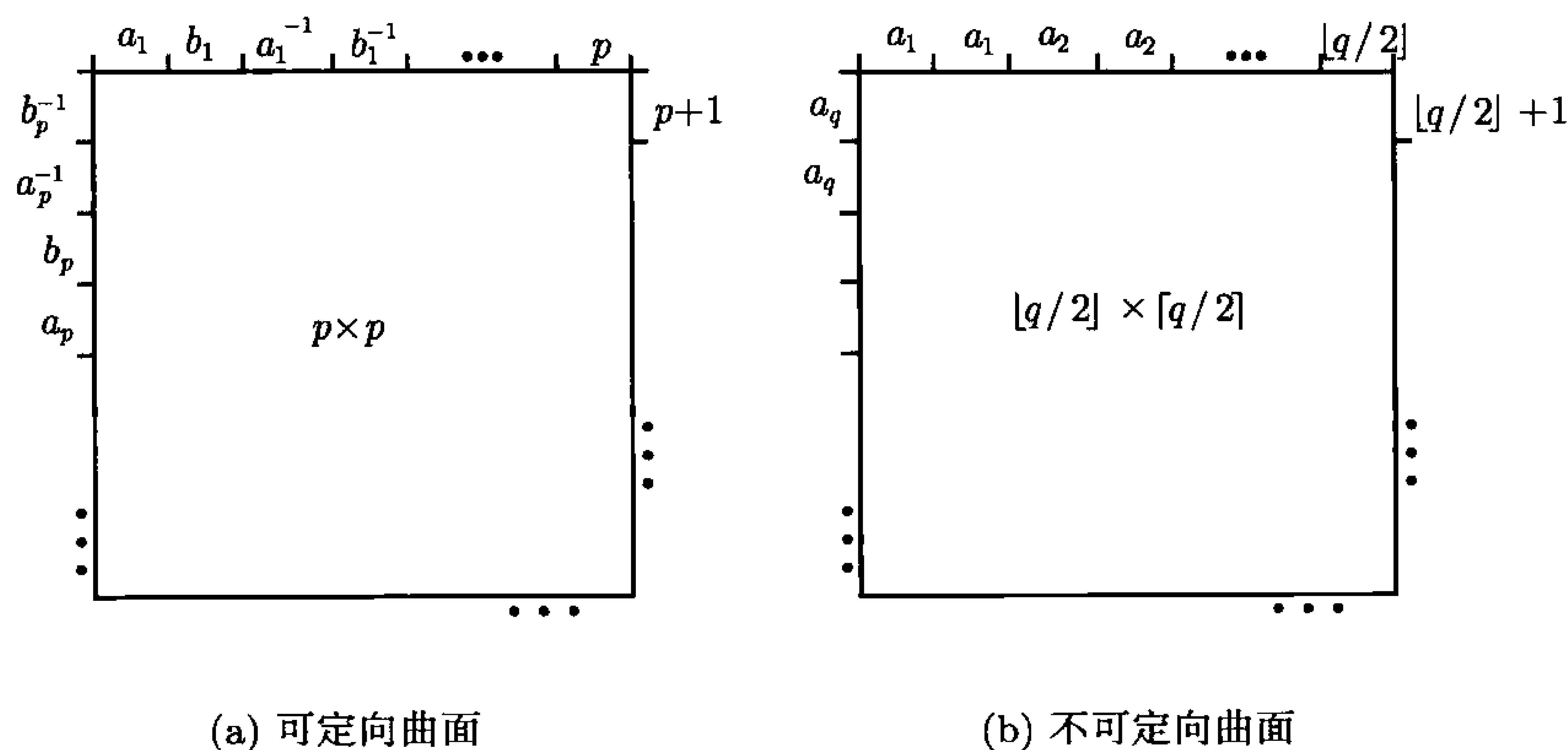
(a) 可定向曲面 (b) 不可定向曲面

图 9.1.2

定理 9.1.5 在曲面模型 3 之下, 一个可定向曲面的亏格为 $p \geqslant 1$ 当且仅当这个 $p \times p$ 正方形的边界被剖分成 $4p$ 个等长段, 形如

$$\prod_{i=1}^{p}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}).$$

证 实际上, 由定理 2.4.1, 这就是亏格 p 可定向曲面的标准型, 如图 9.1.3(a) 所示. ♮



(a) 可定向曲面 (b) 不可定向曲面

图 9.1.3

定理 9.1.6 在曲面模型 3 之下, 一个不可定向曲面的亏格为 $q \geqslant 1$ 当且仅当这个 $\lfloor q/2 \rfloor \times \lceil q/2 \rceil$ 矩形的边界被剖分成 $2q$ 个等长段, 形如

$$\prod_{i=1}^{p}(a_i a_i).$$

证　实际上, 由定理 2.4.1, 这就是亏格 q 不可定向曲面的标准型, 如图 9.1.3(b) 所示. ♮

9.2　纵 横 嵌 入

假设 G 已经确定为可平面的, 而且它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 也已给出. 现在的任务是判定可否将这个平面嵌入变换成另一个, 使得具有如下性质:

纵横性 1　所有节点均在欧氏或仿射平面的格子点 (或者说整点) 上.

纵横性 2　每一条边均为折线且由有限条水平和竖直线段组成, 或者在仿射的情形下, 这个折线由有限条直线段组成, 并且这些线段可分为两类, 每一类中的线段均与两个坐标轴之一平行.

纵横性 3　无限面保持不变.

若 $\mu(G)$ 可变为这样的嵌入, 则称 $\mu(G)$ 为*纵横可扩张的*. 这种满足性质纵横性 1~ 纵横性 3 的嵌入, 被称为 $\mu(G)$ 的*纵横扩张*. 一个图 G 的任何一个满足性质纵横性 1~ 纵横性 2 的平面嵌入, 被称为它的*纵横嵌入*, 也可以说是 G 的任何一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的纵横嵌入. 如果 $\mu(G)$ 有一个面, 使得以它为无限面时, $\mu(G)$ 是纵横可扩张的, 则称 $\mu(G)$ 是*纵横可嵌入的*. 若不管取哪一个面作为无限面, $\mu(G)$ 都是纵横可扩张的, 则称 $\mu(G)$ 是*纵横可实现的*. 进而, 若图 G 有一个平面嵌入是纵横可扩张的, 则称 G 是*纵横可嵌入的*. 若 G 的所有平面嵌入均为纵横可实现的, 则也称 G 本身是*纵横可实现的*. 当然, 不是任何的平面嵌入都是纵横可扩张的. 事实上, 若一个图 G 有一个节点次大于 4, 则它的任何平面嵌入均非纵横可扩张的. 理由是在任何纵横嵌入中, 每个节点只有 4 种可能的方式与其他节点连接. 记这 4 种方式为 N(北), W(西), S(南) 和 E(东).

在一个纵横嵌入中, 可以在一条边上有几个内点, 它们每个都与此边上的水平和竖直线段相遇. 这些点称为所在边上的*折*. 如果在一个纵横嵌入中, 在每一条边上的折均不超过 k, 则称它为 *k嵌入*. 类似地, 如果一个平面嵌入可以用一个 k 嵌入表示, 使无限面保持不变, 则称它为 *k可扩张的*. 若一个平面嵌入对于任何一个面作为无限面, 都是 k 可扩张, 则称它为 *k可实现的*. 进而, 如果一个图有一个 k 嵌入, 则称它为 *k可嵌入的*. 同样地可知它为 *k可实现的*.

引理 9.2.1　若一个 3 正则图 $G=(V,E)$ 有 $T_{\rm od}$ 为它的一个确向树且在一个 Hamilton 圈上, 则 G 的任何一个平面嵌入全是 3 可扩张的.

证　由于 G 是 3 正则的, 则有 $\nu=|V|=0 \pmod 2$. 因为除 $T_{\rm od}$ 的两个端点外, 其他每个节点都只与一个上树边关联, 但这两个端点的每个都与两个上树边关联, 从而 G 有 $\tilde{\varepsilon}=\dfrac{\nu}{2}+1$ 条上树边. 设在 $T_{\rm od}$ 的右侧有 ε_1 条上树边, 则必有

$\varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon} - \varepsilon_1$ 条上树边在 T_{od} 的左侧. 由定理 8.1.1, 在每一侧的上树边, 仅除那条在 Haimlton 圈上的上树边 α_0 外, 均可用如下定义的等价关系 $\sim_p$ 分类: $\forall\alpha,\beta \in \mathcal{A}_0$(或 $\mathcal{A}_1$),

$$\alpha \sim_p \beta \Leftrightarrow \Big(h(\alpha) \prec h(\beta) \prec t(\beta) \prec t(\alpha)\Big) \vee \Big(h(\beta) \prec h(\alpha) \prec t(\alpha) \prec t(\beta)\Big). \tag{9.2.1}$$

令 $E_1(R),\cdots,E_r(R)$ 和 $E_1(L),\cdots,E_l(L)$ 分别为 T_{od} 的右侧和左侧的类,

$$\begin{cases} k(R) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} |E_i(R)|, \\ k(L) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} |E_j(L)|, \end{cases} \tag{9.2.2}$$

则 G 的平面嵌入可以如下的方式表示:

首先, 将 T_{od} 放在水平线上占 $\nu-1$ 个单位, 使其上每一条边为单位水平线段, 并且方向为从小到大. 若 α_0 的两端同与

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant l} E_j(L)\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant r} E_i(R)\Big)$$

关联, 则将 α_0 用 T_{od} 右 (左) 边一条带两个折的线表示, 其中的两个折在 T_{od} 上 (下) 方第 $k(R)+1$ $(k(L)+1)$ 单位的水平线上. 它们的横坐标与 T_{od} 的两端相同; 否则, α_0 两端点必与不同侧的边关联. 若 α_0 在 T_{od} 的根处与

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r} E_i(R)\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant l} E_j(L)\Big)$$

关联, 则从根 (T_{od} 的另一端) 向左 (右) 沿水平一个单位后向下 (上) 沿竖直 $k(R)+1$ $(k(L)+1)$ 个单位, 再水平线向右 (左) 到 T_{od} 的另一端 (根) 所在的横坐标, 沿竖直线向上 (下) 达到 T_{od} 的另一端 (根). 这样得到一个有三个折的线表示 α_0.

然后, 根据平面嵌入所确定的旋, 纵横地嵌入每一类 $E_i(R)(1\leqslant i\leqslant r)$ 和 $E_j(L)(1\leqslant j\leqslant l)$. 例如, 若 $\tilde{E}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 为一类, 满足

$$h(\alpha_s) \prec h(\alpha_{s-1}) \prec \cdots \prec h(\alpha_1) \prec t(\alpha_1) \prec t(\alpha_2) \prec \cdots \prec t(\alpha_s),$$

则可将每条上树边用二折的线段所表示, 使得依 $\tilde{E}$ 在 T_{od} 的左 (右) 侧 α_i 上的连二折的水平线段落在距 T_{od} 所在的线上 (下) 方 $i(1\leqslant i\leqslant s)$ 个单位的水平线上. 由此, 即可得引理结论. ㄖ

引理 9.2.2 任何 3 正则图的平面嵌入都是 t 可扩张的, 其中 t 是区间

$$[0, \lfloor \nu(G)/4 \rfloor + 2]$$

上的一个整数.

证　根据由 G 的平面嵌入所确定的在每一个节点处的旋, 可以先嵌入确向树 T_{od} 到平面上依如下的两步:

第 1 步　将此树的最长路嵌入到平面上一条水平直线内, 使得每边均无折.

第 2 步　在已经嵌入的部分中若有 T_{od} 的 3 次节点 v 尚有一关联边未嵌入, 则嵌入由此节点开始, 沿 T_{od} 未嵌入的边的最长路在垂直于 v 处已嵌入部分的直线上, 使得每边皆无折. 当然, 如果需要, 可通过细分使所有节点全落在格子点上.

然后, 纵横地嵌入上树边. 设 $\alpha \in T^*_{\text{od}}$, P_α 为在 T_{od} 上从 $h(\alpha)$ 到 $t(\alpha)$ 的路. 若 P_α 在 T_{od} 上有 $n_b(\alpha)$ 个折, 则由 3 正则性以及 T_{od} 的性质, 总可以用 $n_b(\alpha)+2$ 折的线段实现 α 的嵌入. 图 9.2.1 显示了最不利的情形, 其中粗线表示 T_{od} 的嵌入, 细实线为上树边的嵌入.

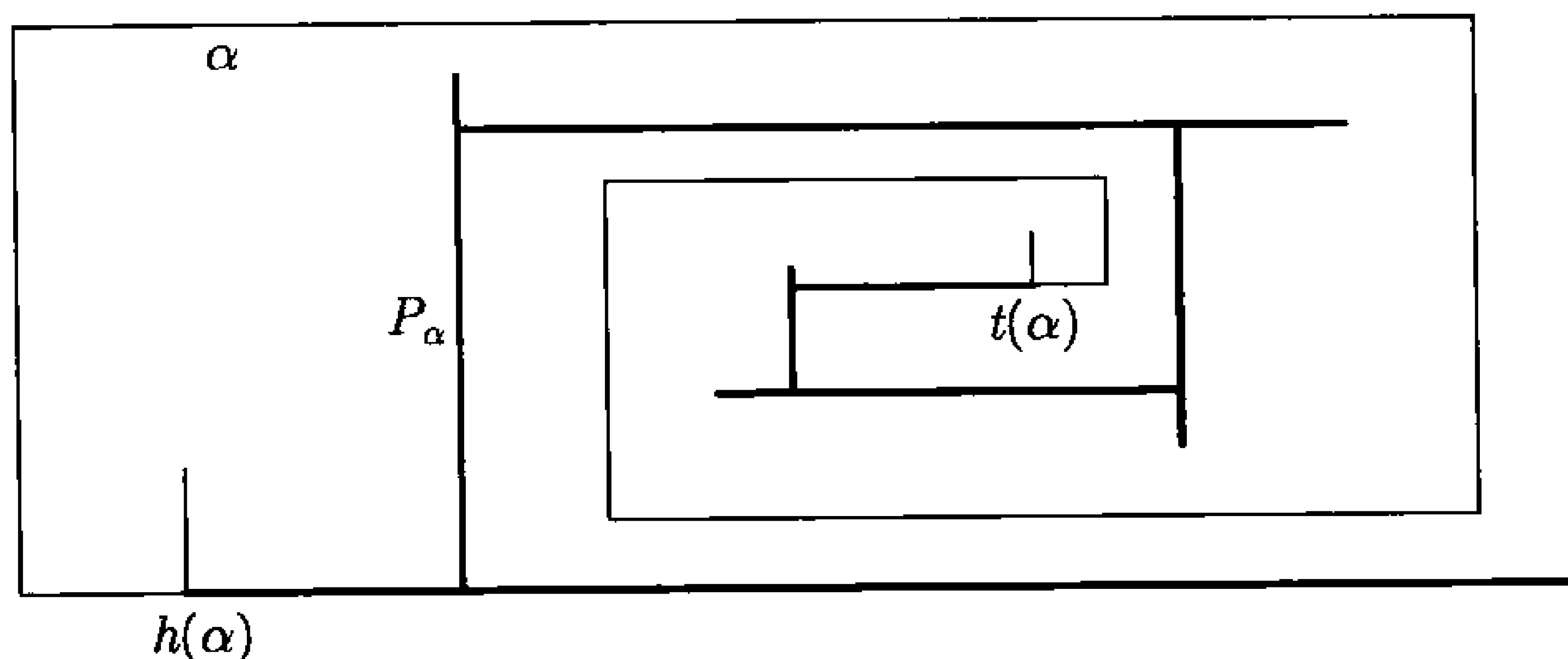


图 9.2.1

而且, 可以证明对于如此得到的纵横嵌入,

$$n_{br}(G) = \max_{\alpha \in T^*_{\text{od}}} n_b(\alpha) \tag{9.2.3}$$

是这样的一个整数 n, 使得

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+3) < \nu(G) - 3 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(3+i), \tag{9.2.4}$$

即

$$\frac{(n-1)(n+6)}{2} < \nu(G) - 3 \leqslant \frac{(n-1)(n+6)}{2} + n + 3.$$

由此可得

$$n_{br}(G) \leqslant \lfloor \nu(G)/4 \rfloor. \tag{9.2.5}$$

((9.2.4) 式和 (9.2.5) 式的证明留给读者!) 从而用与引理 9.2.1 的证明中类似的方法, 可得到引理成立.

定理 9.2.1　一个可平面图 $G=(V,E)$ 是 $k(k \leqslant \nu(G)+4)$ 可实现的当且仅当 V 中节点次的最大值不大于 4.

证 由于任何一个次大于 4 的节点均不可纵横地嵌入到平面上, 必要性显然. 反之, 由引理 8.3.5 可知任何一个图的平面嵌入, 均可从一个 3 正则图的平面嵌入变换而来. 事实上, 图 G 的平面嵌入总可从它的伸长图 $\tilde{G}$ 变换而得到. 在这个变换中, 只用到如图 9.2.2 所示的两种运算, 即可从 $\tilde{G}$ 的一个纵横嵌入变到 G 的一个纵横嵌入. 不过要注意, 经过这两种变换, 至多使一边增加两个折. 又因为每边与两个节点关联, 至多接触到两次这种运算, 故至多增加 4 个折. 由引理 9.2.2 即得充分性. ♮

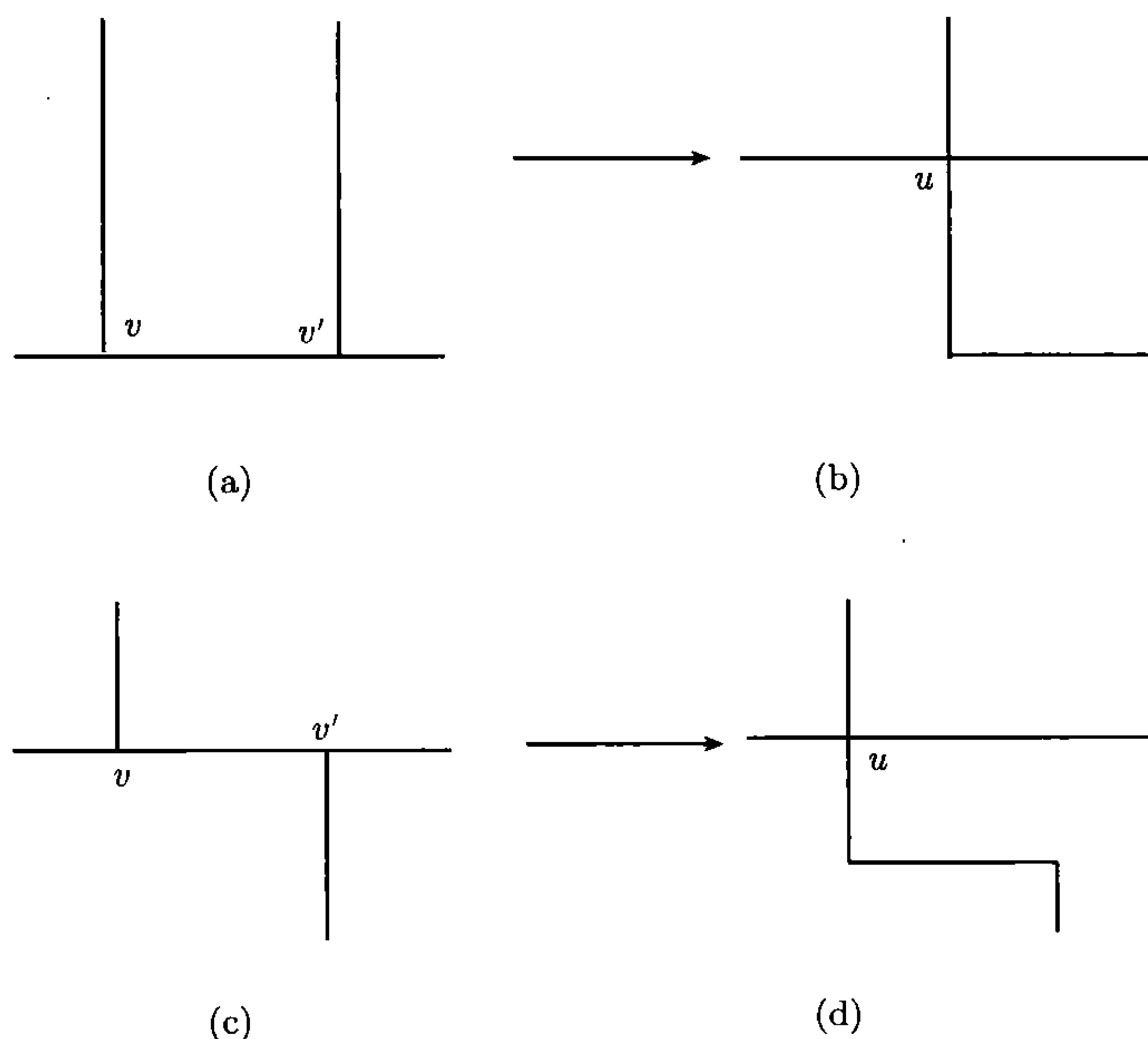


图 9.2.2

在一个纵横嵌入中, 一个面若没有一条水平或竖直线与它的内部区域有两个或更多直线段 (其中至少有一个为有限的) 公共, 则称此面为凸的(纵横地). 进而, 若一个纵横嵌入的所有面均为凸的, 则称它为纵横地凸嵌入. 类似地可知凸 k 嵌入, 即一个 k 嵌入是纵横地凸的. 若一个图的某平面嵌入有一个纵横扩张是纵横地凸的, 则称它是纵横地凸可扩张的. 若一个平面嵌入不管哪个面作为无限面均为纵横凸可扩张的, 则称它是纵横地凸可实现的. 类似地, 也可知对于一个平面嵌入, 它是凸 k 可扩张和凸 k 可实现的含义.

在一个节点次不大于 4 的图 $G=(V,E)$ 的某方格点嵌入中, 若有一个次为 4 的节点 v 的 4 个邻节点, 全落在以 v 为原点的同一个象限中, 则称 v 为拒凸点.

引理 9.2.3 节点次不大于 4 的图 $G=(V,E)$ 的一个方格点凸嵌入在节点的位置不变的条件下, 是纵横地凸可扩张的当且仅当它没有拒凸点.

证　因为容易看出, 一个拒凸点至少引起与它关联的一个面为纵横地非凸的(在节点的位置固定的条件下), 引理的必要性显然.

反之, 由于任何一个方格点嵌入的无限面总可以扩张为纵横地凸的, 不管在它的内部区域中节点的位置如何, 只要其边界上节点的位置固定即可, 从而只需讨论内节点.

情形 1　设一个内节点 v 是 3 次的. 容易验证, 所有与它关联的那三个面均可扩张为在 v 附近角内是纵横地凸的.

情形 2　设一个内节点 v 为 4 次的, 并且由嵌入的凸性和 v 不是拒凸点, 这时, 就其相邻 4 节点的相对位置而言, 只可能出现如图 9.2.3 所示的 4 种状态之一, 而不计对称的状态. 事实上, 在这些图中已经给出了在 v 附近各面的纵横凸扩张.

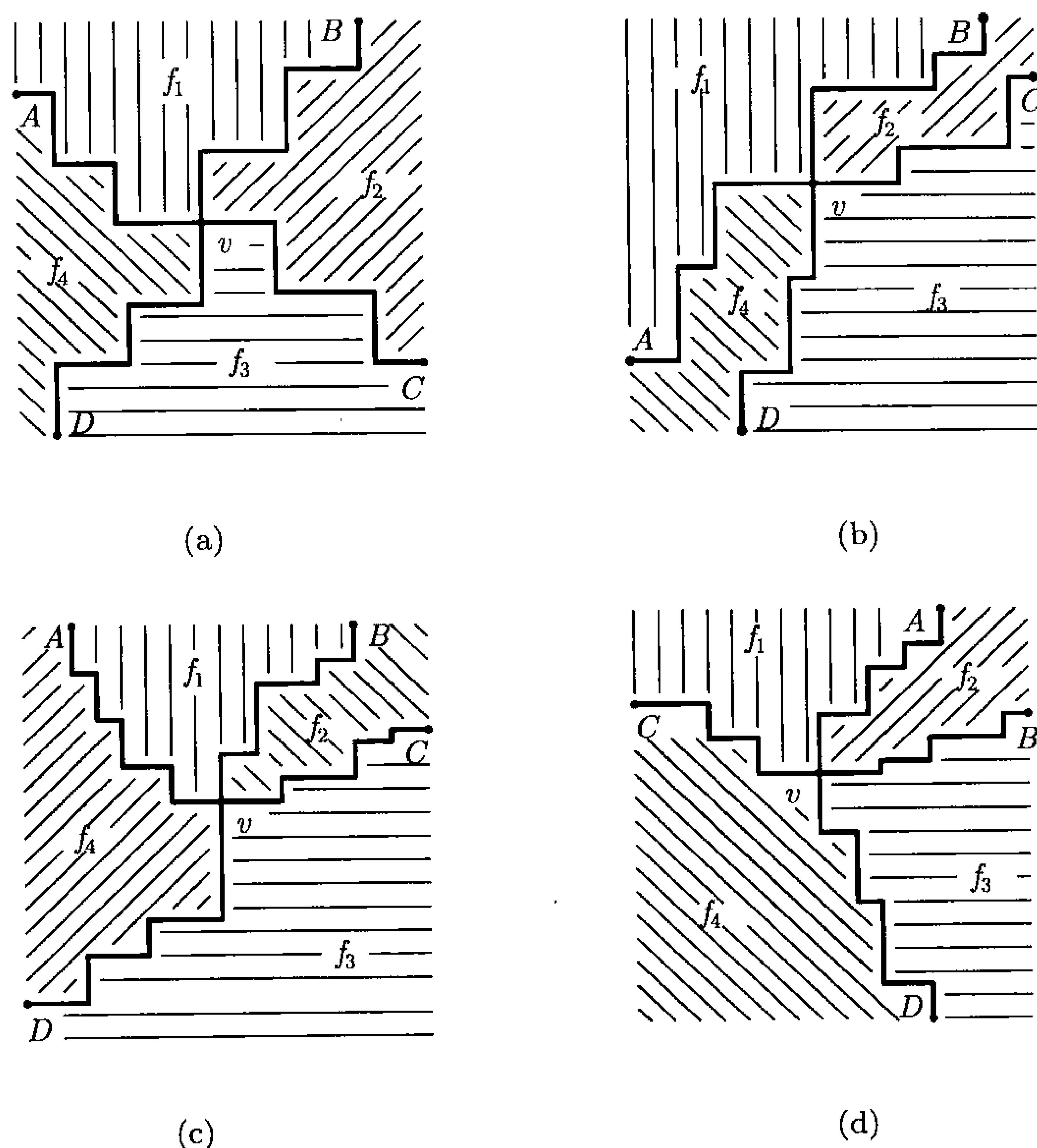


图 9.2.3

最后, 所有的内边, 即无限面边界内部的边, 均可用单调上升或下降的折线表示, 即可得到一个纵横地凸嵌入, 从而充分性得证.　□

并不是说图 G 的任何一个方格点凸嵌入 $\mu(G)$ 都可以变换到无拒凸点, 从而

可得到它的一个纵横地凸扩张. 若在这个嵌入 $\mu(G)$ 中有一个圈 C, 其上所有节点全是 4 次的, 并且恰有三个节点, 它们的每一个都既有一条关联边在 C 的内部, 也有一条在 C 的外部, 而其他的所有节点, 每个均有两条关联边在 C 的内部, 则称之为**4 次 3 分离圈**, 用 $\langle 4,4,4\rangle$ 表之. 可以验证, 任何一个方格点凸嵌入 $\mu(G)$, 只要它有一个构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 则绝不能扩张为一个纵横地凸嵌入. 其理由是在 $\mu(G)$ 的 $\langle 4,4,4\rangle$ 上, 不可避免地有一个拒凸点.

引理 9.2.4 若节点次不大于 4 的图 G 没有一个凸嵌入 (当然, 非纵横地)含构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 则 G 的任何一个凸嵌入均可扩张为这样的一个方格点凸嵌入, 使得所有节点均非拒凸点.

证 由 5.4 节中所讨论的可知, 若 G 有凸嵌入, 则 G 必有方格点凸嵌入, 故可以假设 $\mu(G)$ 为 G 的一个方格点凸嵌入. 若 $\mu(G)$ 没有拒凸点, 则即为所求. 否则, 对 $\mu(G)$ 的拒凸点数, 进行归纳. 令 v 是 $\mu(G)$ 的一个拒凸点. 由于无 $\langle 4,4,4\rangle$, 无限面边界的凸性以及 G 的有限性, 可以假设 v 的 4 个邻节点 A, B, C, D 中, 点 A, B, C 在 D 处的第一象限内, 而 B 不再是拒凸点 (如果 B 仍为 4 次的话). 这就是说有如图 9.2.4(a) 所示的形式, $\angle ABC$ 大于 $\frac{\pi}{2}$. 若 B 是 3 次的, 也可假设 $\angle ABC$ 大于 $\frac{\pi}{2}$, 如图 9.2.4(b) 所示. 因为若否, 可将 B 用 B' 代之, 其中 B' 为 BM 上充分接近 M 的一个点, M 为 $\tilde{A}\tilde{C}$ 的中点, $\tilde{A}$ 与 $\tilde{C}$ 为与 $\angle ABC$ 关联的面边界上与 B 相邻的两个节点. 然而, 在图 9.2.4 的两种情形下均可在两四边形 $AvCB$ 和 $BA'B'C'$ 的公共区域中, 取一个充分接近 B 的方格点 v', 其中 A', B', C' 分别为过 A 的竖直线与过 B 的水平线、过 A 的竖直线与过 C 的水平线、过 C 的水平线与过 B 的竖直线的交点. 这样总可在 $\mu(G-v)$ 上增一个点 v', 并连接直线段 $v'A$, $v'B$, $v'C$ 和 $v'D$ 而得到 G 的另一个方格点凸嵌入 $\mu'(G)$.

由 v' 的求取法, 在 $\mu'(G)$ 中节点 $v'=v$ 不再是拒凸点, 而且若 A, C 皆为 4 次的, 则由于无构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 在 $\mu(G)$ 中不可能有边 (A, C). 这就使得能够使 A, C 均不会在 $\mu'(G)$ 中变为新的拒凸点. 当然, 若 D 为 4 次的, 由于 v 和 v' 在 D 处的同一个象限中, 也不会使 D 在 $\mu'(G)$ 中变为新的拒凸点. 由于 $\mu'(G)$ 的拒凸点数比 $\mu(G)$ 少 1, 则由归纳假设, $\mu'(G)$ 可扩张成无拒凸点的嵌入, 从而 G 有一个方格点凸嵌入无拒凸点. 引理得证. ♮

定理 9.2.2 任何节点次不超过 4 且无构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 的 3 连通平面图 G 均为纵横地凸可实现的.

证 由定理 4.4.2 可知 G 总有方格点凸嵌入, 并且不依赖于无限面的选择. 由于 G 无 $\langle 4,4,4\rangle$, 即对于任何平面嵌入 $\mu(G)$ 皆无 $\langle 4,4,4\rangle$, 则对任何一个方格点凸嵌入, 不管哪个面作为无限面, 均无 $\langle 4,4,4\rangle$. 由引理 9.2.3 和引理 9.2.4, 即得 G 是纵横地凸可实现的. ♮

虽然一个有节点的分离对的图一般不是凸可嵌入的，但在纵横地凸的情形，这种图却可有纵横地凸嵌入，其中也包括一些没有一般的凸嵌入的图. 更为一般的结果，可参见文献 (Liu, Y.P.[29]).

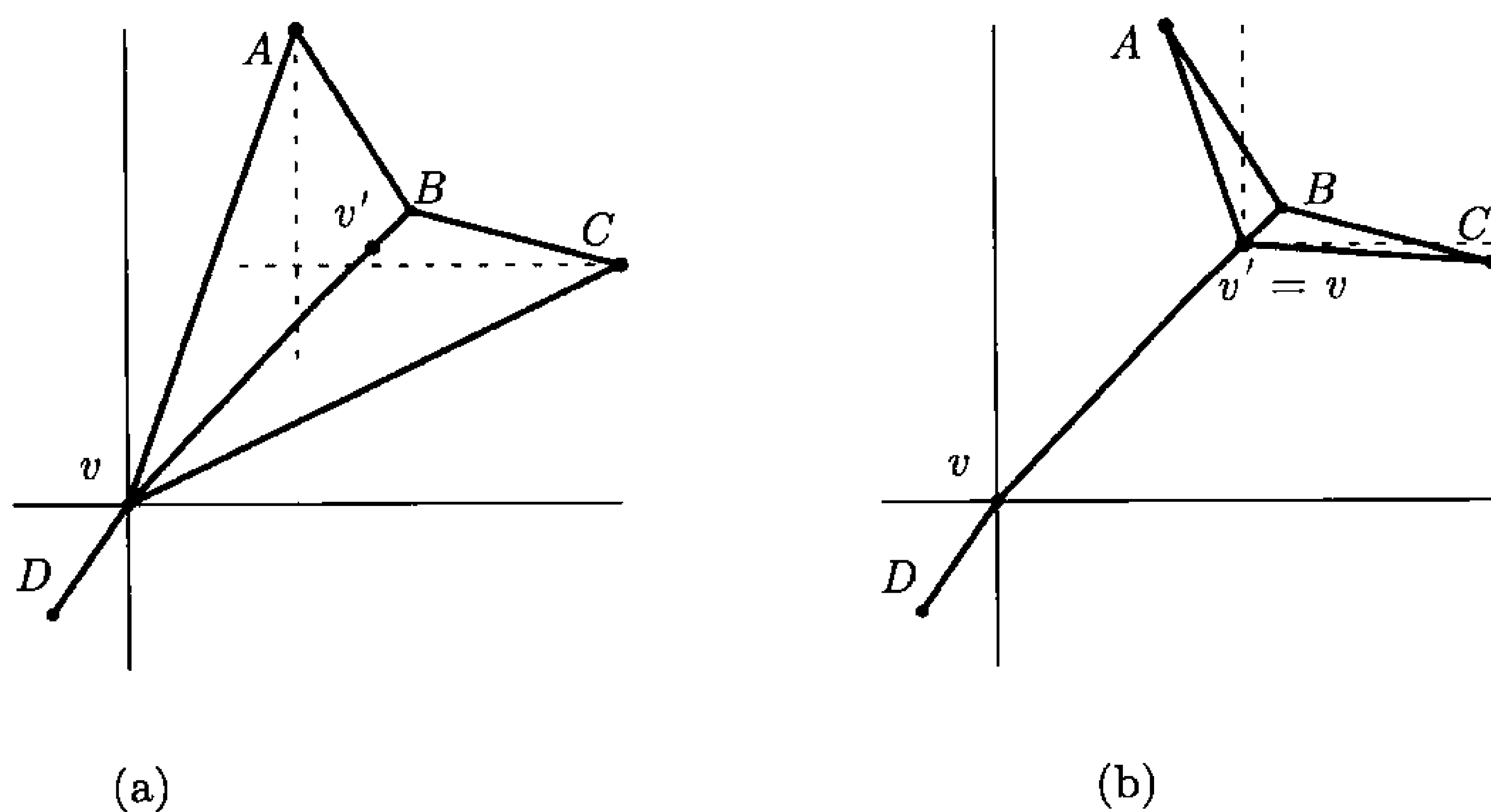


图 9.2.4

9.3　叁可嵌入性

在 9.2 节中已经知道，任何一个节点次不大于 4 的可平面图，只要 k 充分大，都是 k 可嵌入的. 在那里，k 依赖于图的阶. 本节的目的在于给出使得任何节点次不大于 4 的可平面图均为 k 可嵌入的 k 的最小值. 结果是这个值为 3，不依赖于图的阶. 因与一个显节点关联的边总能纵横嵌入到平面上而无折，和对于图的边的细分不会使 k 的值提高. 这里可以不考虑显节点，即 1 次节点和 2 次节点的出现. 为简便起见，称仅由 3 次和 4 次节点组成的可平面图为**标准图**. 对于 G 的一个 k 嵌入 $\mu_k(G)$ 的一个圈 C 上的一个节点 v，若在 C 的内部区域与 v 关联的角为 $\frac{3}{2}\pi$, π 或 $\frac{\pi}{2}$，则分别称 v 为 C 的**内节点**、**直节点**或**外节点**. 当然，C 上的任何一个节点都处在这三个状态：内、直和外之一. 令

$$\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{in}})=\begin{cases}2, & v\text{ 为 }C\text{ 的内节点},\\1, & v\text{为}C\text{的直节点},\\0, & v\text{为}C\text{的外节点},\end{cases}\tag{9.3.1}$$

并称它为在 C 上 v 的**状态函数**或**内状态函数**. 进而，令

$$\overline{\mathrm{St}}(v;C_{\mathrm{in}})=2-\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{in}}),\tag{9.3.2}$$

并称它为 $\mathrm{St}(v,C)$ 的补, 则可见

$$\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{out}})=\overline{\mathrm{St}}(v;C_{\mathrm{in}}), \tag{9.3.3}$$

其中, $\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{out}})$ 为 v 在 C 上的另一个状态函数, 也称为**外状态函数**, 只是将 C 的内部改为外部. 若 C 是一个面 f 的边界时, $\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{in}})$ 和 $\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{out}})$ 分别用 $\mathrm{St}(v;f)=\mathrm{St}(v,f_{\mathrm{in}})$ 和 $\mathrm{St}(v;f)=\mathrm{St}(v;f_{\mathrm{out}})$ 所代替. 事实上, $\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{in}})$ $(\mathrm{St}(v;C_{\mathrm{out}}))$ 指出了在 C 的内 (外) 部区域与 v 可允许连边的最大数.

对于一条与 v 关联的边 e, 如果 e 是从 N(北方), W(西方), S(南方) 或 E(东方) 与 v 连接, 则分别用 $e(v)\to$N, $e(v)\to$W, $e(v)\to$S 或 $e(v)\to$E 表示. 记

$$\mathrm{Dir}(e;v)=\begin{cases}\mathrm{N}, & e(v)\to\mathrm{N},\\ \mathrm{W}, & e(v)\to\mathrm{W},\\ \mathrm{S}, & e(v)\to\mathrm{S},\\ \mathrm{E}, & e(v)\to\mathrm{E},\end{cases} \tag{9.3.4}$$

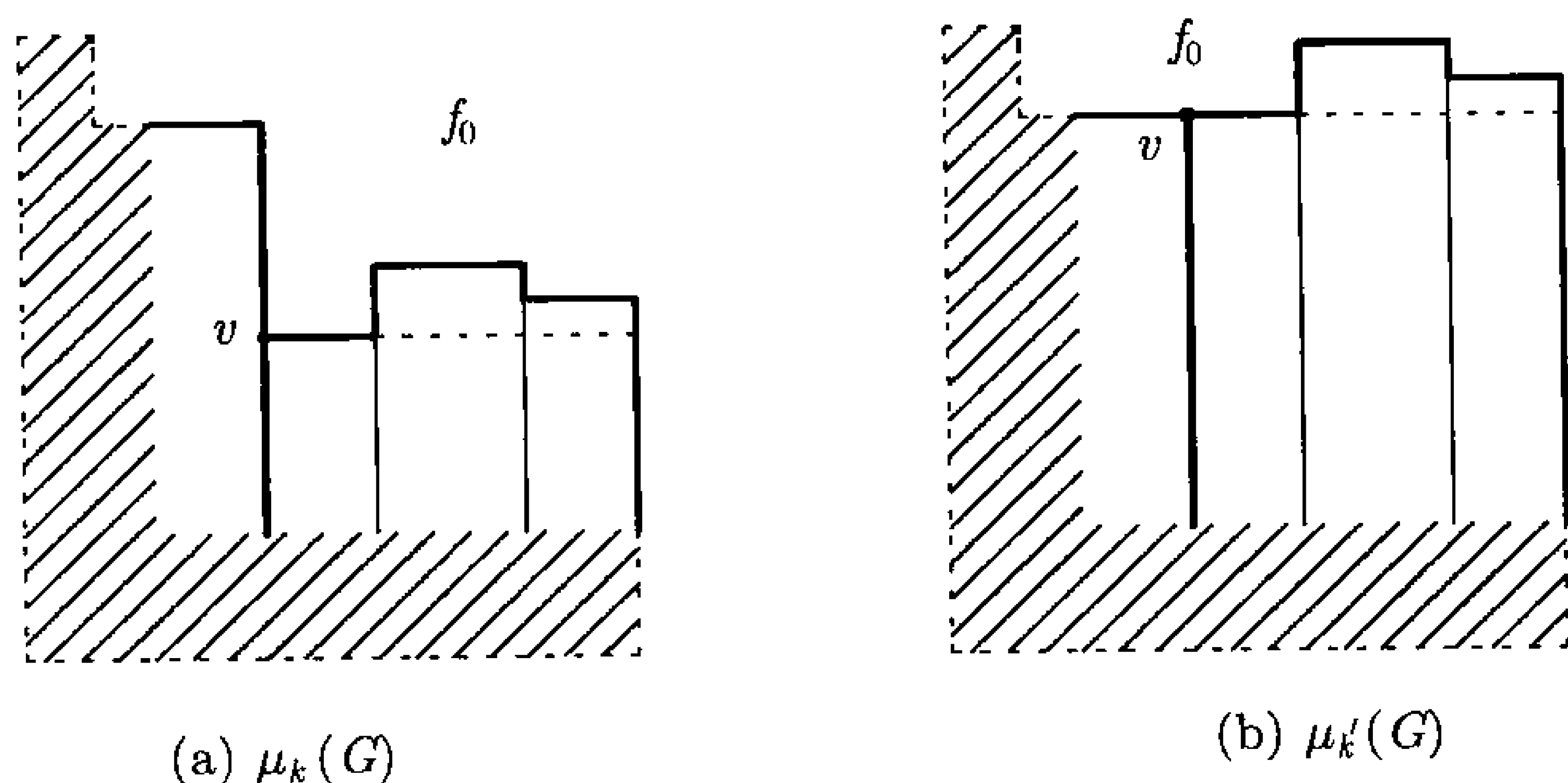
并称之为 e 在 v 处**走向**.

令 f_0 为 G 的一个 k 嵌入 $\mu_k(G)$ 的无限面, 若 f_0 的一个直节点 v 有一条从 v 出发, 垂直 f_0 在 v 处的面边界的半直线, 在 f_0 内不与 $\mu_k(G)$ 的任何其他节点或点交叉, 则称它是**裸的**. 若一个裸节点 v 处的那条半直线是从 v 指向 N(北), W(西), S(南) 或 E(东), 则称它为 f_0 的北节点、西节点、南节点或东节点.

引理 9.3.1 若 G 是 k 可嵌入的 $(k\geqslant 1)$, 则 G 有这样的一个 k 嵌入 $\mu_k(G)$, 使得在无限面边界上的所有 3 节点 (或 3 次的节点)全是直节点.

证 对无限面 f_0 边界上, 非直的 3 节点的数目用归纳法. 若这个数为 0, 容易看出 $\mu_k(G)(k\geqslant 1)$ 本身满足定理. 设 v 是 f_0 边界上的一个 3 节点. 它不是直的. 设在 f_0 的边界上与 v 关联的两边中有一个带折 s, 使得 vs 是一个水平或竖直的线段且自然 $\mathrm{St}(s;f_0)=2$(如 (9.3.1) 式所示). 由于 v 不是直的, 则 $\mathrm{St}(v;f_0)=0$. 总可以假定 $\mathrm{St}(v;f_1)=1$, 其中 f_1 为与 s 关联的那个有限面. 在 $\mu_k(G)$ 上, 通过平行移动由 v 出发、垂直于 vs 与 f_1 的内部相遇的射线, 沿 vs 到 s, 使得与它垂直的线段的交点用在此移动中走的轨迹所代替, 如图 9.3.1 所示. 在所得的 k 嵌入 $\mu_k'(G)$ 中, 节点 v 对于 f_0' 变为直的, 而且在 f_0' 的边界上, 非直 3 节点的数目少 1; 否则, 即 s 是一个节点. 用平移 $\mu_k(G)$ 上, 从 v 开始, 通过 s 的极长线段沿 f_0 边界上与 v 关联的另一边的相反方向一小段, 并记 v 轨迹的终点 t 为所得 k 嵌入 $\mu_k'(G)$ 上边 (v,s) 上的一折, 并且 $\mathrm{St}(v;f_0)=0$. 这时 $\mathrm{St}(v;f_0')=1$, 即 v 变为直节点, 从而 f_0' 边界上非直节点的数目比 $\mu_k(G)$ 少 1. 由归纳法假设, 即可得引理结论. ◻

引理 9.3.2　对于 $k \geqslant 3$, 若图 $G=(V,E)$ 有一个 k 嵌入, 则它可扩张为这样的一个 k 嵌入, 使得在无限面 f_0 的边界上, 所有 3 节点全是裸的.



(a) $\mu_k(G)$　　　　(b) $\mu_k'(G)$

图 9.3.1

证　对 G 的阶用归纳法. 当阶小时容易验证. 一般地, 设 v 为 G 的 k 嵌入 $\mu_k(G)$ 的无限面 f_0 的边界上的一节点, 则 v 的次若不是 3 必为 4. 如果 v 是 3 次的, 令 v_1, v_2 和 v_3 为与 v 相邻的节点. 可以假定它们的次全为 4 而不失一般性. 由于 $\mu_k(G-v)$ 也是 k 嵌入, 由归纳法假设, $\mu_k(G-v)$ 可以扩张为 $\mu_k'(G-v)$, 使得在它的无限面 f_0' 边界上的所有 3 节点是裸的. 记

$$\mathrm{Ar}(v_1,v_2,v_3;f_0')=(\mathrm{Ar}(v_1;f_0'),\mathrm{Ar}(v_2;f_0'),\mathrm{Ar}(v_3;f_0')), \tag{9.3.5}$$

其中, $\mathrm{Ar}(v;f)$(v 在 f 的边界上) 表示这样的方向, 使得在此方向上在 v 处可以连边, 则由对称性, $\mathrm{Ar}(v_1,v_2,v_3;f_0')$ 只可能有如下 4 种可能情形:

$$(\mathrm{N},\mathrm{N},\mathrm{N}),\quad (\mathrm{N},\mathrm{E},\mathrm{N}),\quad (\mathrm{N},\mathrm{S},\mathrm{N}),\quad (\mathrm{N},\mathrm{E},\mathrm{W}).$$

对于每一情形, 均可在 $\mu_k'(G-v)$ 中恢复节点 v, 可能通过作引理 9.3.1 的证明中引进的运算后, 求得 $\mu_k'(G)$ 使之满足所需要的条件, 如图 9.3.2 所示.

设 v 为 4 次的, 并设 v_1, v_2, v_3, v_4 为 v 的相邻节点. 同样地, 可设 $\rho(v_i)=4(i=1,2,3,4)$ 而不失一般性, 而且以同样的理由, 可以设 $\mu_k'(G-v)$ 为一个 k 嵌入, 并满足所要的条件. 在 $\mathrm{Ar}(v_1,v_2,v_3,v_4;f_0)$ 的所有可能情形中, (N,N,S,E) 和 (N,E,S,W) 是两种最不利的情形, 会导致在一条边上用较多的折. 然而, 仍可以多半要经过如引理 9.3.1 引进的移动, 而得到 G 的一个 k 嵌入 $\mu_k(G)(k\geqslant 3)$ 使它满足引理中要求的条件, 如图 9.3.3 所示, 从而引理得证. □

定理 9.3.1　任何节点次不大于 4 的可平面图皆为 3 可实现的.

证　对 G 的阶用归纳法. 当阶较小时, 容易验证. 如前面所提到的, 只讨论 G 的所有节点的次, 非 3 即 4 的情形就够了.

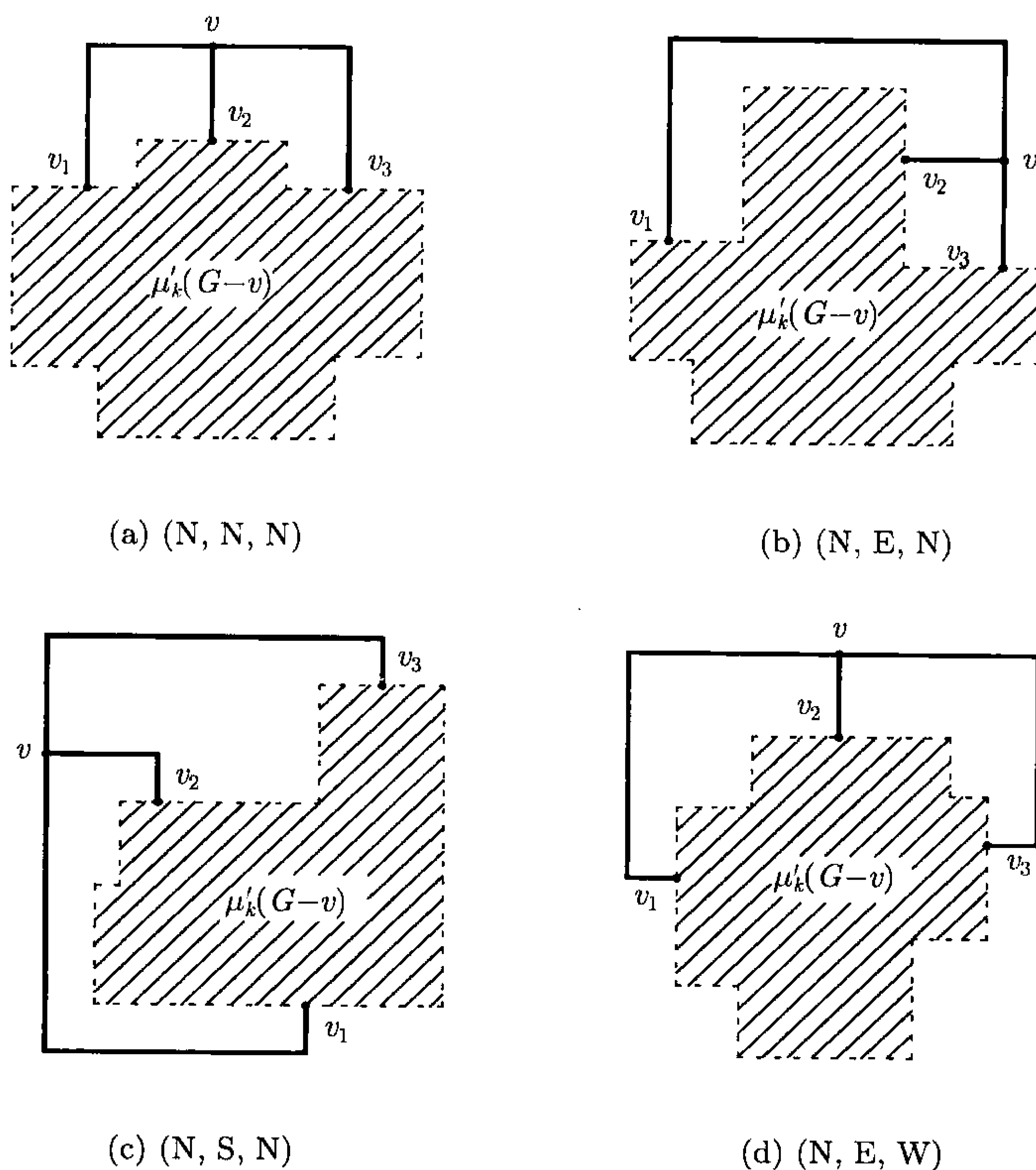


图 9.3.2

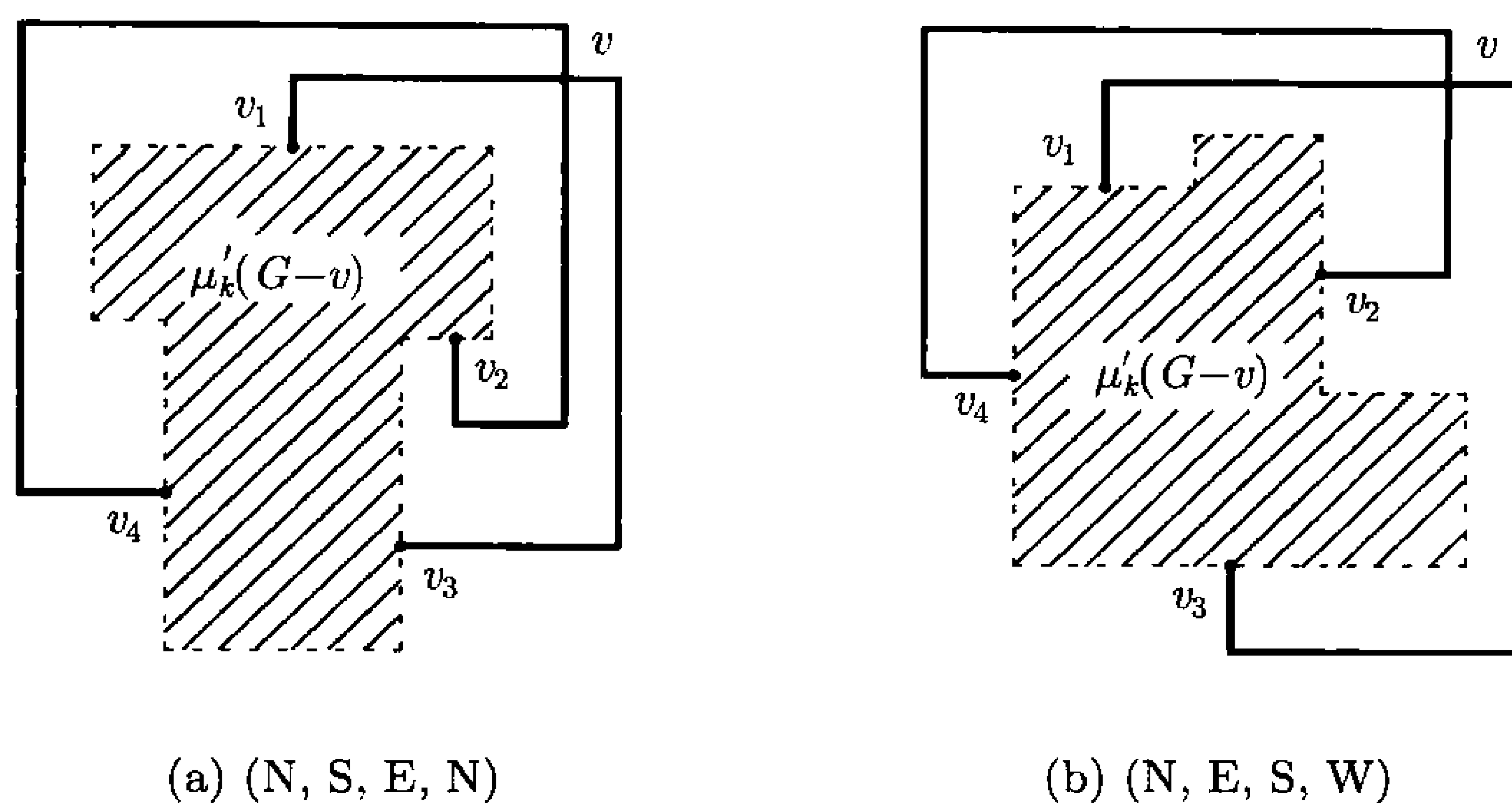


图 9.3.3

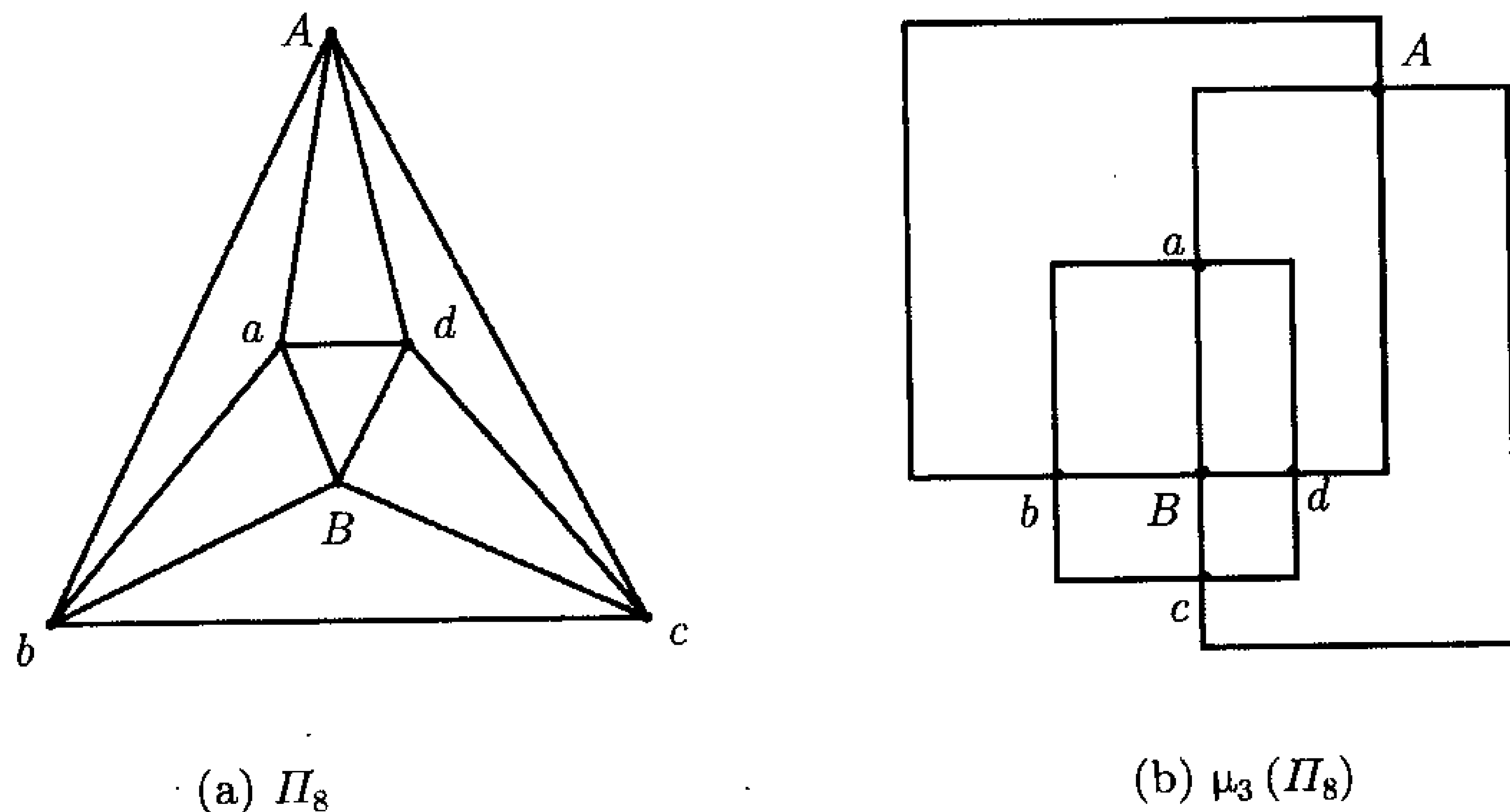
令 $v \in V$. 由归纳假设可知 $G-v$ 是 3 可嵌入的. 设 $\mu_3(G-v)$ 为它的一个 3 嵌入, 使得 v 的邻节点全在它的无限面 $f_0(v)$ 的边界上. 由引理 9.3.1 和引理 9.3.2, 可以假设 $f_0(v)$ 边界上的所有 3 节点全是裸的.

当 $\rho(v)=3$ 时, 将 v 放到 $f_0\langle v\rangle$ 的内部, 使得边 (v,v_1), (v,v_2) 和 (v,v_3) 均至多有三折, 如图 9.3.2 所示.

当 $\rho(v)=4$ 时, 类似地, 如图 9.3.3 所示. 由 $\mu_3(G-v)$ 得到 G 的一个 3 嵌入 $\mu_3(G)$. 当 v 的邻节点不全是在 $f_0\langle v\rangle$ 的边界上, 容易由 $\mu_3(G-v)$ 得到 $\mu_3(G)$.

由 f_0 的任意性, 即得定理结论. ♮

图 9.3.4 (a) 给出了正八面体 Π_8, 图 9.3.4(b) 为它的一个 3 嵌入.



(a) Π_8　　(b) $\mu_3(\Pi_8)$

图 9.3.4

引理 9.3.3　正八面体 Π_8 的任何平面嵌入, 都不可能扩张为一个 2 嵌入.

证　由定理 5.2.3 和对称性, 不管取哪一个面为无限面, 所得 Π_8 的平面嵌入, 对于纵横扩张均与图 9.3.4(a) 所表示的无异. 事实上,

$$\mathrm{Ar}(a,b,c,d;f_0(\Pi_8-A))$$

只有如下 12 种情形值得讨论:

$$(\mathrm{N,N,N,S}),\quad (\mathrm{N,N,E,S}),\quad (\mathrm{N,N,E,W}),$$
$$(\mathrm{N,N,E,E}),\quad (\mathrm{N,E,N,S}),\quad (\mathrm{N,N,S,W}),$$
$$(\mathrm{N,N,S,S}),\quad (\mathrm{N,S,N,E}),\quad (\mathrm{N,S,N,S}),$$
$$(\mathrm{N,E,S,W}),\quad (\mathrm{N,E,W,S}),\quad (\mathrm{N,S,E,W})$$

出现在 $C=abcd$ 的 k 嵌入中 $(k\leqslant 2)$. 然而不管上面的哪一种情形, 容易验证, 均不可能分别置 A 和 B 于它的外部和内部, 而得到 Π_8 的一个 2 嵌入, 从而引理得证. ♮

由引理 9.3.3 可知, 定理 9.3.1 的结果已经是最好的可能, 即不能再改进了. 然而还可以用在定理 9.3.1 的证明中出现的类似的方法, 将定理 9.3.1 引申得到如下的推论:

推论 9.3.1 任何节点次至多为 $k(1 \leqslant k \leqslant 4)$ 的可平面图均 $(k-1)$ 可嵌入.

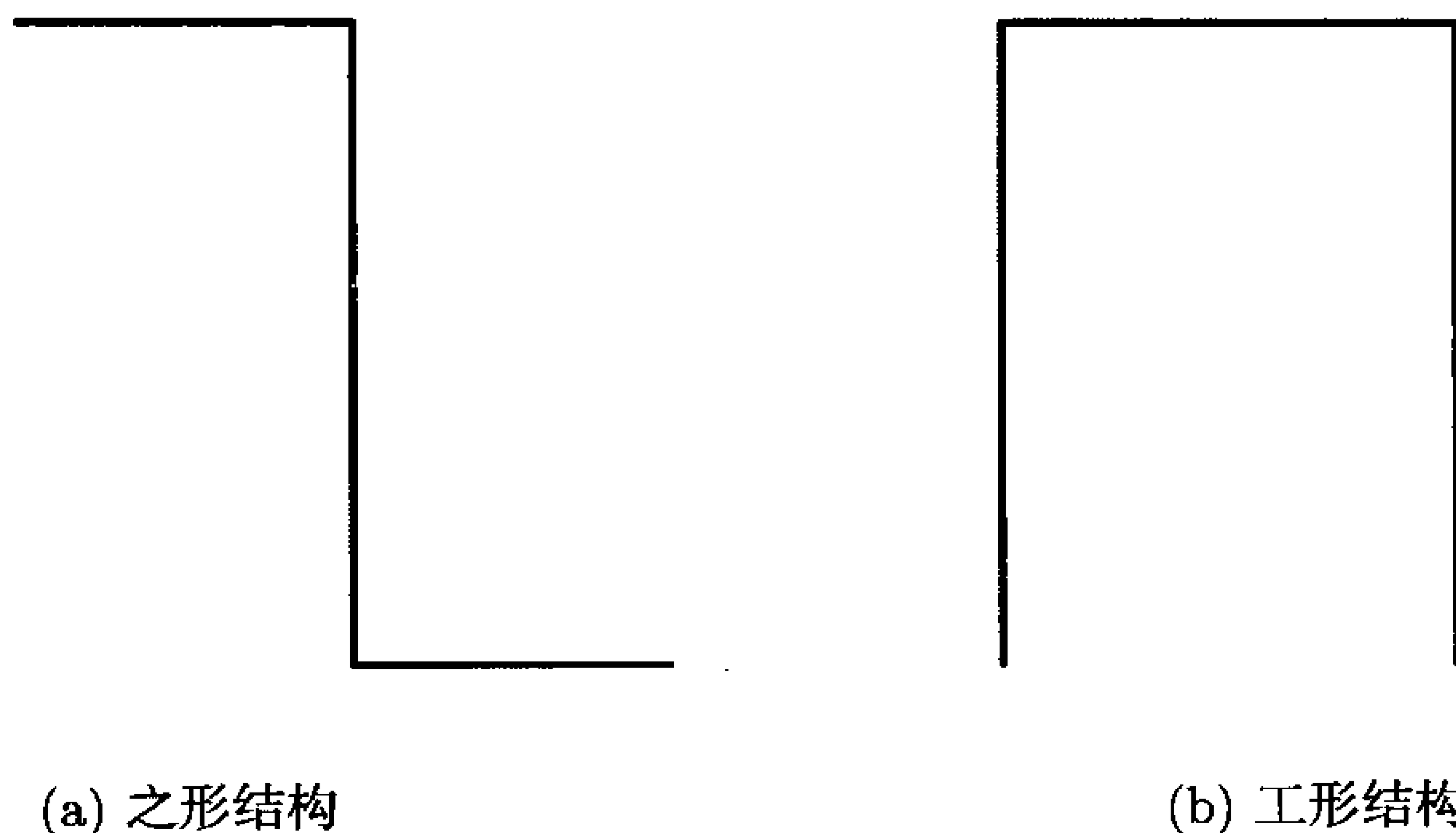
证 当 $k=1,2$ 时, 易证. 当 $k=4$ 时, 就是定理 9.3.1. 剩下只有 $k=3$ 的情形. 对 G 的阶用归纳法, 从定理 9.3.1 的证明过程中, 如图 9.3.2 所示, 即得推论结论. ♮

令 $Z_1=Z(v,u)$ 为由在水平 (或竖直) 线上线段 uv 和两条从 u 和 v 发出, 并与 uv 垂直的射线所围成的区域. 令 $Z_0=Z(v,w)$, 其中 w 为 uv 的内点, 充分接近 v. 若一个 3 嵌入 $\mu_3(G)$ 为从 $\mu_3(G)$ 通过将 Z_1 线性变换到 Z_0, 使得在 u 处的射线与 $\mu_3(G)$ 中与它垂直的线段的公共点 p, 随着射线从 u 到 w 变为其轨迹所示的线段, 则称 $\mu_3'(G)$ 为 $\mu_3(G)$ 从 Z_1 到 Z_0 的**压缩**.

引理 9.3.4 若 uv 为 G 的凸 3 嵌入 $\mu_3(G)$ 的内面 f 的边界上的一个线段, 则 $\mu_3(G)$ 从 $Z=Z(u,v)$ 到 $Z_0=Z(u,w)$ (w 为 uv 的一个内点) 的压缩 $\mu_3'(G)$ 仍然是 G 的一个凸 3 嵌入.

证 由纵横凸性和压缩运算的定义, 而且压缩运算不会增加一个折, 从而只要 $\mu(G)$ 凸 3 嵌入 $\mu_3'(G)$ 就是凸 3 嵌入. ♮

在一个 3 嵌入 $\mu_3(G)$ 中, 一个具有多于一折的边, 必含有一个**之形结构**, 如图 9.3.5(a) 所示, 或者一个**耳形或工形结构**, 如图 9.3.5(b) 所示. 事实上, 在 $\mu_3(G)$ 中, 任何一边上的之形结构, 全是非本质的, 而且一条边上的两端均非节点的耳形, 也是非本质的. 进而, 如果 $\mu_3(G)$ 是凸的, 则由引理 9.3.4, 可以假设它的所有内边都至多有一折.



(a) 之形结构 (b) 工形结构

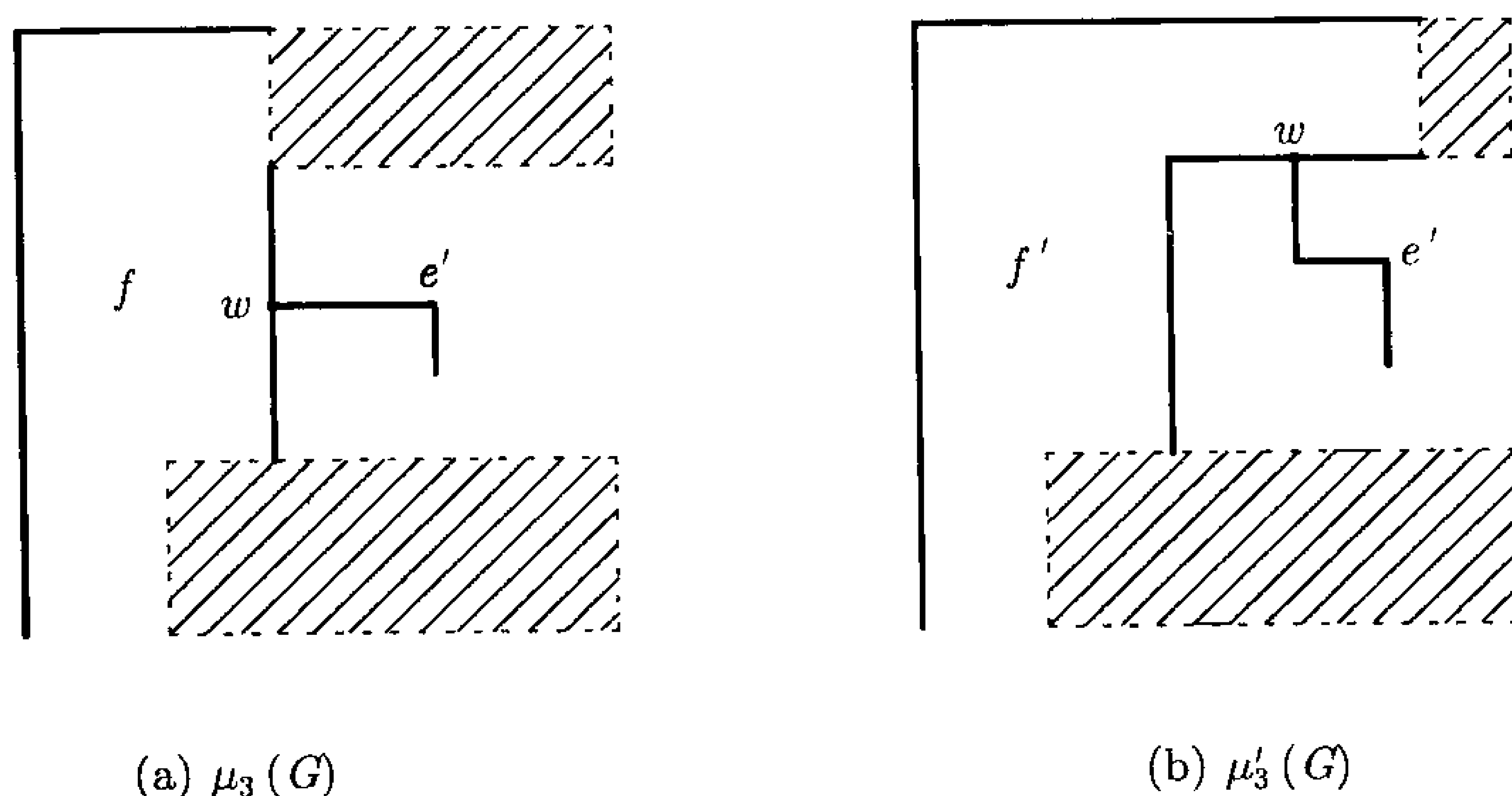
图 9.3.5

引理 9.3.5 令 $\mu_3(G)$ 是图 G 的一个凸 3 嵌入, 用 f_0 和 f 分别表示它的这个无限面和一个内面. 对于不在 f_0 的边界上而在 f 的边界上的一个 3 节点 w, $\mu_3(G)$ 可以扩张为另一个凸 3 嵌入 $\mu_3'(G)$, 使 f 在其上相应的面 f' 有如下关系:

$$\mathrm{Ar}(v;f')=\begin{cases}\mathrm{Ar}(v;f), & v\neq w,\\ \mathrm{Ar}(v;f)\pm\dfrac{\pi}{2}, & v=w.\end{cases} \tag{9.3.6}$$

证　由引理 9.3.1, 可以假设在 f 边界上的所有 3 节点, 全对 f 为直的. 分两种情形讨论.

情形 1　如果在 f 的面边界上与 w 关联的两边之一无折, 则由凸性和 w 为 3 节点, 与 w 关联不在 f 面边界上的那一条边 e' 在 $\mu_3(G)$ 中至多有一折. 如果 e' 无折, 通过在 e' 上和那条在 f 的边界上且与 w 关联的无折边各引进一折, 然后再作适当地移动, 即可从 $\mu_3(G)$ 得到 $\mu_3'(G)$ 也是凸 3 嵌入, 而且满足 (9.3.6) 式. 若 e' 有一折, 如图 9.3.6 所示. 由引理 9.3.4, 总可将它同时转化为无折.



(a) $\mu_3(G)$　　　　(b) $\mu_3'(G)$

图 9.3.6

情形 2　否则, 因为在 f 边界上, 与 w 关联的两边均有折, 也总可以将 $\mu_3(G)$ 变到 $\mu_3'(G)$, 如图 9.3.7 所示 (按照与情形 1 同样的理由), 使得仍为凸 3 嵌入且满足 (9.3.6) 式, 或者当 e' 的折为另外的方式时, 变到情形 1.

综上所述, 即得引理结论.　　　　ǂ

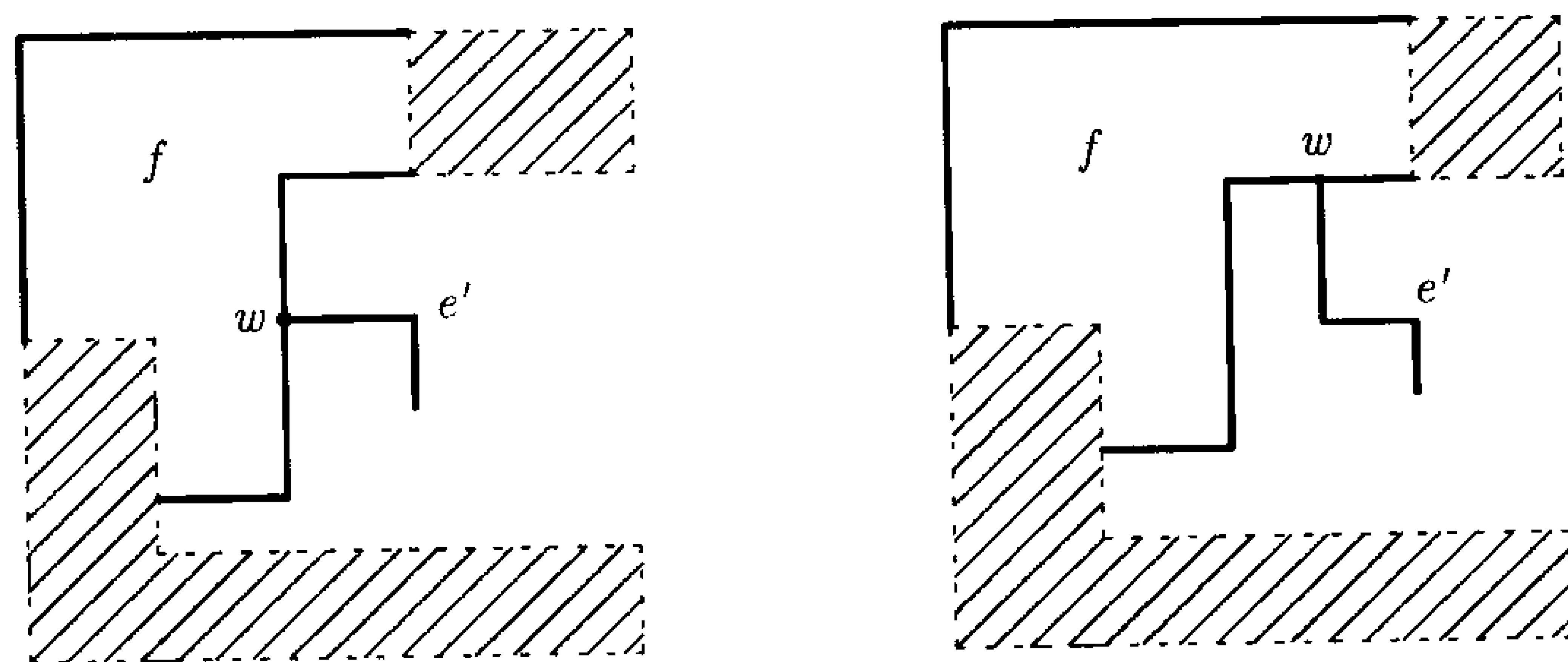


图 9.3.7

引理 9.3.6　令 G 为一个不可分离的可平面图, 并且节点的次均不超过 4. 设 G 有一个平面嵌入 $\mu(G)$, 使得它的所有有限面均与它的无限面 f_0 相邻, 则 $\mu(G)$ 是凸 3 可扩张的.

证 因为将 f_0 的边界去掉之后, $\mu(G)$ 变为一个森在平面上的嵌入. 对于 f_0 边界上的 4 节点 v, 将与它关联的在 f_0 边界上的两边相应此森在 v 处与一个附加的显节点连的边, 记这样得到的森为 $\tilde{T}$. 由于总可以将 $\tilde{T}$ 纵横扩张为一个 1 嵌入, 使得它的所有显节点全落在一个矩形的边界上. 在此基础上, 去掉矩形边界上不相应 $\mu(G)$ 中边的线段, 经过适当变换之后, 即可得 $\mu(G)$ 的凸 2 扩张. 当然, 更是 $\mu(G)$ 的凸 3 扩张. ♮

定理 9.3.2 一个节点次不超过 4 的可平面图 G(仍限定为 3 连通的)是凸 3 可实现的当且仅当在 G 的任何平面嵌入中均不含 $\langle 4,4,4\rangle$.

证 根据前面所讨论的可知必要性是显然的. 只证充分性. 对 G 的度用归纳法. 当度较小时, 容易验证.

一般地, 令 $\mu(G)$ 为 G 的一个纵横凸嵌入. 由定理 9.3.2, 这是总可办到的. 若它的所有有限面都与 f_0 相邻, 则由引理 9.3.6 可知 $\mu_3(G)$ 为凸 3 可扩张的; 否则, 可以假设 $e=(u,v)$ 是这样的边, 使得 u 和 v 均不在 f_0 的面边界上.

由归纳假设知 $\mu(G-e)$ 可扩张为一个凸 3 嵌入 $\mu_3'(G-e)$. 记 f' 为 $\mu_3'(G-e)$ 的相应 $\mu(G)$ 中与 e 关联的两个面的那个面.

依引理 9.3.1 的证明中的方法, 总可以假设 u 和 v 对于 f' 都是直的.

情形 1 若 $\mathrm{Ar}(u;f')\neq\mathrm{Ar}(v;f')$, 可以假设 $\mathrm{Ar}(u;f')=\mathrm{Ar}(v;f')\pm\dfrac{\pi}{2}$. 若不然, 由引理 9.3.4 和 f' 的凸性可知, 总能在 $\mu_3'(G-e)$ 的基础上, 恢复 e 作为无折线段得凸 3 嵌入 $\mu_3(G)$. 由于从凸性可知, 分别以 u 和 v 为出发点, 沿 $\mathrm{Ar}(u;f')$ 和 $\mathrm{Ar}(v;f')$ 方向的射线与 f' 内部各有一个公共线段, 则由引理 9.3.4, 这两条线段可以假设有一个公共点 p. 自然, p 必在 f' 的内部. 由此, 可以在 $\mu_3'(G-e)$ 上恢复边 e 为从 u 到 p 和从 p 到 v 带一折 p 的线所表示. 容易验证, 如此所得的即为 G 的一个凸 3 嵌入 $\mu_3(G)$.

情形 2 若 $\mathrm{Ar}(u;f')=\mathrm{Ar}(v;f')$, 则由引理 9.3.5, 可化为情形 1.

由于选取 $\mu(G)$ 的任意性, 即得定理结论. ♮

9.4 双可嵌入性

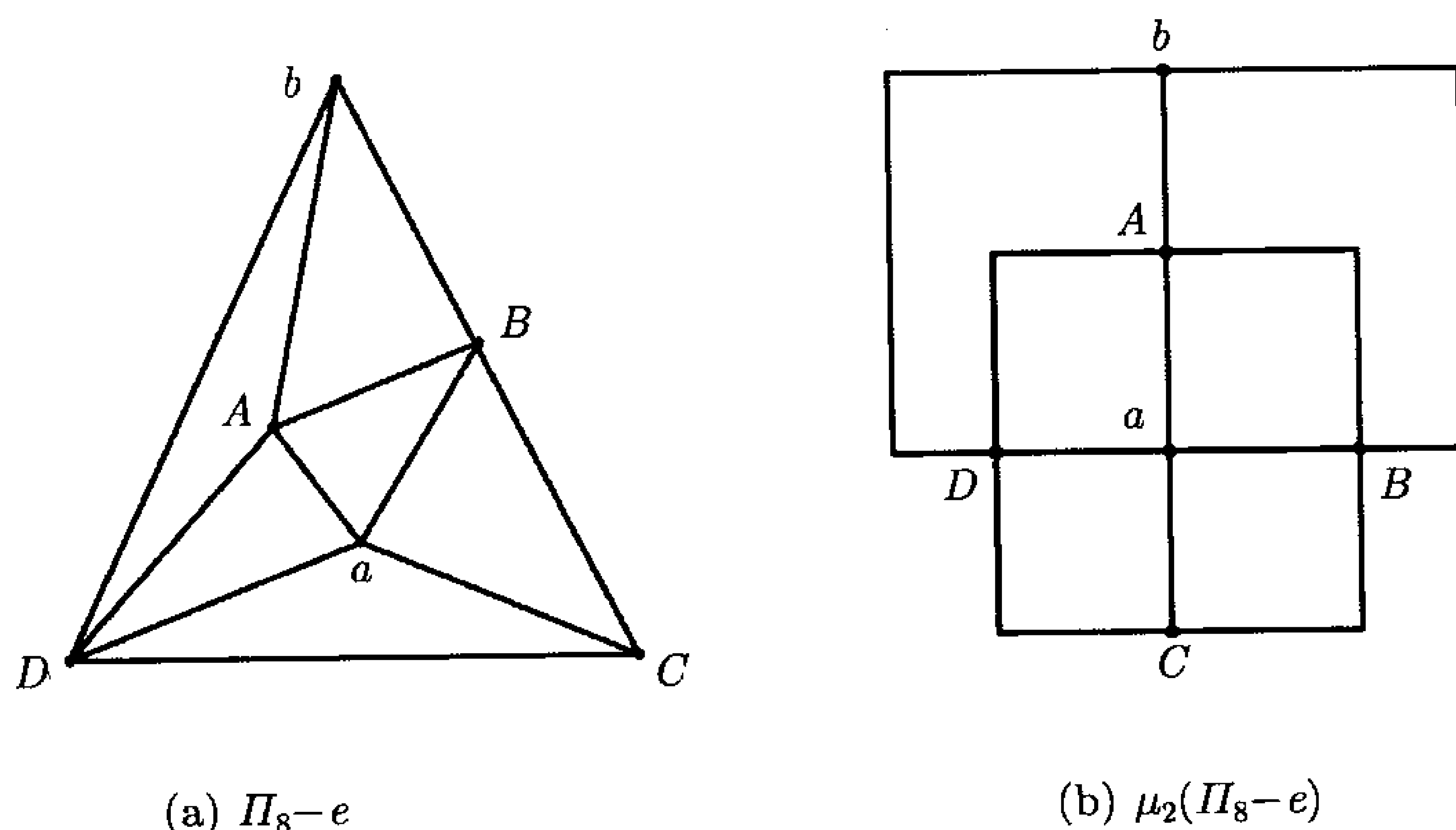
由于任一个图, 如果它有一个子图是非 2 可嵌入的, 则它本身也必为非 2 可嵌入的. 这就允许只讨论极小的非 2 可嵌入的图, 并称之为 2*障碍*. 所谓极小即指无真子图为非 2 可嵌入的.

引理 9.4.1 正八面体 Π_8 是一个 2 障碍.

证 由引理 9.3.3 可知, Π_8 是非 2 可嵌入的, 而且容易检验, 它的所有真子图皆为 2 可嵌入的. 事实上, 由对称性可知, Π_8 的任何一个真子图均与 Π_8-e 的一

个子图同构, 其中 e 是任选的一条边. 然而, 图 9.4.1 给出了 $\Pi_8 - e$ 和它的一个 2 嵌入.

对于图 $G=(V,E)$ 的一个 2 嵌入 $\mu_2(G)$, 令 $\mathrm{Oc}(v;f)$ 为 $\mathrm{Or}=\{\mathrm{N},\mathrm{W},\mathrm{S},\mathrm{E}\}$ 的这样一个子集, 使得其中的每个方向均被与 f 边界上节点 v 关联的边所占有. 当然, 只有那些次小于 4 的节点 v, $\mathrm{Oc}(v;f)$ 才非 Or, 并且在 9.3 节中所定义的 $\mathrm{Ar}(v;f)$ 为 $\overline{\mathrm{Oc}}(v;f)=\mathrm{Or}-\mathrm{Oc}(v;f)$ 的一个子集, 使得其中的每一个方向均表示在 f 的内部可以连边.



(a) Π_8-e　　(b) $\mu_2(\Pi_8-e)$

图 9.4.1

容易看出. 如果 $G=(V,E)=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=v\in V$, 则 G 的一个 2 嵌入, 可以由 G_1 和 G_2 的 2 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 经过将二者中的 v 合而为一所合成当且仅当 v 在 $\mu_2(G_1)$ 中有一个关联面 f_1 且在 $\mu_2(G_2)$ 中有一个关联面 f_2, 使得至少它们中之一 (不妨设为 f_1) 为无限面和

$$\mathrm{Oc}(v;f_1)\subseteq \mathrm{Ar}(v;f_2). \tag{9.4.1}$$

满足条件 (9.4.1) 式的节点, 被称对于 2 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 为可合成的.

类似地, 若 $G=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=u+v$, 即 $\{u,v\}\subseteq V$ 为 G 的一个劈对, 则 G 的一个 2 嵌入 $\mu_2(G)$ 可由 G_1 和 G_2 的 2 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$, 经过分别由它们中相应 u 和 v 的节点合而为一所得到当且仅当 u 和 v 同时对于两个面 f_i ind $\{u,v\}\subset\mu_2(G_i)(i=1,2)$ 是可合成的, 并使在 u 和 v 处的旋与 $\mu_2(G)$ 中的一致.

引理 9.4.2　令 $G=(V,E)=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=v\in V$. 一个平面嵌入 $\mu(G)$, 它的无限面边界为平面嵌入 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的无限面边界无公共边之并, 为 2 可扩张的当且仅当 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 同为 2 可扩张的.

证　令 $f_0=f_0(G)$, $f_0(G_1)$ 和 $f_0(G_2)$ 分别为 $\mu(G)$, $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的无限面.

因为 $\mu(G)$ 的任何 2 扩张 $\mu_2(G)$ 限制在 G_1 和 G_2 上的部分 $\mu_2(G)|_{G_1}$ 和 $\mu_2(G)|_{G_2}$, 均分别为 G_1 和 G_2 的 2 扩张, 必要性显然.

反之, 设 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 分别为 G_1 和 G_2 的 2 扩张. 若 $\rho(v;G_1)$ 和 $\rho(v;G_2)$ 中有一个为 1, 不妨设 v 在 G_1 中的次 $\rho(v;G_1)=1$, 则不管 $\rho(v;G_2)=1,2,3$, 总可以使得在 $\mu_2(G_2)$ 中 $\mathrm{St}(v;f_0(G_2))\geqslant 1$ 且 $\mathrm{Oc}(v;f_0(G_1))\subseteq \mathrm{Ar}(v;f_0(G_2))$. 这就是说, v 对于 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 是可合成的, 从而 $\mu(G)$ 是 2 可扩张的; 否则, 即 $\rho(v;G_1)=\rho(v;G_2)=2$. 因为 2 节点 v 在一个 2 嵌入的面 f 的边界上, 总可以使得 $\mathrm{St}(v;f)=2$, 从而 2 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 总可以约定具有性质 $\mathrm{St}(v;f_0(G_i))=2(i=1,2)$ 和 $\mathrm{Oc}(v;f_0(G_1))=\mathrm{Ar}(v;f_0(G_2))$. 也就是说, v 这时对于 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 也是可合成的, 故 $\mu(G)$ 是 2 可扩张的. 这就得到了充分性. ♮

引理 9.4.3 令 $G=(V,E)=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=u+v(u,v\in V)$. 记

$$\rho(u;G_1)=\rho(u;G_2)=\rho(v;G_1)=\rho(v;G_2)=2.$$

一个平面嵌入 $\mu(G)$, 使得 u,v 全在无限面 f_0 的边界上为 2 可扩张的当且仅当 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 是 2 可扩张的, 使得

$$\begin{aligned}\mathrm{St}(v;f_0(G_1))&=\mathrm{St}(v;f_0(G_2)),\\ \mathrm{Ar}(v;f_0(G_1))&=\mathrm{Oc}(v;f_0(G_2))\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\mathrm{St}(u;f_0(G_1))&=\mathrm{St}(u;f_0(G_2)),\\ \mathrm{Ar}(u;f_0(G_1))&=\mathrm{Oc}(v;f_0(G_2)).\end{aligned}$$

证 因为容易验证, 若 $\mu_2(G)$ 为 $\mu(G)$ 的一个 2 扩张, 则它限制在 G_1 和 G_2 的部分必为 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的 2 扩张, 并且满足所要求的条件, 故必要性显然.

反之, 由 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的 2 扩张 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 满足给定的条件, 利用引理 9.4.2 的证明中的方法, 即可导致 $\mu(G)$ 的一个 2 扩张, 从而定理的充分性成立. ♮

虽然引理 9.4.2 和引理 9.4.3 还可以推广到 2 可嵌入的情形, 但由于这时比较复杂, 要占用过多的篇幅, 不能在这里讨论了. 它们的意义在于使得可以只研究 3 连通的图而不失一般性. 由于 1 节点和 2 节点对于图的 2 可嵌入性 (即双可嵌入性) 来说无足轻重, 只限于讨论标准图.

引理 9.4.4 若 G 有一个 2 嵌入, 使得所有在无限面 f_0 的边界上的 3 节点都是裸的, 则所有那些可视为经在 f_0 内引进一个 r 节点 $(r\leqslant 3)$ 而得到的图均有 2 嵌入, 并且无限面上的所有 3 节点也全是裸的.

证 用引理 9.4.2 的证明中的方法. 因为一个 r 节点 $(r\leqslant 3)$ 总可被放在一个 2 嵌入 $\mu_2(G)$ 的无限面 f_0 内, 使得与它关联的边都至多有两折, 而且所得到的 2 嵌入可使得在无限面边界上的 3 节点全是裸的. 这就得到了引理结论. ♮

引理 9.4.5　对于 3 连通的标准图, 在一个 2 障碍上的所有节点必全为 4 节点.

证　设 H 是一个 2 障碍, 用反证法. 由标准性, 令 v 一个 3 节点. 如果 $H-v$ 不再有 4 节点, 则令 $H_0 = H - v$; 否则, 令 $H_1 = H - v$, 设 v_1 是一个与 H_1 中 4 节点相邻, 但它本身的次小于 4 的节点, 则 $H_2 = H_1 - v_1$ 的 4 节点比 H_1 的至少少 1. 如果 H_2 已不再有 4 节点, 则令 $H_0 = H_2$; 否则, 用 $H_1 - v$ 代替 H_1 的位置, 继续做下去. 由有限性总可以得到 H_0. 从推论 9.4.1 可知 H_0 是 2 可实现的. 这就使得可以假设 $\mu_2(H_0)$ 是这样的一个 2 嵌入, 只有它的无限面边界上的节点与去掉的节点相邻, 从而根据引理 9.4.4, 按去掉节点的相反次序, 用引理 9.4.2 的证明中的方法, 恢复已经去掉的节点, 所得到的即为 H 的一个 2 嵌入. 与 H 为 2 障碍矛盾.　♮

引理 9.4.6　对于 4 正则图 $G = (V, E)$, 任何三角形均不可能是它的某个 2 嵌入的无限面的边界.

证　用反证法. 假设三角形 $v_1v_2v_3$ 形成了 G 的某个 2 嵌入 $\mu_2(G)$ 的无限面 f_0 的边界. 因为 $v_i(i = 1, 2, 3)$ 皆为 4 节点, 于是有 $\mathrm{St}(v_i, f_0) = 0(i = 1, 2, 3)$. 然而这是不可能的. 理由是可以检验, 任何三角形均没有 2 嵌入, 满足这一性质.　♮

引理 9.4.7　若一个 4 正则图 $G = (V, E)$ 有一个平面嵌入 $\mu(G)$, 使得所有面皆为三角形, 则 G 与正八面体 Π_8 同构.

证　由节点的 4 正则性和面的 3 正则性可知, $\mu(G)$ 为球面上的 (4,3) 多面形. 从定理 5.1.1, 即得引理结论.　♮

引理 9.4.8　一个 4 正则的 3 连通标准图 $G = (V, E)$ 的任何平面嵌入 $\mu(G)$, 若它的无限面 f_0 的次大于 3, 则 $\mu(G)$ 是 2 可扩张的.

证　若 $\mu(G)$ 不含构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 则由定理 9.4.2 可知它是 3 可扩张的, 而且无限面的边界上总可使每一边至多两折, 满足

$$\forall\ v \in V(f_0), \quad \mathrm{St}(v; f_0) = 0, \tag{9.4.2}$$

其中 $V(f_0)$ 为无限面 f_0 的边界上节点的集合. 又注意到在任何一个凸 3 嵌入中, 所有内边均可至多一折, 故这个 3 嵌入实际上是 2 嵌入.

一般地, 对 $\mu(G)$ 中构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 的数目用归纳法. 设 $C = (v_1, v_2, v_3)$ 形成这样的构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 使得在 C 的内部不再有构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 由于 C 可以嵌入到平面上, 使得

$$\forall\ v_i(i = 1, 2, 3), \quad \mathrm{St}(v_i; C_{\mathrm{in}}) = \mathrm{St}(v_i; C_{\mathrm{out}}) = 1 \tag{9.4.3}$$

和其上只有一条边为两折, 而其他的边皆为一折. 又从定理 9.4.2 可知, C 连同 $\mu(G)$ 在 C 内部区域中的部分有一个凸 2 扩张 $\mu_2(G; C_{\mathrm{in}})$; 而且由归纳假设, C 连同 $\mu(G)$ 在 C 外部区域中的部分也有一个 2 扩张 $\mu_2(G; C_{\mathrm{out}})$. 因为满足 (9.4.3) 式 C 的嵌

入实质上是唯一的, 从而这两个 2 嵌入 $\mu_2(G;C_{\text{in}})$ 和 $\mu_2(G;C_{\text{out}})$ 可合成 $\mu(G)$ 的一个 2 扩张. ♮

定理 9.4.1 一个 3 连通标准图 $G=(V,E)$ 是 2 可嵌入的当且仅当 $G\ncong \Pi_8$.

证 由引理 9.4.1 可得必要性. 反之, 由引理 9.4.5~ 引理 9.4.8 可知, 3 连通标准图的 2 障碍的完备集就是由 Π_8 本身组成, 从而定理的充分性得证. ♮

引理 9.4.9 对于不可分离的标准图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 如果它的一个面 f 的边界 C 有一个 2 嵌入 $\mu_2(C)$, 使得

$$\text{St}(v;C_{\text{in}})\begin{cases}=2, & \rho(v;G)=4,\\ \geqslant 1, & \rho(v;G)=3,\end{cases} \tag{9.4.4}$$

则 G 有一个 2 嵌入以 $\mu_2(C)$ 为其无限面的边界.

证 若 G 没有 4 节点, 则由推论 9.4.1 可得 $\mu(G)$ 的一个 2 扩张, 使得 C 为无限面边界. 由引理 9.4.1, 总可以使得满足条件 (9.4.4); 否则, 利用引理 9.4.5 的证明中所建议的方法, 仍可得 $\mu(G)$ 的一个 2 扩张, 使得 C 为无限面边界. 同样, 由引理 9.4.1 可使得满足条件 (9.4.4). ♮

引理 9.4.10 令 $G=(V,E)=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=u(u\in V,\ \rho(u)\leqslant 4)$, 则 G 是 2 可嵌入的当且仅当 G_1 和 G_2 同是 2 可嵌入的.

证 由于 G 的任何一个 2 嵌入均导致 G_1 和 G_2 的 2 嵌入, 必要性显然. 反之, 由 G_1 和 G_2 的 2 可嵌入性可知 G 必为可平面的, 而且可以假设 G_1 和 G_2 均不可分离; 否则, 可以逐个地讨论它们的块. 由引理 9.4.2 和引理 9.4.9, 即可导出引理结论. ♮

引理 9.4.11 令 $G=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=u+v(u,v\in V,\ \rho(u),\ \rho(v)\leqslant 4)$, 则 G 是 2 可嵌入的当且仅当 G_1 和 G_2 同为 2 可嵌入的.

证 必要性显然. 只证充分性. 由 2 可嵌入性, G 必为可平面的. 因为 G 总有一个平面嵌入, 使得无限面与 u 和 v 关联. 记 $f_0(G_1)$ 和 $f_0(G_2)$ 分别为 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的无限面. 可以检验, 不管怎样, $f_0(G_1)$ 和 $f_0(G_2)$ 的边界 C_1 和 C_2 总有 2 嵌入满足 (9.4.4) 式, 并使得对于劈对 $\{u,v\}$ 可合成的条件也满足, 从而由引理 9.4.3 和引理 9.4.9 即可得充分性. ♮

推论 9.4.1 一个节点次小于 5 的连通图 $G=(V,E)$ 是 2 可嵌入的当且仅当它是可平面的, 并且不与 Π_8 同构.

证 由引理 9.4.10, 引理 9.4.11 和定理 9.4.1, 即可得推论结论. ♮

推论 9.4.2 一个节点次小于 5 的 2 连通可平面图 $G=(V,E)$ 是 2 可实现的当且仅当 G 的任何一个平面嵌入均没有三角形的面, 使得其上三个关联节点的次均为 4, 或简记为 (4,4,4).

证 因为 (4,4,4) 的三角形面不可作任何 2 嵌入的无限面, 必要性为真. 反之, 因为没有三角形面 (4,4,4), 由引理 9.4.9 和推论 9.4.1 可知, 任何面均可作为 2 扩张的无限面, 从而充分性也真. ♮

下面讨论一个图的凸 2 可嵌入性的表征.

引理 9.4.12 一个可平面的 3 连通标准图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 是凸 2 可扩张的当且仅当 $\mu(G)$ 没有构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 而且其无限面不是三角形 (4,4,4).

证 如前所述, 必要性显然. 只证充分性. 由于无 $\langle 4,4,4\rangle$, 定理 9.4.2 使得有 $\mu(G)$ 是凸 3 可扩张的. 然而, 无限面非 (4,4,4), $\mu(G)$ 实际上为凸 2 可扩张. 充分性得证. ♮

引理 9.4.13 一个 3 连通的可平面标准图 $G=(V,E)\not\simeq \Pi_8$ 是凸 2 可嵌入的当且仅当 $\mu(G)$ 无构形 $\langle 4,4,4\rangle$.

证 若 $\mu_2(G)$ 是 G 的一个凸 2 嵌入. 因为 $\langle 4,4,4\rangle$ 的出现导致不可能有凸 3 扩张, 更无凸 2 扩张, $\mu_2(G)$ 中不可能有构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 必要性得证. 反之, 因为 $G\neq \Pi_8$, 由定理 9.4.1 可知 G 是 2 可嵌入的. 令 $\mu_2(G)$ 为 G 的一个 2 嵌入, 然而, 它的无限面不可能是 (4,4,4). 由引理 9.4.12 可知 $\mu_2(G)$ 的凸 3 扩张, 实际上为凸 2 扩张. 这就得到了充分性. ♮

定理 9.4.2 一个 3 连通的可平面标准图 $G=(V,E)\not\simeq \Pi_8$ 是凸 2 可实现的当且仅当它的平面嵌入 $\mu(G)$ 既无三角形面 (4,4,4), 也无构形 $\langle 4,4,4\rangle$.

证 必要性显然. 只证充分性. 由 5.3 节中所讨论的 G 的平面嵌入的唯一性, 由引理 9.4.12 即可得充分性. ♮

9.5 单可嵌入性

本节的主要任务在于对一些类型的 2 可嵌入的图找出 1 可嵌入性 (或者说, 单可嵌入性) 的禁用构形的完备集, 以刻画其中 1 可嵌入的图.

引理 9.5.1 设 $\mu(G)$ 是一个 3 正则图的一个平面嵌入. 若 $\mu(G)$ 的无限面不是三角形, 则它是凸 1 可扩张的.

证 由引理 9.4.12, $\mu(G)$ 是凸 2 可扩张的. 设 $\mu_2(G)$ 为 $\mu(G)$ 的一个凸 2 扩张. 由凸性, $\mu_2(G)$ 的所有内边均至多有一折, 进而因无限面 f_0 非三角形, 它有一个凸嵌入, 使得对任何节点 v ind f_0 都有 $\mathrm{St}(v;f_0)=1$. 因此, $\mu_2(G)$ 实际上就是 $\mu(G)$ 的一个凸 1 扩张. ♮

引理 9.5.2 一个 3 正则可平面图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 不是 1 可嵌入的当且仅当它的每个面均为三角形.

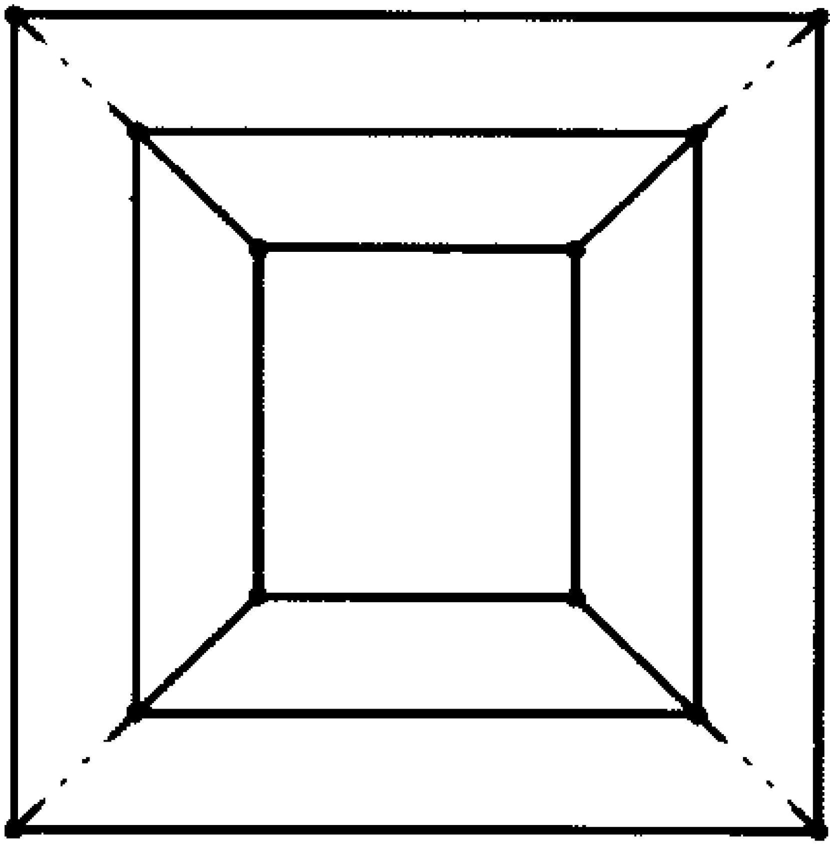
证 因为容易检验, 三角形面 f 不可能有一个 1 嵌入, 使得对所有 v ind f, $\mathrm{St}(v;f)=1$. 任何三角形面均不能为 G 的某 1 嵌入的无限面, 从而充分性得证. 反

之, 由引理 9.5.1, 即得必要性. ♮

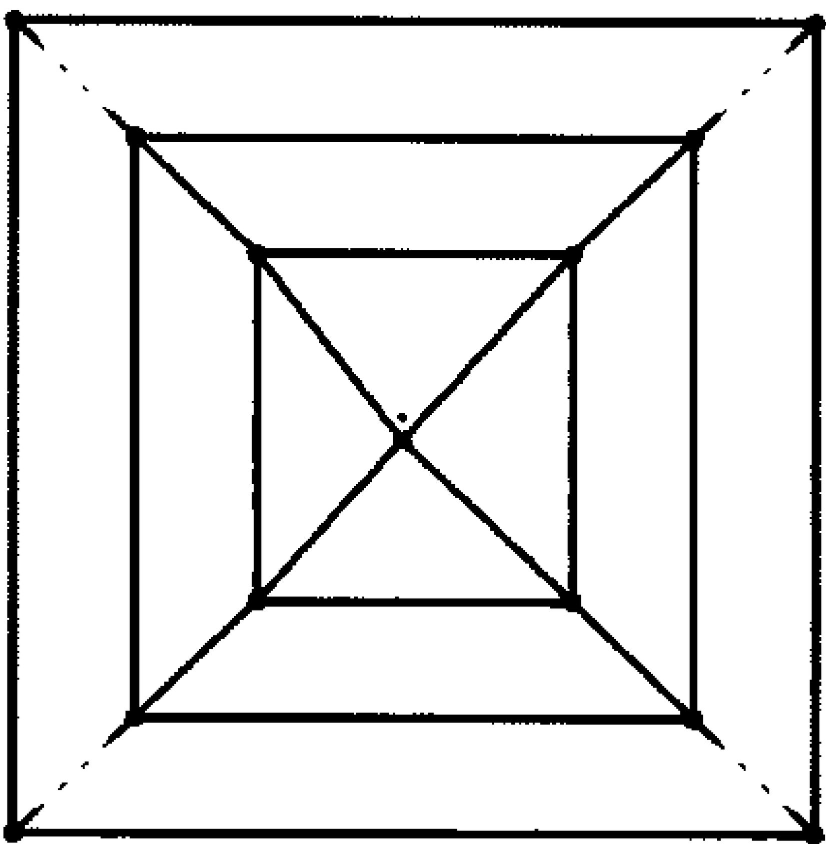
定理 9.5.1 一个 3 正则图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 是 1 可嵌入的当且仅当 $\mu(G_1)\ncong \Pi_4$, 即正四面体.

证 因为由定理 5.1.1 可知, $\mu(G)$ 的所有面皆三角形当且仅当 $\mu(G)\cong \Pi_4$, 故由引理 9.5.2, 即得定理结论. ♮

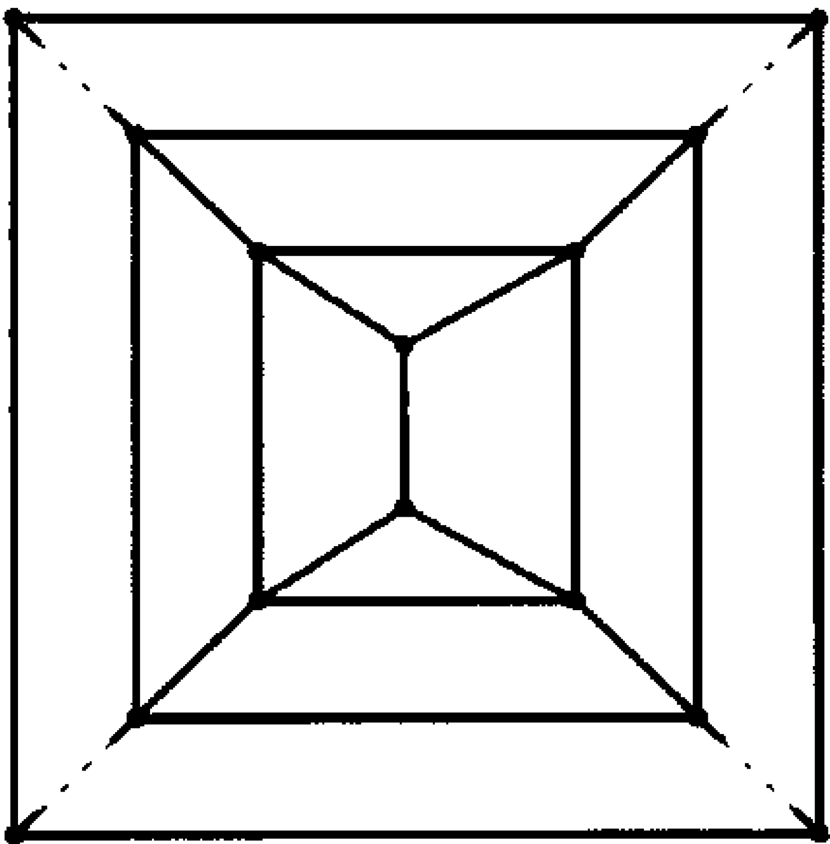
若一个标准图的平面对偶也是一个标准图, 则称它为*双标准的*. 若一个图本身与它的平面对偶同构, 则称之为*自对偶的*. 由对偶性可知任何自对偶的标准图皆双标准的. 容易看出, 如图 9.5.1 所示的 4 种图, 分别记为 $C_{4,t}(t\geqslant 2)$, $W_{4,t}(t\geqslant 1)$, $R_t(t\geqslant 1)$ 和 $T_t(t\geqslant 2)$, 全是双标准的, 其中 t 为图中平行 4 圈的数目, 进而也容易看出, 它们中的 $W_{4,t}(t\geqslant 1)$ 皆为自对偶的.



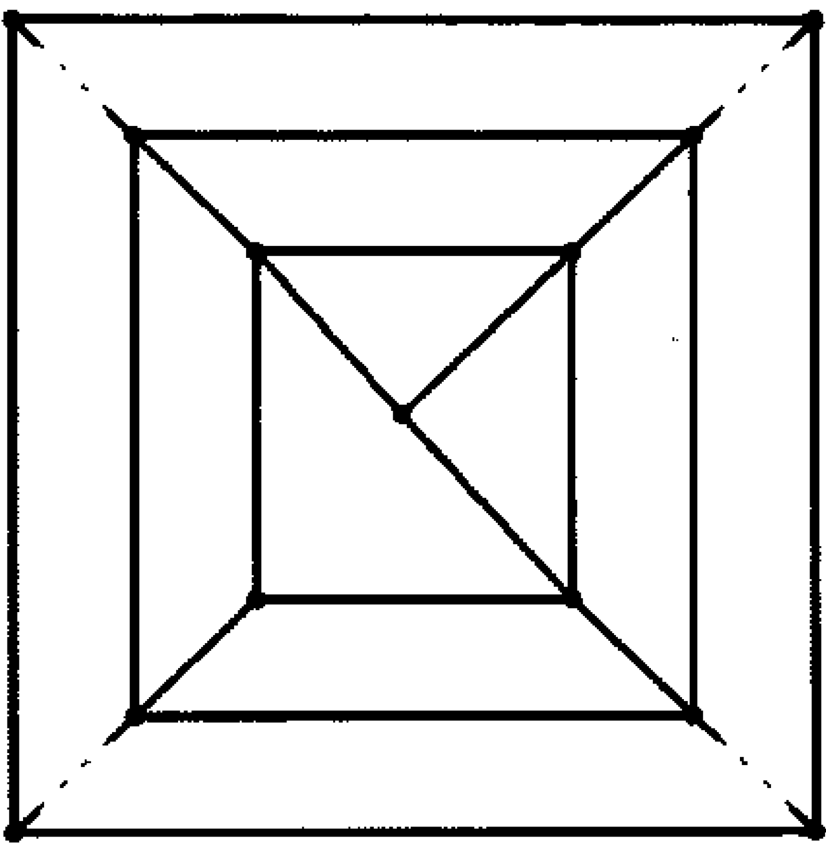
(a) $C_{4,t}(t\geqslant 2)$



(b) $W_{4,t}(t\geqslant 1)$



(c) $R_t(t\geqslant 1)$



(d) $T_t(t\geqslant 2)$

图 9.5.1

引理 9.5.3 任何自对偶双标准图 $G=(V,E)$ 恰有 4 个三次的节点和恰有 4 个三次的面.

证 由自对偶性有

$$\nu_3=\phi_3,\quad \nu_4=\phi_4.$$

这就导致 $\nu=\nu_3+\nu_4=\phi_3+\phi_4$, 其中 $\nu_3(\phi_3)$ 和 $\nu_4(\phi_4)$ 分别为 3 次和 4 次的节点 (面) 的数目. 由平面上多面形的 Euler 公式有

$$2(2\nu_3+2\nu_4)-(3\nu_3+4\nu_4)=4,$$

从而 $\nu_3=4$. 对偶地, $\phi_3=4$, 即得引理结论. ♮

标准图的一个面, 若它与至少 4 个 3 节点关联, 则称它为 (标准地) *许可的*; 否则, 称为 (标准地) *非许可的*.

引理 9.5.4　若一个自对偶的标准图 $G=(V,E)$ 有一个 4 次的面是许可的, 则存在一个整数 t, 使得 $G\cong W_{4,t}$.

证　令面 f_a 是许可的. 由许可性, f_a 边界上 4 个节点全是 3 节点. 由引理 9.5.3, 所有不在 f_a 边界上的节点全是 4 节点. 由自对偶性 τ, G 必有一个 4 节点 $\tau(f_a)$ 与 4 个三角形面关联.

设 $\tau(f_a)$ 的 4 个相邻的节点就是 f_a 边界上的 4 个节点. 这时, 即为 $W_{4,t}(t=1)$. 自然, 它是自对偶的. 否则, 同样由引理 9.5.3 可知, 除 $\tau(f_a)$ 的 4 个关联三角形外, 所有其他的面皆为四边形. 这就导致 G 只能是 $W_{4,t}(t=2,3,\cdots)$, 即 $G\cong W_{4,t}(t\geqslant 1)$. 定理得证. ♮

引理 9.5.5　一个自对偶的标准图 $G=(V,E)$ 是 1 可嵌入的当且仅当 G 有一个 4 次的面为许可的.

证　因为非许可的面不能为标准图的任何 1 嵌入的无限面, 必要性显然. 反之, 由引理 9.5.4 知 $G\cong W_{4,t}(t\geqslant 1)$. 然而, 容易检验, $W_{4,t}(t\geqslant 1)$, 皆为 1 可嵌入的. 事实上, 图 9.5.2(b) 提供了 $W_{4,t}(t\geqslant 1)$ 的 1 嵌入, 从而得到了充分性. ♮

定理 9.5.2　一个自对偶标准图 $G=(V,E)$ 是 1 可嵌入的当且仅当存在一个整数 $t\geqslant 1$, 使得 $G\cong W_{4,t}$.

证　这是引理 9.5.4 和引理 9.5.5 的直接结果. ♮

推论 9.5.1　一个自对偶标准图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$ 是凸 1 可扩张的当且仅当 $\mu(G)$ 的无限面为许可的.

一个 (标准的) *暗然形*, 用 Ω 表示, 就是具有如下性质的极小标准图: 所有次不小于 4 的面全是非许可的. 自然地, 一个*双标准暗然形*, 记为 B, 就是一个暗然形, 并且它是双标准图. 或者说, 它就是每一个次为 4 的面皆为非许可的极小双标准图. 当然, 由于在暗然形中没有一个面可作为它的 1 嵌入的无限面, 所有暗然形均非 1 可嵌入的.

引理 9.5.6　在每个双标准图中, 次为 3 的节点数与次为 3 的面数之和总为 8.

证　由双标准性与平面上多面形的 Euler 公式可得如下的一些方程:

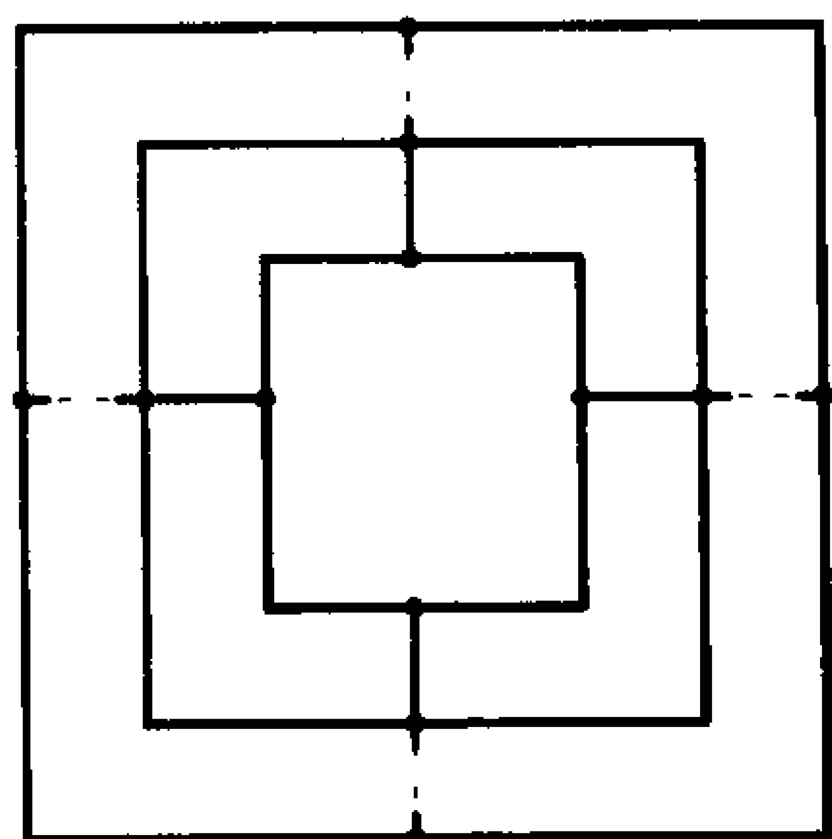
$$\nu_3+\nu_4=\nu, \tag{9.5.1}$$

$$\phi_3 + \phi_4 = \phi, \tag{9.5.2}$$

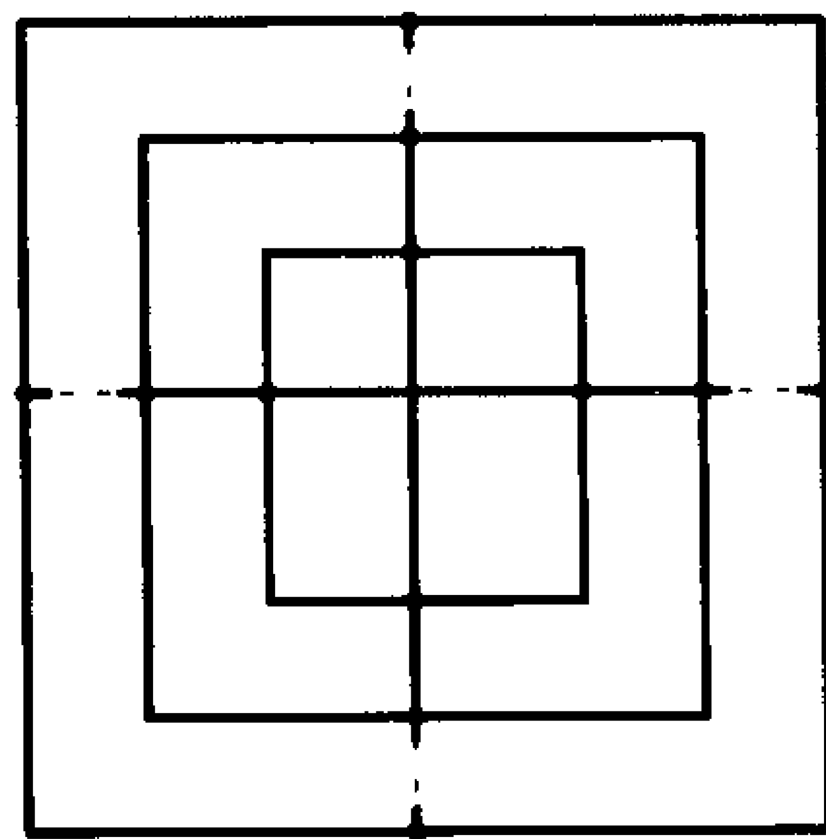
$$3\nu_3 + 4\nu_4 = 2\varepsilon, \tag{9.5.3}$$

$$3\phi_3 + 4\phi_4 = 2\varepsilon, \tag{9.5.4}$$

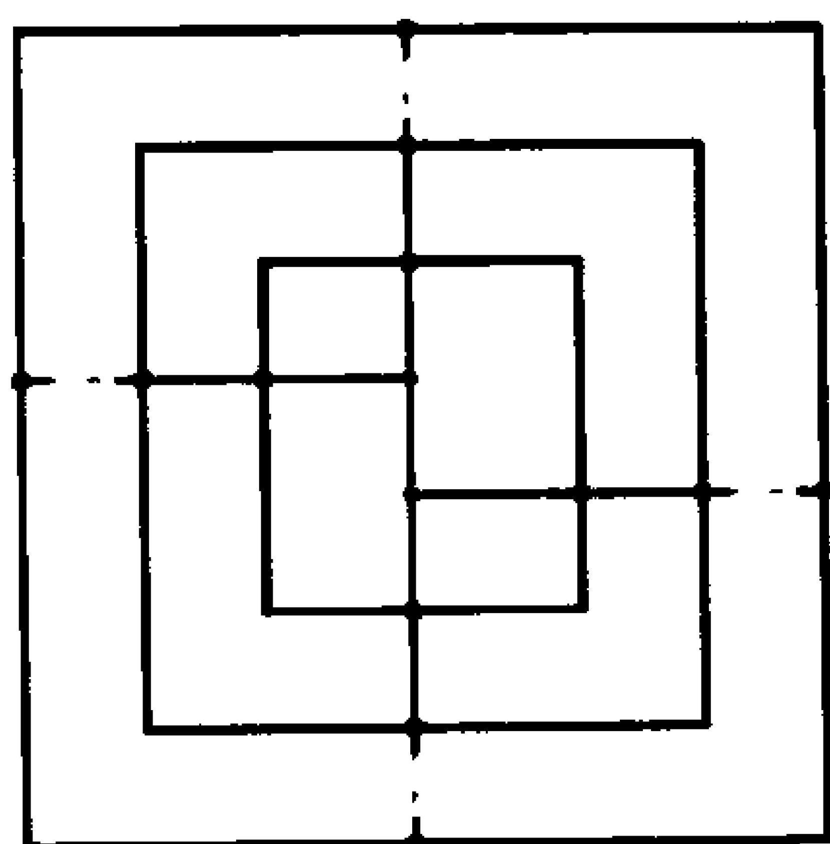
$$\nu - \varepsilon + \phi = 2. \tag{9.5.5}$$



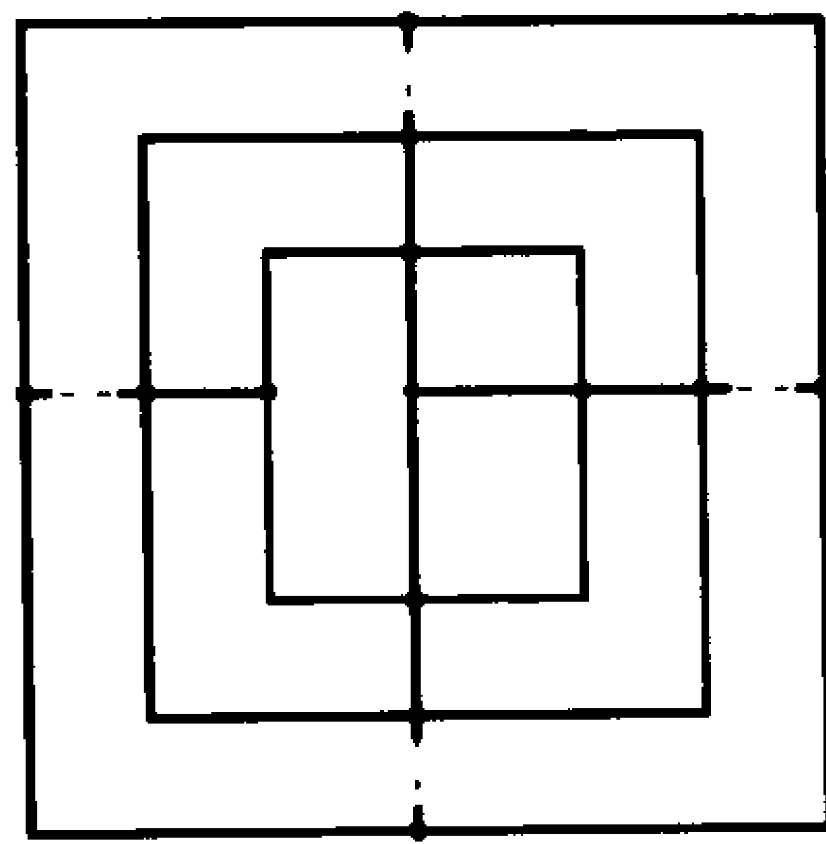
(a) $C_{4,t}(t\geqslant 2)$的1嵌入



(b) $W_{4,t}(t\geqslant 1)$的1嵌入



(c) $R_t(t\geqslant 1)$的1嵌入



(d) $T_t(t\geqslant 2)$的1嵌入

图 9.5.2

由方程 (9.5.3) 和 (9.5.5) 消去 ε 可得

$$2\phi = \nu_3 + 2\nu_4 + 4.$$

然后, 由 (9.5.2), 从 (9.5.3) 与 (9.5.4) 中消去 ε 有

$$\begin{cases} 2\phi_3 + 2\phi_4 = \nu_3 + 2\nu_4 + 4, \\ 3\phi_3 + 4\phi_4 = 3\nu_3 + 4\nu_4. \end{cases}$$

因为 ϕ_4 和 ν_4 可同时从它们中消去, 并最后得 $\nu_3 + \phi_3 = 8$. 这就得到了引理的结论. ♮

引理 9.5.7　一个双标准图 $G = (V, E)$ 是 1 可嵌入的当且仅当 G 中没有节点导出子图与一个双标准暗然形 B 同构.

证　因为任何双标准暗然形 B 均非 1 可嵌入, 必要性显然.

只证充分性. 由于 G 没有节点导出子图与 B 同构, G 必有一个四边形面 f_a 为许可的, 而且 G 不可能有构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 因为若不然, 由双标准性, 必有一个 3 圈 $C_3 = (v_1, v_2, v_3)$ 为 $\langle 4,4,4\rangle$.

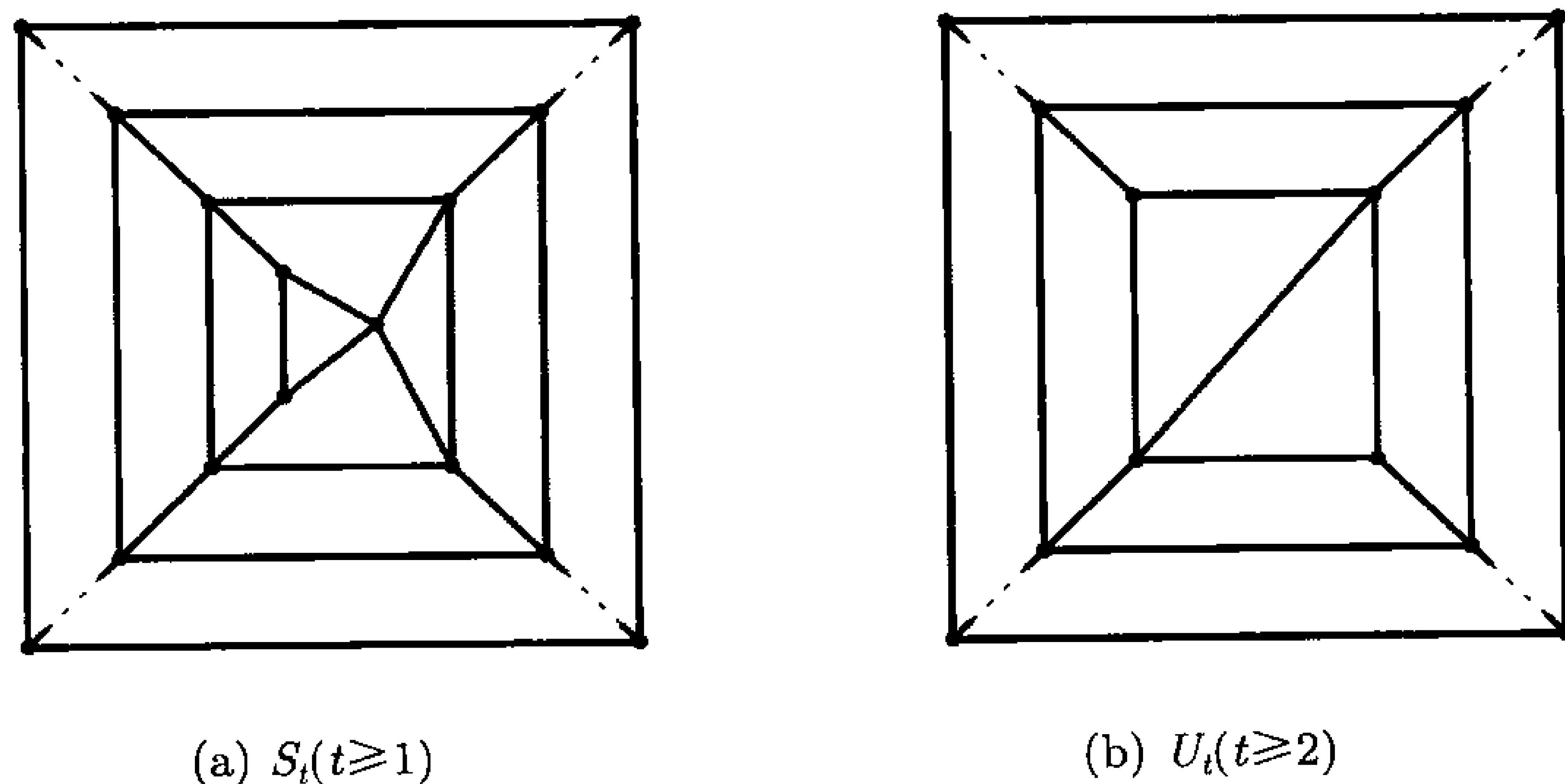
再由双标准性, 与 C_3 上三条边关联的那三个面一定要么皆为四边形, 要么皆为三角形. 若为后者, 则 Π_4 为 G 的一个节点导出子图. 然而, Π_4 为双标准暗然形. 若为前者, 同样理由, C_3 外与它关联的三面也必皆为四边形. 又可得一个双标准暗然形为 G 的节点导出子图, 均与 G 的给定条件矛盾.

考虑到只有一个有节点分离对的图是双标准的, 而且它还是暗然形, 这就使得可以由引理 9.4.12 得知, 以 f 作为无限面 G 是凸 2 可扩张的.

由凸性有凸 2 扩张可使所有内边皆至多一折. 由 f_a 的许可性, f_a 的边界可以使得每边至多一折, 从而这个扩张实际上是一个凸 1 扩张. 充分性得证. ♮

推论 9.5.2　对于无节点导出子图与某个暗然形 B 同构的双标准图 $G = (V, E)$, 它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 是 1 可扩张的当且仅当它的无限面是许可的.

引理 9.5.8　一个双标准图 G 没有节点导出子图与某个暗然形 B 同构当且仅当存在一个整数 $t \geqslant 1$, 使得 $G \cong W_{4,t}$, $C_{4,t}(t \neq 1)$, R_t, $T_t(t \neq 1)$, 如图 9.5.1 所示, 以及 $S_t, U_t(t \neq 1)$, 如图 9.5.3 所示.



(a) $S_t(t \geqslant 1)$　　　(b) $U_t(t \geqslant 2)$

图 9.5.3

证　充分性容易验证. 只证必要性. 因为 G 有一个四边形面 f_a 为许可的. 令 v_1, v_2, v_3, v_4 为 f_a 边界 C_1 上的 4 个节点. 可以假设 f_a 是无限面而不失一般性. 由双标准性, 若与 C_1 关联的 4 个面不全是四边形, 则有三种情形需要讨论.

情形 1 只有一个是三角形. 当然, 其他三个面必为四边形. 这时, 只能 $G \cong S_1$, 如图 9.5.3(a) 所示.

情形 2 有两个是三角形且它们的边界无公共节点. 当然, 其他两个面必须是四边形. 这时, 只能 $G \cong R_1$ (图 9.5.1(c)).

情形 3 有两个三角形面相邻. 由于它们的边界有公共边, 从双标准性知, 其他两个面也必须是三角形. 这就导致 $G \cong W_{4,1}$ (图 9.5.1(b)).

如果与 C_1 关联的 4 个面皆为四边形. 一般地, 设 $C_t(t \geqslant 2)$ 为在 C_1 的内部与 C_1 平行的 4 圈, 则除了导致 $G \cong S_t$, R_t 和 $W_{4,t}(t \geqslant 2)$ 的情形外, 还有三种可能性需要讨论.

情形 4 在 C_t 的内部既无边也无节点. 自然, 只能 $G \cong C_{4,t}$ (图 9.5.1(a)).

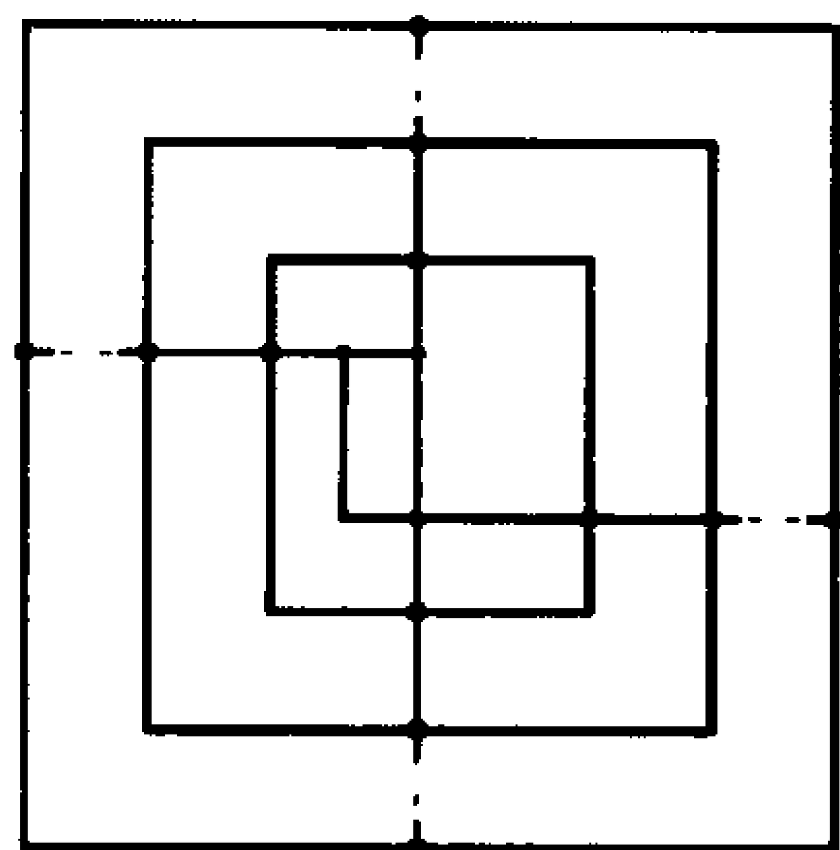
情形 5 在 C_t 内仅有一条边, 这将导致 $G \cong U_t$ (图 9.5.3(b)).

情形 6 在 C_t 的内部有节点. 事实上, 由双标准性, 只能有一个节点. 这就导致 $G \cong T_t$ (图 9.5.1(d)). 综上所述, 即得引理结论. ♮

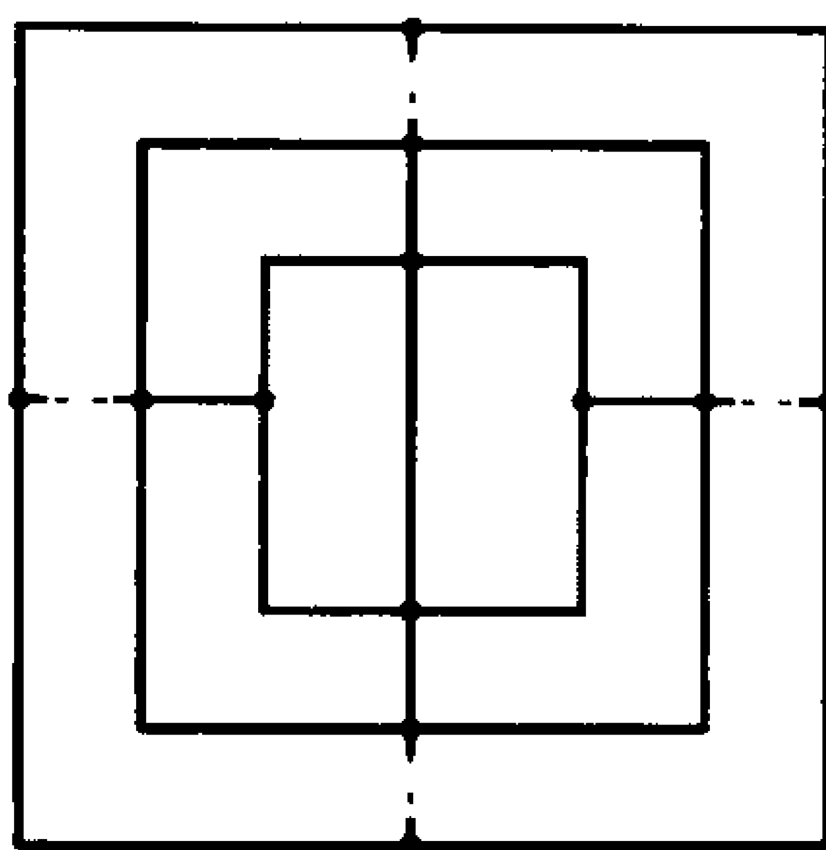
定理 9.5.3 一个双标准图 $G = (V, E)$ 是 1 可嵌入的当且仅当存在一个整数 $t \geqslant 1$, 使得 $G \cong W_{4,t}, R_t, S_t, C_{4,t}(t \neq 1), T_t(t \neq 1)$ 或者 $U_t(t \neq 1)$.

证 这是引理 9.5.7 和引理 9.5.8 的直接结果. ♮

事实上, 所有 $C_{4,t}(t \geqslant 2)$, $W_{4,t}(t \geqslant 1)$, $R_t(t \geqslant 1)$, $T_t(t \geqslant 2)$, 如图 9.5.2(a)~ 图 9.5.2(d) 所示, S_t $(t \geqslant 1)$, $U_t(t \geqslant 2)$, 如图 9.5.4(a) 和图 9.5.4(b) 所示的 1 嵌入皆为凸的.



(a) $S_t(t \geqslant 1)$的1嵌入



(b) $U_t(t \geqslant 2)$的1嵌入

图 9.5.4

推论 9.5.3 一个双标准图 G 是凸 1 可嵌入的当且仅当 G 是 1 可嵌入的.

证 由推论 9.5.1 和定理 9.5.3 可直接导出推论的结论. ♮

定理 9.5.4 一个 3 连通图 $G = (V, E)$ 是凸 1 可嵌入的当且仅当它是 1 可嵌入的.

证 必要性是自然的. 只证充分性. 根据 G 的 3 连通性, 由定理 4.4.2 知其

平面嵌入 $\mu(G)$ 是唯一的. 由 1 可嵌入性和许可性, 其 1 扩张的无限面不可能为 (4,4,4), 而且在 $\mu(G)$ 中没有构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 这样由定理 9.4.2 以及用与 9.4 节中类似的方式讨论, 可得其凸 2 扩张实际上是凸 1 扩张, 从而, 充分性得证. ♮

尽管更一般的暗然性, 还可继续作进一步的研究. 由于其想法与网格可嵌入性, 或者说, 0 可嵌入性密切相关. 关于更一般图的 1 可嵌入性的表征只好留在下一章讨论.

9.6 非平面扩张

对于 9.1 节讨论的三种曲面模型, 应该分别讨论图的纵横嵌入. 为减少篇幅, 在联树的基础上仅以曲面模型 2 为例.

主要思路就是将曲面纵横嵌入的问题转化为带度量边界的平面纵横嵌入问题.

定理 9.6.1 所有三正则 (3 图) 对于曲面模型 2 都是 2 可扩张的.

证 可以看出, 三正则图 (不必是平面的) 的一个联树本身就是某个三正则图的平面嵌入, 使得一个面边界长为偶数.

由定理 9.5.1 和定理 9.5.4, 联树是 1 可扩张的. 根据引理 9.3.1, 这个 1 扩张可以使得边界上的节点都是直的. 考虑到边界的任意性, 这个 1 扩张边界可取曲面模型 2 中的大矩形.

然而, 边界上的节点未必都可取为标尺上每一单位区段的中点. 由于与边界关联的 1 折边无关紧要, 为使每端都在中点上, 只需将在必要时, 在关联直边上引进二折, 从而可得定理结论. ♮

在定理 9.6.1 的结论中, 2 不能改进到 1, 如图 9.6.1(a) 所示.

定理 9.6.2 一个四正则图 (或 4 图) 的所有嵌入在曲面模型 2 上都是 2 可扩张的.

证 一个四正则图的联树也是边界 3 正则的. 由于在边界上节点的次皆为 3 的无构型 $\langle 4,4,4\rangle$, 从引理 9.4.12 可知有 2 扩张.

通过考察所用边界的任意性, 可以将这个 2 扩张的边界取为曲面模型 2 中的矩形.

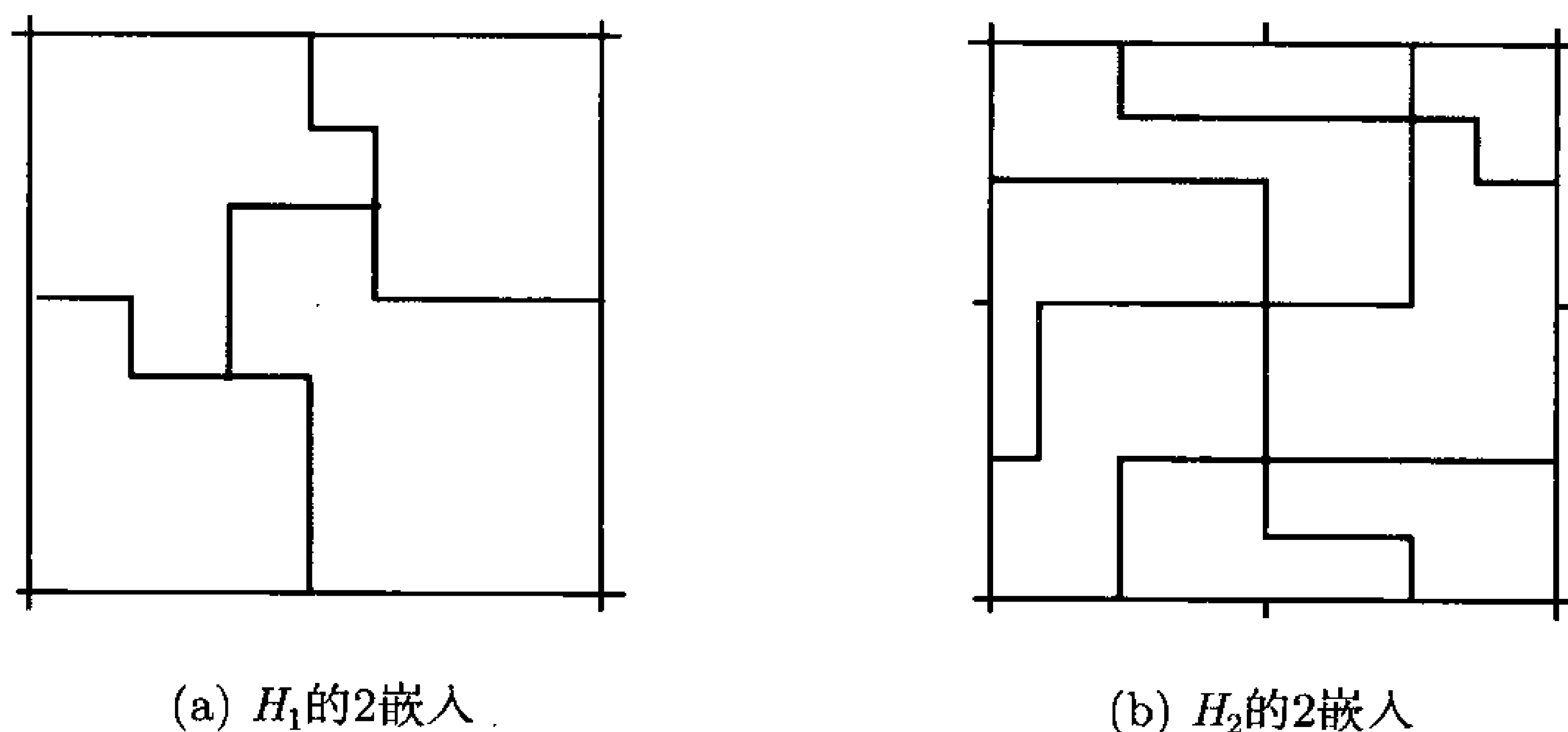
虽然边界上的节点, 未必都可取为标尺上每一单位区段的中点. 由于与边界关联的非直边无关紧要, 为使每端都在中点上, 只需必要时在关联直边上引进之型结构, 使得成为二折边.

因此, 这个扩张仍然是一个 2 嵌入. 定理得证. ♮

在定理 9.6.2 的结论中, 2 不能改进到 1, 如图 9.6.1(b) 所示.

在图 9.6.1 中, 实际上, 根据联树的原理, H_1 可以是两个节点 3 正则连通图中的任何一个. 例如, 3 束, 即由两个节点和三条杆 (一个三重边) 组成等. H_2 可以是

三个节点 4 正则连通图中的任何一个. 例如, 一个三角形, 但每一条边都是一个二重的, 或将它的一个二重边改为两端各一个自环, 或不要重边, 而在三个节点出各添一个自环等.



(a) H_1的2嵌入　　(b) H_2的2嵌入

图 9.6.1

9.7 注　　记

(1) 本章得到的所有对于给定平面嵌入的无限面的, 或对于一般的节点次不超过 4 的图的 k 可嵌入性与 k 可实现性的识别, 均可用来设计从计算复杂性角度的线性时间算法, 而且也可以用来在已知 k 可嵌入的条件下, 设计线性时间算法, 求出一个 k 嵌入 ($k \geqslant 1$), 不会遇到大的困难. 多数结果在文献 (Liu, Y.P.-A. Morgana-B. Simeone[1, 2], Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi-B. Simeone[1,2]) 中第一次出现. 然而, 关于纵横凸性的所有结果全是新的, 而且一些已有的结论和证明均被改进与简化. 当然, 也可以从第 8 章所提供的确向术的思路设计算法.

(2) 这里所讨论的问题看上去可应用到超大规模集成电路设计、建筑上砌地板、编织图案以及算法框图的美观布局等方面, 可参见文献 (Basden, A.-K.G. Nichols[1], Batini, C.-M. Talamo-R. Tamassia[1], Chen, R.W.-Y. Kajitani-S.P. Chan[1], Du, D.-Y. Zhang[1], Hu, T.C.-S. E. Kuh[1], Owens, A.B.[1], Rosenstiehl, P.-R. Tarjan[1], Sarrafzadeh, M.-D.T. Lee[1], Storer, J.A.[1], Tamassia, R.[1]) 等. 然而, 这里所关心的只是理论上的处理. 事实上, 几乎是只考虑 3 正则图就够了. 也许有人会想到, 任意节点次至多为 $2l$ 的图在 $l(l \geqslant 3)$ 维空间中的 k 可嵌入性的问题. 虽然目前尚未见到引人注目的结果, 但可以想象一些类似的结果不难得到.

(3) 还可以提出将一个图嵌入到平面上的砌合中的问题. 例如, 三角形砌合、六角形砌合等.

(4) 假若节点在平面的格子点上的位置已经确定, 判定是否存在或求出一个 1 嵌入, 使得每一边都恰用一折的问题, 可以转化为确定一个二次布尔方程是否

有解, 以及求出一个解的问题, 参见文献 (Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi-B. Simeone[2], Liu, Y.P.[28]). 事实上, 恰有一折的限制是不必要的. 当然, 也许为其他问题提供了一种解决途径 (Hammer, P.L.-Y.P. Liu[1, 2], Hammer, P.L.-Y.P. Liu-B. Simeone[1~3]).

(5) 近来, 已经出现了一些算法. 关于求 3 正则可平面图的 1 嵌入的线性时间算法, 可参见文献 (Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi[1]). 对于一般标准图, 求它们的 3 嵌入和 2 嵌入也已经得到了线性算法 (Cui, X.F.-Y.P. Liu[1], Liu, Y.P.-A. Morgana-B. Simeone[3]).

(6) 三个曲面模型都有标准型的形式. 对于这些形式下 k 扩张的研究, 要比前面提到的结果复杂, 其准确形式有待进一步研究.

(7) 进一步的最优化问题将在第 15 章中讨论.

第10章 网格可嵌入性

10.1 许 可 性

与前面一样, 仍先研究 3 连通的可平面标准图. 对于这种图的一平面嵌入 $\mu(G)$, 若它的一个面 f 的边界有一个 k 嵌入 $\mu_k(f)$, 使得 $\forall v \in V(f)$,

$$\mathrm{St}(v;f) = \begin{cases} 2, & \rho(v,G) = 4, \\ 1 \text{ 或 } 2, & \rho(v;G) = 3, \end{cases} \tag{10.1.1}$$

则称它为 *k许可的*; 否则, 称为 *k非许可的*, $k \geqslant 0$. 对于一个圈 C, 它可以是 $\mu(G)$ 的一个面的边界, 用 $\rho_{\text{in}}(v;\mu C)$ ($\rho_{\text{out}}(v;\mu C)$) 表示在 C 的内 (外) 部区域 $C_{\text{in}}(C_{\text{out}})$ 中与 v 关联的边数, 则可以将许可性推广到对于 C. 若 C 有一个 k 嵌入 $\mu_k(C)$, 使得 $\forall v \in V(C)$,

$$\rho_{\text{in}}(v;\mu C) \leqslant \mathrm{St}(v;C) \leqslant 2 - \rho_{\text{out}}(v;\mu C), \tag{10.1.2}$$

则称 C 是 *k许可的*; 否则, 称为 *k非许可的*. 由这个定义即可得出, 一个面 f 是 k 许可的就是指当将 f 视为无限面时, 它的边界圈是 k 许可的.

引理 10.1.1 对于 3 连通标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$, 一个面 f 是 1 许可的当且仅当

$$\nu_4(f;\mu C) \leqslant \nu(f) - 4, \tag{10.1.3}$$

其中 $\nu(f)$ 和 $\nu_4(f)$ 分别为 f 的边界上节点的数目和次为 4 的节点的数目.

证 由于任何纵横多边形含有偶数条直线段, 一个 $2l$ 边形的内角之和为 $2(l-1)\pi$, 则任何纵横 $2l$ 边形有 $l-2$ 个内节点和 $l+2$ 个外节点, 而且每个纵横多边形都有 4 条直线段, 使得每条的两端皆为外节点. 由标准性, 只有 3 节点允许在一个 1 嵌入的无限面边界上为直的, 从而至少要有一个 3 节点在这 4 条中任何一条直线段上. 这就得到了 (10.1.3) 式, 即必要性成立.

反之, 由 (10.1.3) 式总可以求得 f 的面边界圈的一个 1 嵌入, 使得所有 4 节点均为它的内节点, 而其他的, 即 3 节点中, 至少有 4 个为它的直节点. 这就得到了充分性. ♮

令 C 为标准图 $G=(V,E)$ 平面嵌入 $\mu(G)$ 中的一个圈, 在 C 上的一个 4 节点 v, 若满足

$$\rho_{\text{in}}(v;\mu C) = 2, \quad \rho_{\text{in}}(v;\mu C) = \rho_{\text{out}}(v;\mu C) = 1, \quad \rho_{\text{out}}(v;\mu C) = 2,$$

则分别称 v 为确内节点、确直节点、确外节点. 因为在这时, v 在 C 上总是要分别处于内、直、外状态. 记 $\nu_{\text{in}}(C,\mu G)$, $\nu_{\text{out}}(C,\mu G)$, $\nu_{\text{st}}(C,\mu G)$ 分别为 $\mu(G)$ 中 C 上的确内节点、确外节点和确直节点的数目.

引理 10.1.2　在 3 连通标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中, 一个非面边界的圈 C 是 1 非许可的当且仅当

$$\begin{cases} \nu_{\text{out}}(C;\mu G)=0, \\ \nu_{\text{st}}(C;\mu G)=3, \\ \nu_{\text{in}}(C;\mu G)=\nu(C)-3. \end{cases} \tag{10.1.4}$$

证　设 C 为 $\mu(G)$ 中的一个 1 非许可的圈. 由 3 连通性, 在

$$V_{\text{op}}(C)=\{v|\forall v\in V(C),\ \rho_{\text{out}}(v;\mu C)>0\}$$

中至少有三个节点, 并且有如下的事实:

事实 1　$|V_{\text{op}}(C)|=3$; 否则, 若 $|V_{\text{op}}(C)|>3$, 则在 C 的 1 嵌入中至少有 4 个节点可以处直的或外的状态. 由引理 10.1.1, C 是 1 许可的, 与 C 的给定条件矛盾.

事实 2　$\nexists v\in V_{\text{op}}(C)$; $\rho_{\text{in}}(v;\mu C)=0$; 否则, 若 v_1 满足 $\rho_{\text{in}}(v_1;\mu C)=0$. 令 v_1,v_2,v_3 为 $V_{\text{op}}(C)$ 中的那三个节点 (事实 1), 并且它们的这个次序与在圈 C 上出现的一致. 这样, 只要讨论如下三种可能情形就够了:

情形 A　$v_1Iv_2v_3$;
情形 B　$v_1Iv_2Iv_3$;
情形 C　$v_1Iv_2Iv_3I$,

其中 I 表示一个确内节点. 然而, 所有这些情形均导致 C 为 1 许可的, 如图 10.1.1 所示.

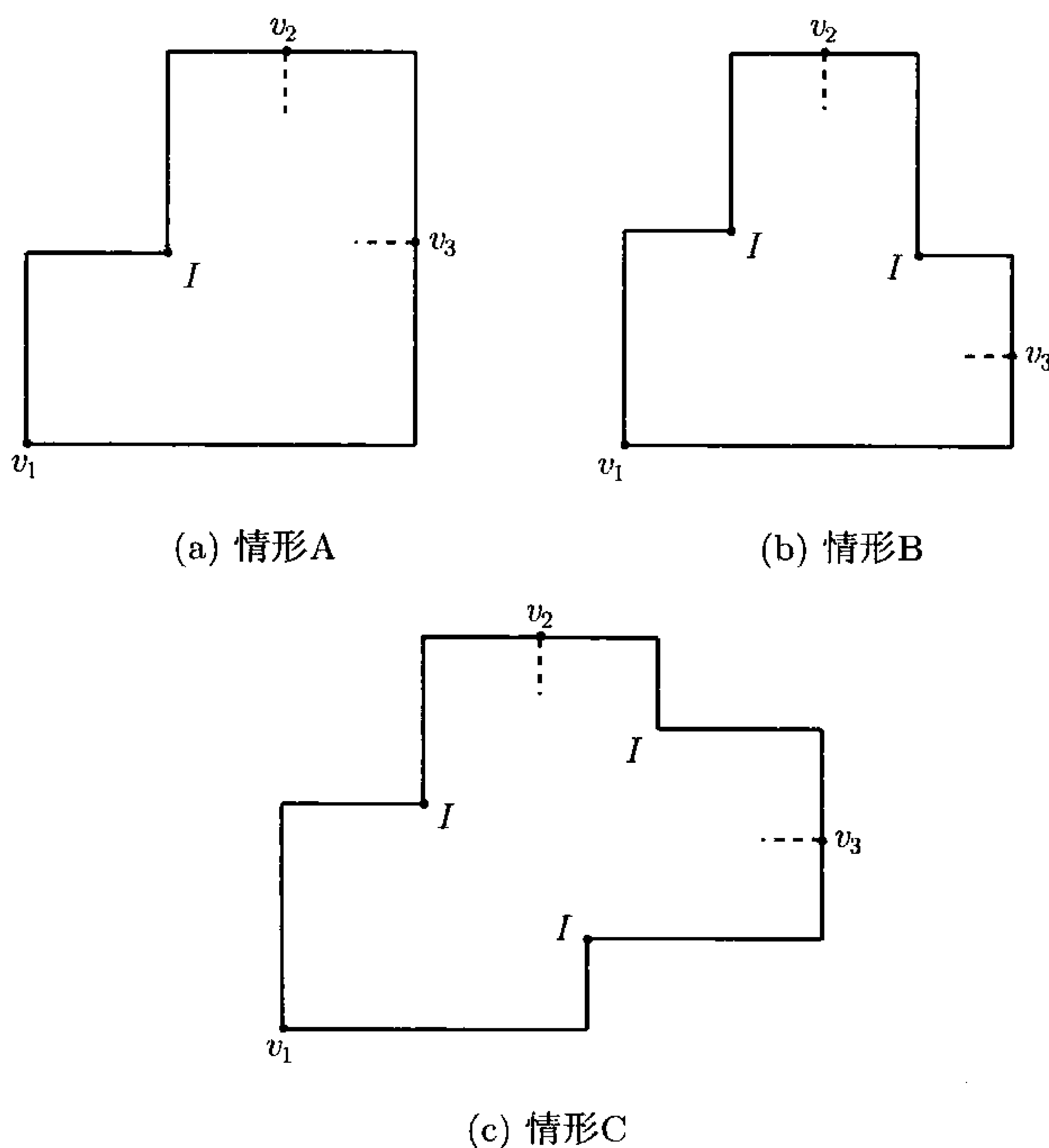
事实 3　所有 C 上的节点在 G 中皆为 4 节点; 否则, 若在 C 上有一个节点的次不是 4, 则由引理 10.1.1, 必导致 C 是 1 许可的.

由事实 1～ 事实 3, 即得 C 满足 (10.1.4) 式. 必要性得证.

反之, 若将 C 视为 $\mu(G_{\text{in}})=\mu(C)\cup\mu(C_{\text{in}}\cap G)$ 的无限面边界. 由于这时, (10.1.4) 式导致 (10.1.3) 式不成立. 从引理 10.1.1 即得充分性.

定理 10.1.1　一个 3 连通标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 是 1 可扩张的当且仅当它没有一个非面边界的圈是 1 非许可的, 而且无限面是 1 许可的.

证　从引理 10.1.2 证明中的事实 1～ 事实 3 可见, (10.1.4) 式提供了一个构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 由第 9 章所讨论的可知, 若有一个非面边界的圈是 1 非许可的, 则 $\mu(G)$ 不可能是 1 可扩张的. 当然, 无限面若不是 1 许可的, 也不能得到 $\mu(G)$ 的一个 1 扩张, 从而必要性成立.



(a) 情形A (b) 情形B

(c) 情形C

图 10.1.1

反之, 由 $\mu(G)$ 的无限面 f_0 的 1 许可性, 从引理 10.1.1 可知 f_0 满足 (10.1.3) 式. 因此, 不可是三角形 (4,4,4), 进而由于没有构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 从定理 8.3.2 可知 $\mu(G)$ 是凸 2 可扩张的. 因为 f_0 是 1 许可的, 则这个扩张实际上是一个凸 1 扩张, 故 $\mu(G)$ 是 1 可扩张的. ♮

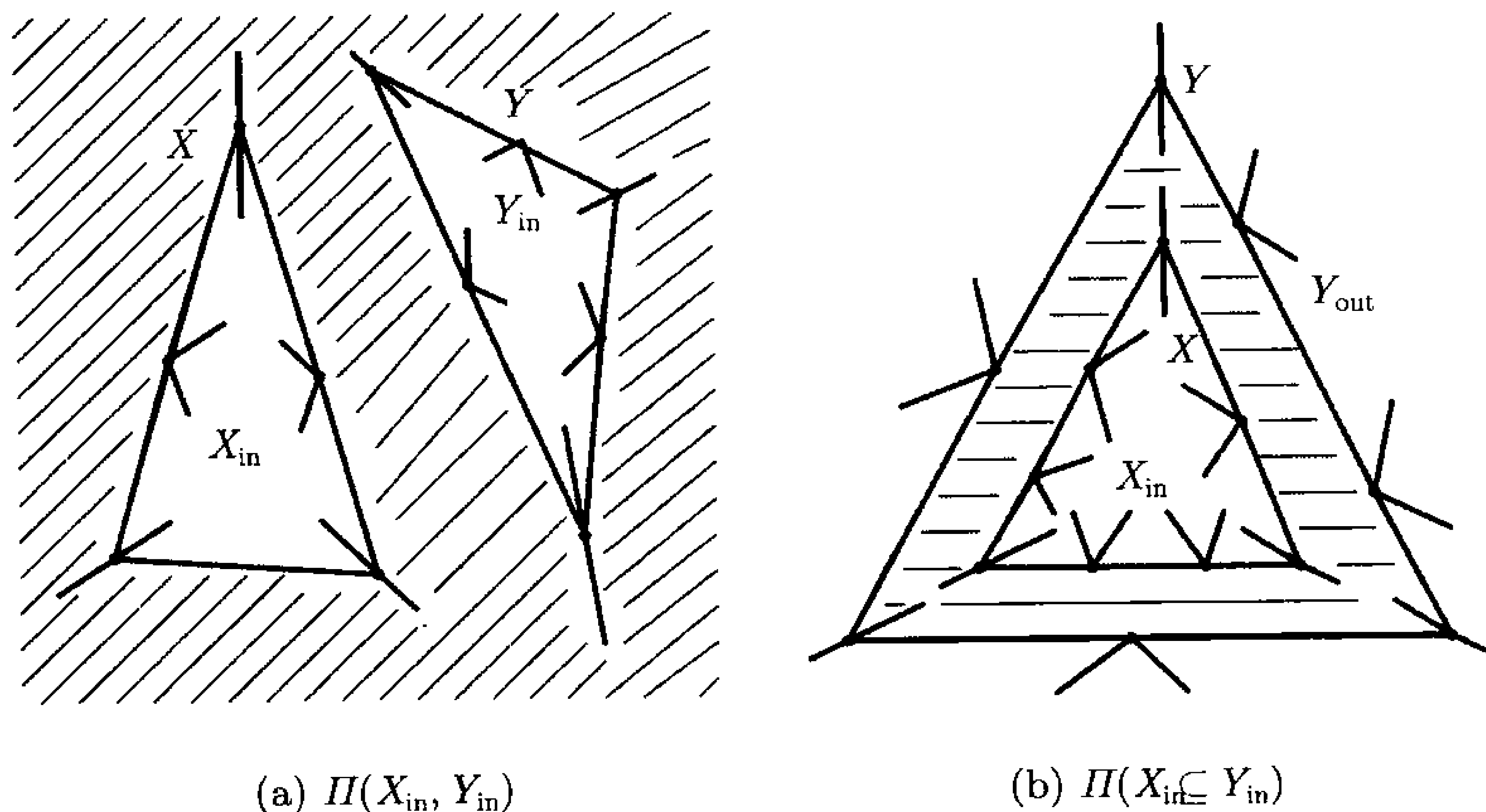
下面看一下对于 1 可嵌入性的禁用构形的完备集是什么样的. 首先, 如前所讨论的, 任何暗然形皆这里的禁用构形. 由引理 10.1.1, 一个暗然形, 也用 Ω 表示, 实际上是这样的一个极小子图 (当然是标准的), 使得它的每个面的边界上至多有三个次为 3 的节点.

因为任何三角形面, 自然均至多有三个 3 节点, 所有无分离三角形的极大标准可平面图, 对于 1 可嵌入性皆为暗然形. 事实上, 只有三个这样的图, 即 Π_4, Π_8, Π_{4+v}. 后者就是在 Π_4 的一个面的内部区域引进一个新节点, 并与此面边界上的三节点连上这三条边所得的图, 其理由与引理 9.4.6 中用过的类似.

如果一个标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中圈 C 上的所有节点皆为 4 次的, 而且其中有三个节点 v_i $(i=1,2,3)$, 使得 $\forall v\in V(C)$,

$$\rho_{\text{out}}(v;\mu C)=\begin{cases}2, & v\neq v_i,\ i=1,2\text{ 和 }3,\\ 1, & v=v_i,\ i=1,2\text{ 或 }3,\end{cases}\tag{10.1.5}$$

则称 C 是一个外$\langle 4,4,4\rangle$圈, 并用 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{out}}$ 表示. 相应地, 构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 也称为内$\langle 4,4,4\rangle$圈, 并用 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$ 表示. 如图 10.1.2(a) 所示的 X 和 Y 皆为 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$, 图 10.1.2(b) 中的 Y 为一个 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{out}}$.



(a) $\Pi(X_{\text{in}}, Y_{\text{in}})$　　(b) $\Pi(X_{\text{in}} \subseteq Y_{\text{in}})$

图 10.1.2

事实上, 外 $\langle 4,4,4\rangle$ 圈就是对无限面内部区域中一面作无限面时的内 $\langle 4,4,4\rangle$ 圈. 将这两类圈统称为单侧$\langle 4,4,4\rangle$圈, 并简记为 S- $\langle 4,4,4\rangle$.

引理 10.1.3　令 X 和 Y 为一个标准图 $G=(V.E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中的两个 S- $\langle 4,4,4\rangle$, 则有

$$X_{\text{in}} \not\subseteq Y_{\text{in}} \Rightarrow X_{\text{in}} \subseteq Y_{\text{out}}. \tag{10.1.6}$$

证　用反证法. 设 X 和 Y 满足关系

$$X_{\text{in}} \bigcap Y_{\text{in}} \neq \varnothing, \quad X_{\text{in}} \bigcap Y_{\text{out}} \neq \varnothing.$$

由对称性, 不妨假设 X 为一个 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$. 因为在 X 上, 除 $v_i (i=1,2,3)$ 外, 每个节点都有两条边在 X_{in} 中. 考虑到 Y 在 X_{in} 和 X_{out} 中都有边, 由 Jordan 曲线定理, X 和 Y 只能恰有 v_i $(i=1,2,3)$ 中的两个节点公共. 这就与 G 的 3 连通性矛盾.

如果 X 是$\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$, Y 为 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{out}}$, 使得 $X_{\text{in}} \subseteq Y_{\text{in}}$, 则称它们为一个 $\langle 4,4,4\rangle$ 环, 如图 10.1.2(b) 所示, 并用 $\Pi(X_{\text{in}} \subseteq Y_{\text{in}})$ 表示. 如果 X 和 Y 皆为 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$, 并使得$X_{\text{in}} \cap Y_{\text{in}} = \varnothing$, 则称它们为 $\langle 4,4,4\rangle$眼, 如图 10.1.2(a) 所示, 并用 $\Pi(X_{\text{in}}, Y_{\text{in}})$ 表示. 进而, 对于一个 $\Pi(X_{\text{in}} \subseteq Y_{\text{in}})$, 若在 $Y_{\text{in}} - X_{\text{in}}$ 中不再有 $\langle 4,4,4\rangle$ 环, 或者对于 $\Pi(X_{\text{in}}, Y_{\text{in}})$, 若在 $X_{\text{in}} \cup Y_{\text{in}}$ 中不再有$\langle 4,4,4\rangle$ 眼, 则这时的 $\Pi(X_{\text{in}} \subseteq Y_{\text{in}})$ 和

$\Pi(X_{\text{in}}, Y_{\text{in}})$, 简单地用 Π 表示.

引理 10.1.4 在一个 3 连通的标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中, 对于 G 的 1 可嵌入性, Π 是禁用构形.

证 设 $\Pi=\Pi(X_{\text{in}}\subset Y_{\text{in}})$. 因为 X 是 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$, 由引理 10.1.1 知 X 对于 $X_{\text{in}}(G)=(X\cup X_{\text{in}})\cap\mu(G)$ 是 1 非许可的, 从而 $\mu(G)$ 对于 X_{out} 内的任何面作为无限面均不是 1 可扩张的. 另一方面, 因为 Y 是 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{out}}$, 由引理 10.1.1 知, Y 对于 $Y_{\text{out}}(G)=(Y\cup Y_{\text{out}})\cap\mu(G)$ 是 1 非许可的, 从而 Y 对于 Y_{in} 中的任何面作为无限面均非 1 可扩张. 由定理 5.3.3, 即 $\mu(G)$ 的唯一性, G 不是 1 可嵌入的.

若 $\Pi=\Pi(X_{\text{in}}, Y_{\text{in}})$, 类似地, 也可得 $\mu(G)$ 对任何面作为无限面均不是 1 可扩张的. 因此, G 不是 1 可嵌入的.

综上所述, Π 为 G 对于 1 可嵌入的禁用构形, 从而引理得证. ◽

定理 10.1.2 一个 3 连通的标准可平面图 $G=(V,E)$ 是 1 可嵌入的当且仅当 G 既无 Ω 作为一个节点导出子图也无构形 Π.

证 由引理 10.1.1 和引理 10.1.4 即可得必要性.

反之, 若 $\mu(G)$ 的所有面皆为 1 非许可的, 则若 G 本身不是 Ω, 就存在一个节点导出真子图为 Ω, 与给定的条件矛盾.

假设 f 是 $\mu(G)$ 的一个面且它是 1 许可的. 若对于 $f, \mu(G)$ 没有圈 X 为 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$, 则由定理 10.1.1 知 $\mu(G)$ 对于 f 作为无限面是 1 可扩张的. 因为 $\mu(G)$ 没有 $\Pi(X_{\text{in}}, Y_{\text{in}})$, 由引理 10.1.3, 可以假设 X 是这样的 $\langle 4.4.4\rangle_{\text{in}}$, 使得在 X_{out} 中没有 $\langle 4,4,4\rangle_{\text{in}}$. 因此, 所有包括 f 在内的在 X_{out} 中的面皆不能作为某 1 嵌入的无限面.

再看 X_{in} 中的面. 如果它们皆为 1 非许可的, 则在 $X_{\text{in}}(G)$ 中必有 Ω 作为节点导出子图, 与给定条件矛盾.

设 f_1 为 X_{in} 中的一个面且为 1 许可的. 由于 G 没有 $\Pi(X_{\text{in}}\subseteq Y_{\text{in}})$, 由引理 10.1.3, 与对 f 的讨论类似地, 可以假设 X_1 为 X_{in} 中的一个对于 f_1 作为无限面时的 $\langle 4.4.4\rangle_{\text{in}}$, 使得在 $X_{1\text{in}}$ 中没有 $\langle 4.4.4.\rangle_{\text{in}}$, 则所有 $X_{1\text{in}}$ 中的面, 包括 f_1 在内, 均不能为 G 的某个 1 嵌入的无限面.

若所有 $X_{\text{in}}\cap X_{1\text{out}}$ 中的面皆为 1 非许可的, 则必出现 Ω, 故设 f_2 为 $X_{\text{in}}\cap X_{1\text{out}}$ 中的一个面且是 1 许可的. 当然, 若对 f_2 作无限面 $\mu(G)$ 无 $\langle 4.4.4\rangle_{\text{in}}$, 则由定理 10.1.1 可知 $\mu(G)$ 是 1 可扩张的; 否则, 继续上述过程, 由面的数目的有限性, 根据既无 Ω, 又无 Π, 必最终得到一个面, 使得以它为无限面, G 是 1 可扩张的.

因此, G 是 1 可嵌入的. 这就得到了充分性. ◽

推论 10.1.1 任何 4 正则可平面图 $G=(V,E)$, 或者更一般地, 任何至多有三个 3 节点的标准图均为非 1 可嵌入的.

证　因为所有面皆为 1 非许可的, G 必含有 Ω 作为节点导出子图. 由定理 10.1.2 即得推论结论. ♮

然而, 若一个标准可平面图只有 4 个 3 节点, 则它就可能有 1 嵌入了. 事实上, $W_{4,t}(t \geqslant 1)$ 就是这样一类图. 它们的 1 嵌入, 如图 9.4.2(b) 所示.

为了讨论一般可平面图的 1 可嵌入性, 当然节点的次不超过 4, 可以先推广定理 10.1.1 到不限于 3 连通的一般情形, 再根据 5.4 节中所描述的理论, 考虑所有可能的平面嵌入. 用与第 9 章类似的方法引申到 1 可嵌入性.

10.2　隅　序　列

关于图的 0 可嵌入性, 或者说**网格可嵌入性**, 因为任何标准可平面图皆为非 0 可嵌入的, 这一点在下面的讨论中将会看到, 这里所讨论的图总是允许有 2 节点. 当然, 0 可嵌入的图总可以从一个 k 可嵌入的图 $(k \geqslant 1)$ 经过将边加以细分而得到. 一个存在 0 嵌入的图也称为**网格的**.

首先, 研究一个圈的 0 嵌入. 可以看出, 任何三角形, 即长为 3 的圈, 绝无 0 嵌入. 因为在**格图**, 即平面上整格的表示图上的最短圈的长为 4. 因此, 这里所研究的图均指无三角形的. 当然, 仍要满足节点的次不大于 4.

令 $\mu_0^r(C)$ 是圈 C 的一个 0 嵌入, 则在 C 上的节点总可划分为三个部分: 一部分用 S 表示, 由所有那些与内角 π 关联的节点组成; 另外两部分用 I 和 O 表示, 分别由所有那些关联内角为 $3\pi/2$ 和 $\pi/2$ 的节点组成.

若不考虑状态 S 的节点, 则在 $\mu_0^r(C)$ 上依如顺时针走向, 就可得一个由 I 和 O 组成的循环序列. 这样的一个序列被称为 $\mu_0^r(C)$ 的**隅序列**.

对于一个给定的由 I 和 O 组成的循环序列 S_{eq}, 令 $n_O(S_{\text{eq}})$ 和 $n_I(S_{\text{eq}})$ 分别为 O 和 I 在 S_{eq} 中出现的次数. 若 S_{eq} 是某圈的隅序列, 则它本身也被称为**隅序列**.

引理 10.2.1　一个循环序列 S_{eq} 是隅序列当且仅当它含有偶数个字母, 即长度为偶且满足

$$n_O(S_{\text{eq}}) - n_I(S_{\text{eq}}) = 4. \tag{10.2.1}$$

证　先证必要性. 令 m 为 S_{eq} 的长度. 因为 S_{eq} 是一个隅序列, 在格图上有一个 m 边形 $(m \geqslant 4)$, 以 S_{eq} 为它的隅序列. 假设在这个 m 边形中有 k 条水平线段, 因为每个节点恰与一个水平线段关联, 每个水平线段恰与两个节点关联, 则 $m = 2k(k \geqslant 2)$. 又因为其内角和为 $2(k-1)\pi$, 并且其中有 $k-2$ 个角为 $\dfrac{3\pi}{2}$, $k+2$ 个角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

注意到 $n_O(S_{\rm eq})$ 和 $n_I(S_{\rm eq})$, 实际上分别为 $\frac{3}{2}\pi$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 角的数目, 从而有 (10.2.1) 式.

再证充分性. 对 $S_{\rm eq}$ 的长度用归纳法. 若其长为 4, 则只有一个可能, 即 $S_{\rm eq} = OOOO$. 它是一个矩形的隅序列.

设任何长度为 $2l(l \geqslant 2)$ 且满足 (10.2.1) 式的序列均为一个隅序列, 看一下长为 $2(l+1)$ 且满足 (10.2.1) 式的序列 $S_{\rm eq}$. 首先, 由 (10.2.1) 式知在 $S_{\rm eq}$ 上有 "OI" 作为一段. 若将此段去掉, 则所得的序列 $S'_{\rm eq}$ 长为 $2l$ 且仍满足 (10.2.1) 式. 由归纳法假设, $S'_{\rm eq}$ 是一个隅序列. 为方便起见, 可以设 $S_{\rm eq}$ 具有以下形式:

$$S'_{\rm eq} = X_1X_2\cdots X_{2l},$$

则 $S_{\rm eq}$ 可以看成

$$S_{\rm eq} = S'_{\rm eq}X_{2l+1}X_{2l+2},$$

其中 $X_{2l+1} = O$, $X_{2l+2} = I$.

令 $S'_{\rm eq}$ 为某圈 $C_{2l} = v_1, v_2 \cdots v_{2l}$ 的一个 0 嵌入 $\mu_0^r(C_{2l})$ 的隅序列, 使得 v_i 的状态为 $X_i(i = 1, 2, \cdots, 2l)$. 根据 X_1 和 X_{2l} 的所有 4 种可能的选择:

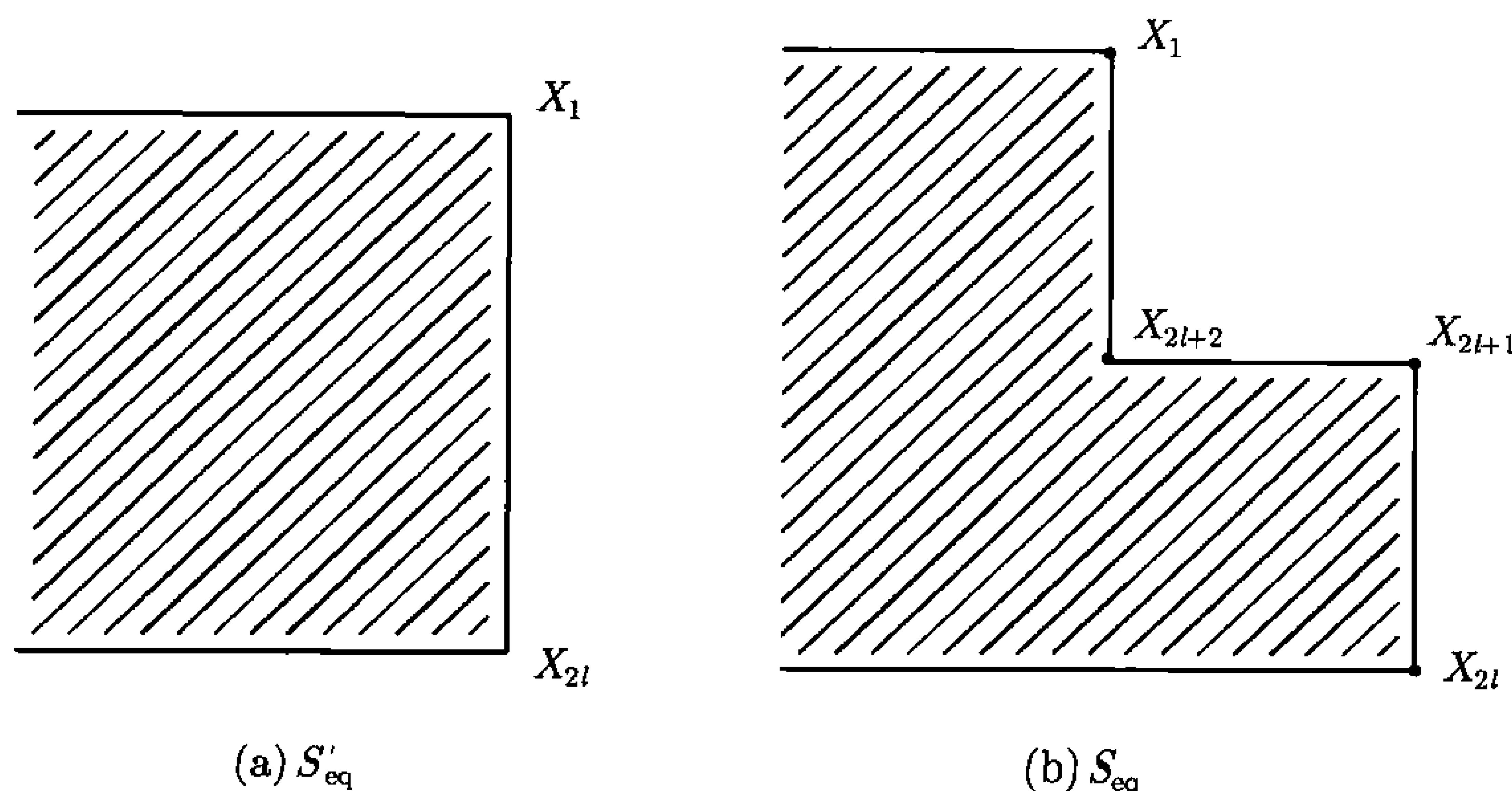
(1) $X_1 = O$ 和 $X_{2l} = O$;

(2) $X_1 = I$ 和 $X_{2l} = O$;

(3) $X_1 = O$ 和 $X_{2l} = I$;

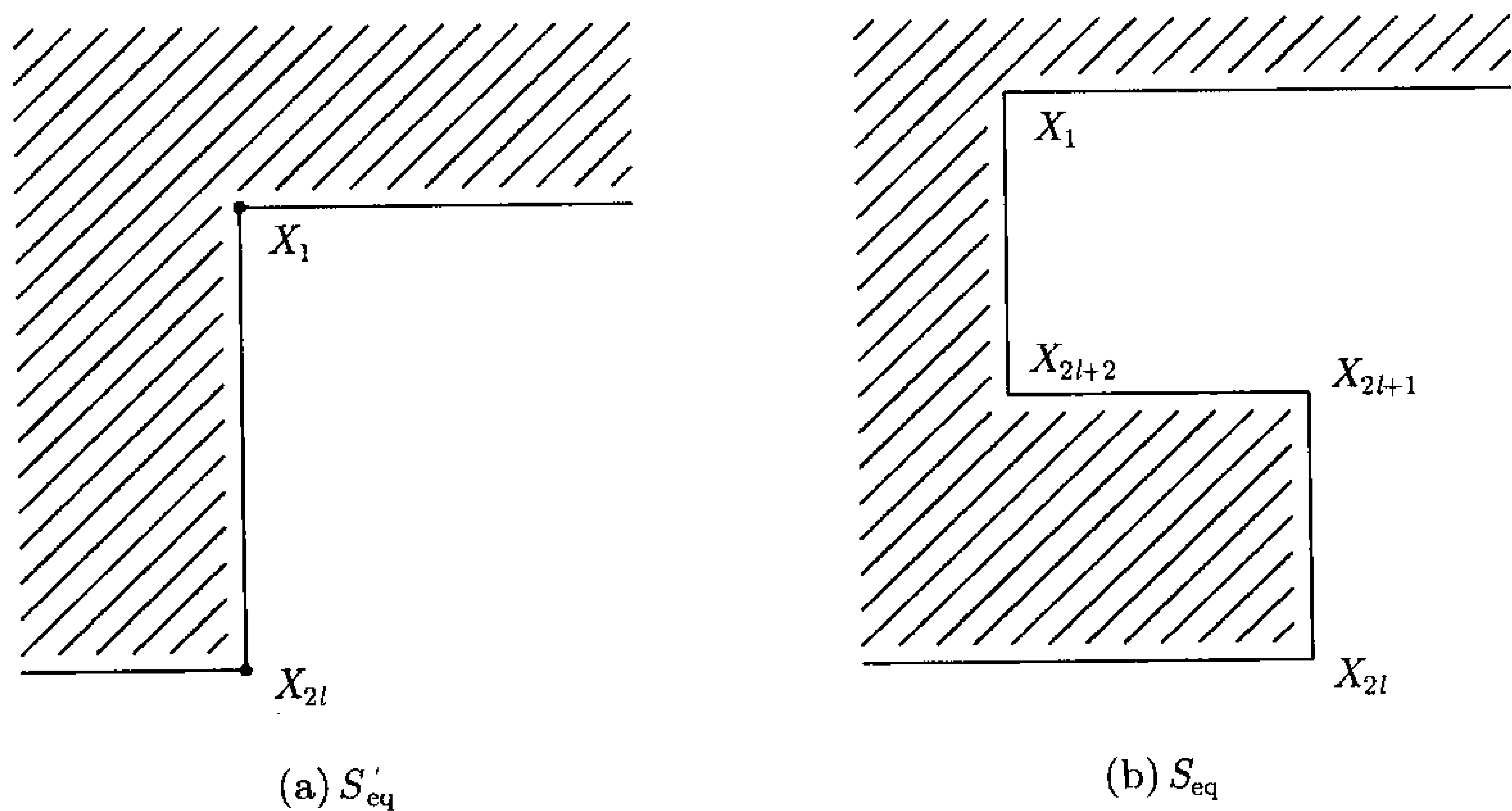
(4) $X_1 = I$ 和 $X_{2l} = I$,

总能找到 $C_{2l+2} = v_1v_2\cdots v_{2l}v_{2l+1}v_{2l+2}$ 的一个 0 嵌入 $\mu_0^r(C_{2l+2})$ 以 $S_{\rm eq}$ 为隅序列, 分别由图 10.2.1~ 图 10.2.4 表示.



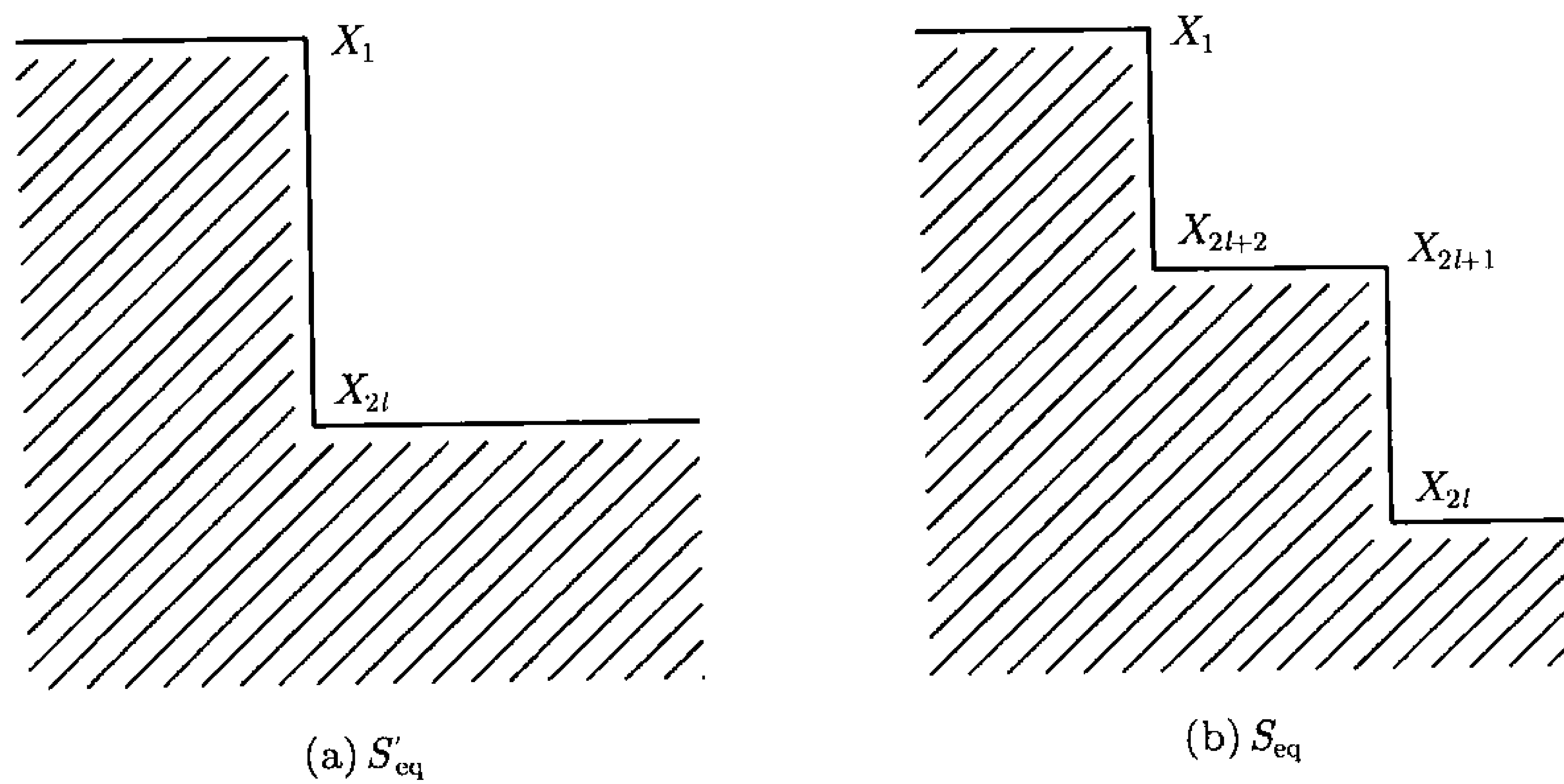
(a) $S'_{\rm eq}$ (b) $S_{\rm eq}$

图 10.2.1



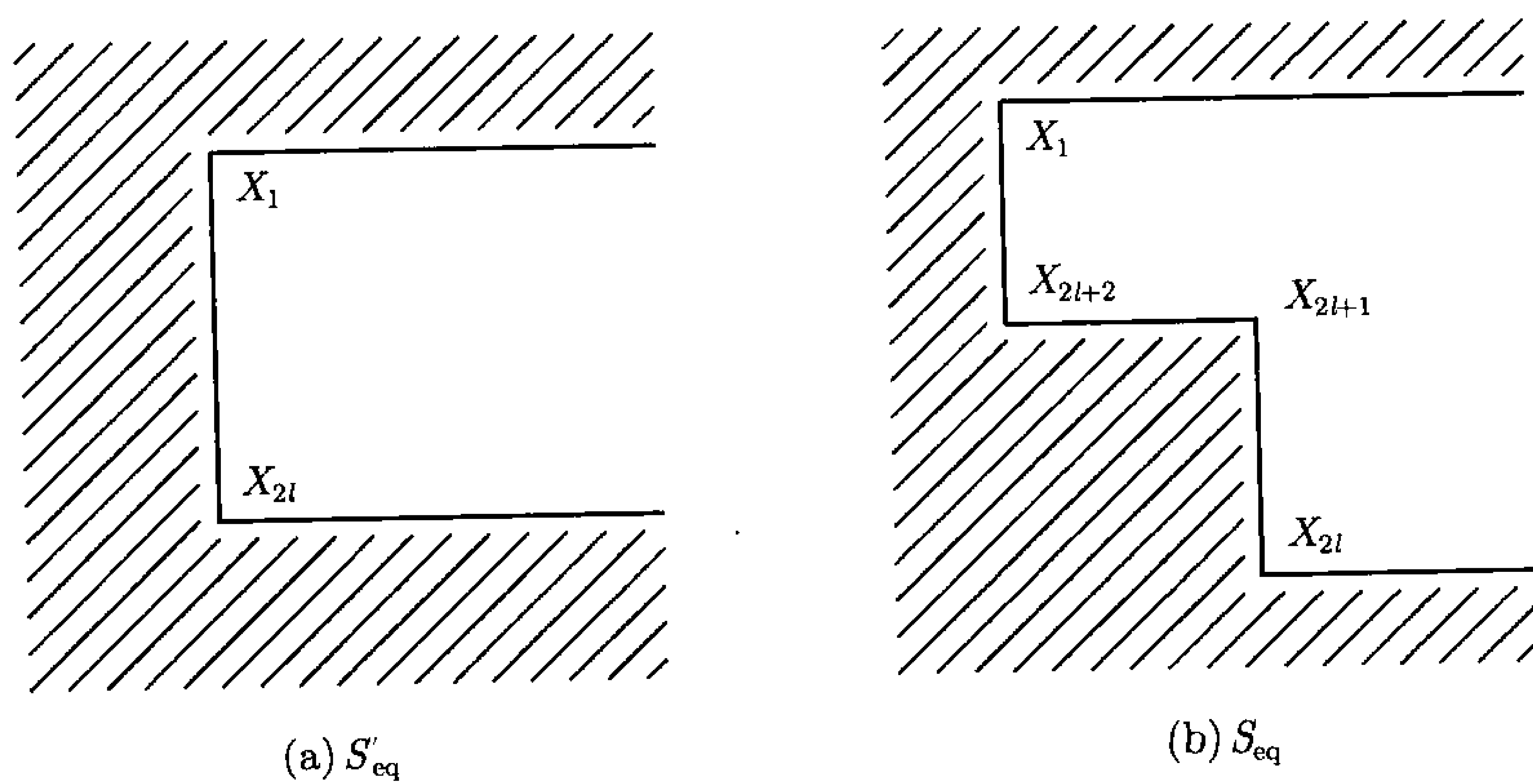
(a) S'_{eq}　　(b) S_{eq}

图 10.2.2



(a) S'_{eq}　　(b) S_{eq}

图 10.2.3



(a) S'_{eq}　　(b) S_{eq}

图 10.2.4

一个由 O 和 I 组成的循环序列, 若任何 I 均不与 I 相继, 即 II 不是它的一段, 则称它为 *I孤立的*. 若一个由 O 和 I 组成的循环序列, 是某纵横凸多边形的隅序列, 则也称它本身为*凸的*.

引理 10.2.2 一个由 O 和 I 组成的序列 S_{eq} 是凸的当且仅当它是一个隅序列, 而且它还是 I 孤立的.

证 先证必要性. 由序列凸性的定义, 第一个说法是显然的.

用反证法证第二个说法. 假设在 S_{eq} 中有一段 II. 令 S_{eq} 为 $C_{2l} = v_1v_2\cdots v_{2l}$ 的隅序列且 v_1 和 v_2 为状态 I. 自然, 不失一般性, 这时实质上, 只有图 10.2.5 所示的两种可能形式. 然而, 它们均导致与凸性之条件矛盾.

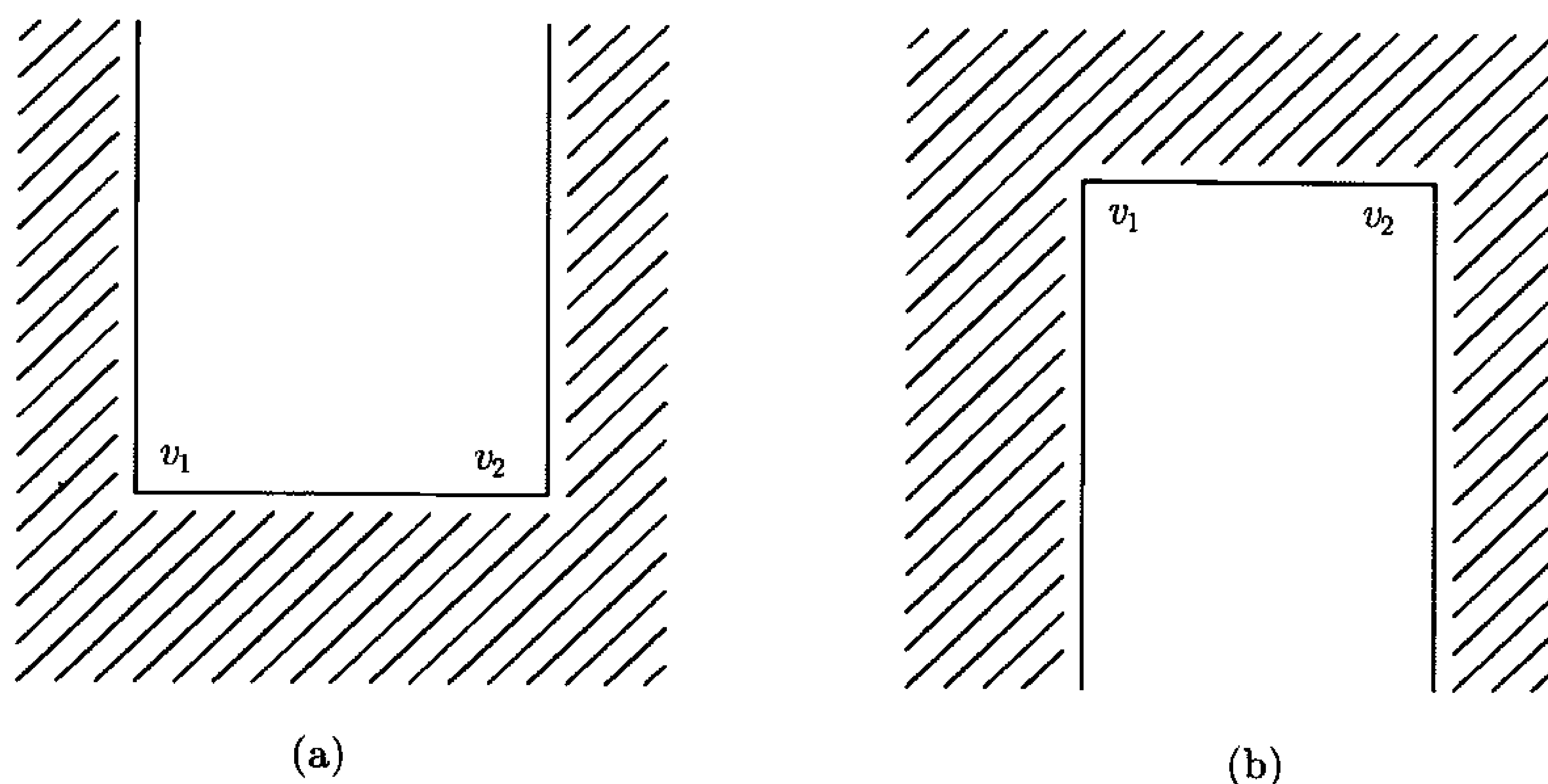


图 10.2.5

下角证充分性. 对 $S_{\text{eq}} = X_1X_2\cdots X_{2l}$ $(l \geqslant 2)$ 的长度用归纳法. 若 $l = 2$, 只能 $S_{\text{eq}} = OOOO$, 它是 I 孤立的. 自然, 因为它是矩形的隅序列可知它本身为凸的.

一般地, 设对于长度不大于 $2l(l \geqslant 2)$ 的序列充分性为真. 可以限定

$$S_{\text{eq}} = X_1X_2\cdots X_{2l+1}X_{2l+2},$$

使得 $X_{2l+1} = O$ 和 $X_{2l+2} = I$. 事实上, 这种限定并不失一般性. 因为由引理 10.2.1 知 S_{eq} 至少有一个 I. 不妨取 $X_{2l+2} = I$. 当然, 由 I 孤立性必有 $X_1 = O$. 容易看出, 从 S_{eq} 中去掉 X_{2l+1} 和 X_{2l+2} 之后所得的 $S'_{\text{eq}} = X_1X_2\cdots X_{2l}$ 仍然是 I 孤立的, 而且由引理 10.2.1 还知 S'_{eq} 也是隅序列. 由归纳假设, S'_{eq} 是凸的. 令 S'_{eq} 为格图上的 $2l$ 边形

$$C_{2l} = v_1v_2\cdots v_{2l}$$

的隅序列, 使得 X_i 为 v_i $i = 1, 2, \cdots, 2l$ 的状态. 然而, 在 S'_{eq} 上只有两种可能: $X_{2l} = O$ 和 $X_{2l} = I$. 不管怎样, 对于它们均得 S_{eq} 是凸的, 如图 10.2.6 和图 10.2.7 所示.

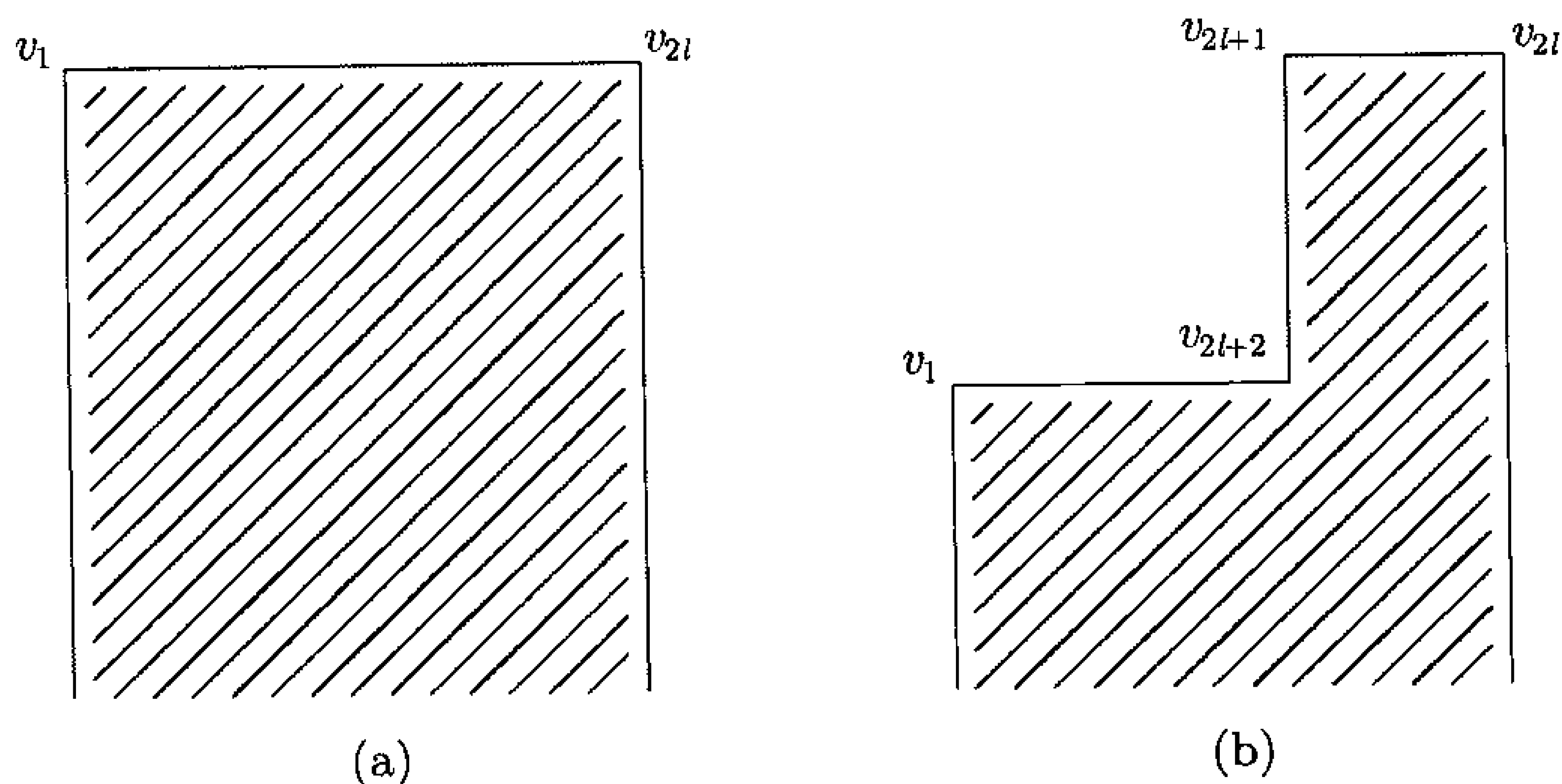


图 10.2.6　$X_{2l} = O$

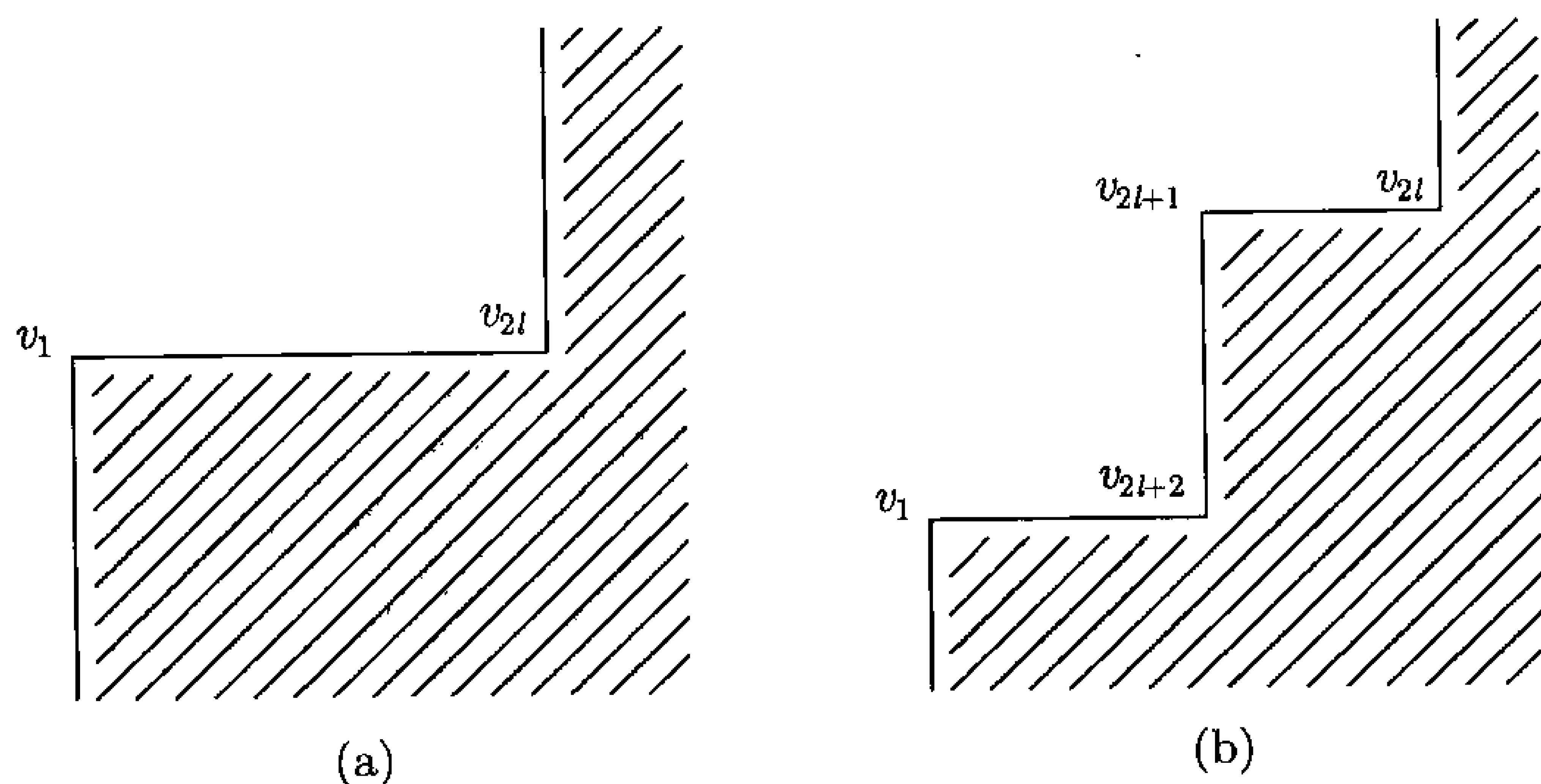


图 10.2.7　$X_{2l} = I$

定理 10.2.1　图 $G = (V, E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中的一个面 f 是 0 许可的当且仅当其边界上所有节点的次均小于 5, 并且满足如下关系:

$$n_{2\text{-val}}(f) \geqslant n_{4\text{-val}}(f) + 4. \tag{10.2.2}$$

进而, 当 f 取为无限面边界时, 若将 $i(0 \leqslant i \leqslant n_{2\text{-val}}(f))$ 个 2 节点限制为状态 S, 将 j $(0 \leqslant j \leqslant n_{3\text{-val}}(f))$ 个 3 节点限制为状态 I, 则 f 是 0 许可的当且仅当 f 的边界上所有节点的次皆小于 5, 并且满足如下关系:

$$n_{2\text{-val}}(f) - i \geqslant n_{4\text{-val}}(f) + j + 4. \tag{10.2.3}$$

证　因为在一个 0 嵌入中, 无限面边界上的任何 4 节点必须处状态 I, 只有 2 节点允许处状态 O. 由 (10.2.1) 式可得 (10.2.2) 式. 这就是第一个结论的必要性.

反之, 取 $n_{2\text{-val}}(f) - n_{4\text{-val}}(f) - 4$ 个 2 节点和所有 3 节点处状态 S, 由引理 10.2.1, 即得这个结论的充分性.

进而, 由引理 10.2.1 和第一个结论, 即可得定理的后一个结论.　♮

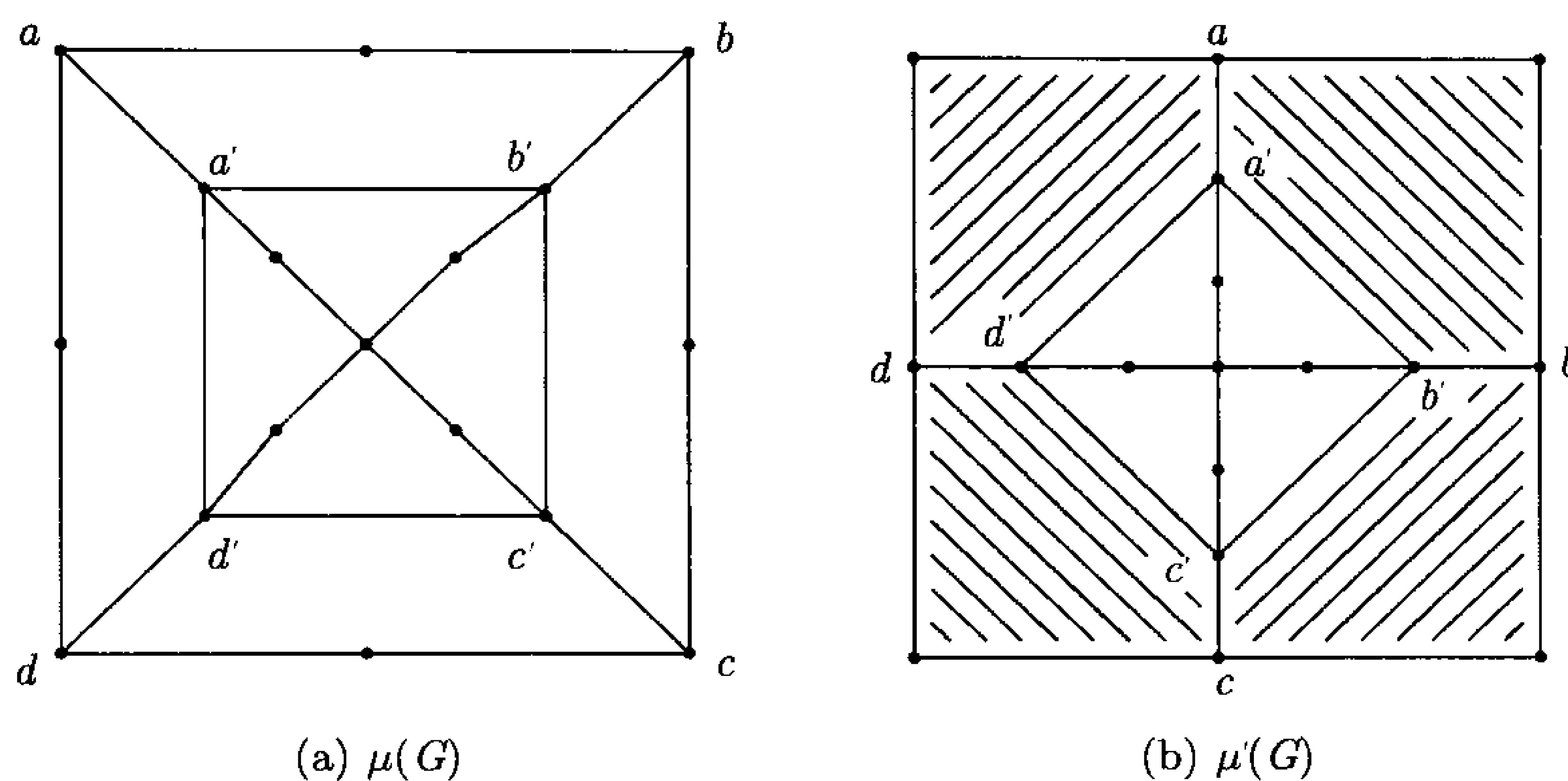
类似地, 也可以建立一个面的凸 0 许可性. 在 f 边界上的一个节点子集, 如果其中任何一对节点在 f 的边界上均不相邻 (即不相继), 则称它对于 f 是独立的.

定理 10.2.2 图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 的一个面 f 是凸 0 许可的当且仅当 f 是 0 许可的, 而且在 f 的面边界上所有 4 节点的集合对 f 是独立的. 进而, 一个面 f 是凸 0 许可的且满足如下条件: 其边界上有 i $(0\leqslant i\leqslant n_{2\text{-val}}(f))$ 个 2 节点处状态 S, j $(0\leqslant j\leqslant n_{3\text{-val}}(f))$ 个 3 节点处于状态 I 当且仅当 f 是 0 许可的, 并且满足这个条件以及其边界上的由所有 4 节点与 j 个 3 节点组成的集合对 f 为独立的.

证 由引理 10.2.2 和定理 10.2.1 可直接导出定理的结论. ♮

10.3 一般判准

首先, 讨论一个图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$ 的 0 可扩张性. 当然, G 的所有节点的次仍不超过 4, 而且不存在三角形作了节点导出子图. 由 10.2 节所得到的, 对于 0 可扩张性, $\mu(G)$ 的无限面必需满足条件 (10.2.2) 式, 但它显然不是充分的. 如图 10.3.1(a) 所示的图满足 (10.2.2) 式且没有 0 扩张. 事实上, 在图 10.3.1(b) 中 4 个带阴影的面, 由于它们边界上的所有节点都必须为状态 O, 由 (10.2.1) 式知, 不能将它们作为某 0 嵌入中的有限面, 如图 10.3.1(b) 所示.



(a) $\mu(G)$　　(b) $\mu'(G)$

图 10.3.1

这就建议我们考察所谓一个面的内 0 许可性. 在一个平面嵌入中的一个面 f, 如果它可以为某个 0 嵌入的有限面, 就称 f 为内0许可的.

引理 10.3.1 节点次不大于 4 无三角形图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$ 的一个面 f 是内 0 许可的, 并且使得在其边界上有 j $(0\leqslant j\leqslant n_{3\text{-val}}(f))$ 个 3 节点处状态 O 当

且仅当它满足如下的不等式:

$$n_{2\text{-val}}(f) \geqslant n_{4\text{-val}}(f) + j - 4. \tag{10.3.1}$$

证 因为任一 4 节点在 0 嵌入中的有限面边界上必须处状态 O, 任何 3 节点有两个选择: 状态 O 或状态 S, 2 节点可选三种状态之一, 由 (10.2.1) 式, 即得必要性.

反之, 若有

$$n_{4\text{-val}}(f) + j - 4$$

个 2 节点选择处状态 I, 所有 4 节点和 $j(0 \leqslant j \leqslant n_{3\text{-val}}(f))$ 个 3 节点处状态 O, 所有 2 节点与其他 3 节点均处状态 S, 则由 (10.2.1) 式, 也可求得一个纵横多边形在某 0 嵌入中作为面 f 的边界, 从而充分性得证. ▯

由于 4 节点在 0 嵌入 $\mu_0(G)$中的 4 个关联面内的关联角皆为 $\frac{\pi}{2}$, 一个 4 面, 即次为 4 的面, 若作为无限面其内 4 个角皆为 $\frac{3\pi}{2}$; 否则, 4 个角必均为 $\frac{\pi}{2}$, 可以只讨论那些次小于 4 的节点和次大于 4 的面在 $\mu_0(G)$ 中的分布. 令

$$\text{def }(v) = 4 - \rho(v; G),$$

并称之为节点 v 在 G 中的亏数. 同时, 令

$$\text{res }(f) = \rho(f; \mu G) - 4,$$

并称之为面 $f \in F$ 在平面嵌入 $\mu(G)$ 中的赢数, 其中, F 为 $\mu(G)$ 的面的集合.

引理 10.3.2 对于图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 总有

$$\sum_{v \in V} \text{def }(v) - \sum_{f \in F} \text{res }(f) = 8. \tag{10.3.2}$$

证 由于每边有两个端点, 从节点亏数的定义可知

$$\begin{aligned} 4\nu(G) &= \sum_{v \in V} \text{def }(v) + \sum_{v \in V} \rho(v; G) \\ &= \sum_{v \in V} \text{def }(v) + 2\varepsilon(G). \end{aligned} \tag{10.3.3}$$

对偶地有

$$\begin{aligned} 4\phi(G) &= \sum_{f \in F} \rho(f; \mu G) - \sum_{f \in F} \text{res }(f) \\ &= 2\varepsilon(G) - \sum_{f \in F} \text{res}(f), \end{aligned} \tag{10.3.4}$$

从而由 (10.3.3), (10.3.4) 式和对于平面嵌入的 Euler 公式可得

$$\sum_{v\in V} \mathrm{def}\,(v) - \sum_{f\in F} \mathrm{ref}\,(f) = 4(\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G)) = 8.$$

这就是 (10.3.2) 式.

对于图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 关系 (10.3.2) 被称为 $\mu(G)$ 的**均衡性**. 记

$$\lambda = 8 + \sum_{f\in F} \mathrm{res}\,(f) = \sum_{v\in V} \mathrm{def}\,(v),$$

并称之为 $\mu(G)$ 的**均衡值**. 若在均衡性中满足

$$\begin{cases} \mathrm{def}\,(v) \geqslant 0, & \forall v\in V, \\ \mathrm{res}\,(f) \geqslant 0, & \forall f \in F, \end{cases} \tag{10.3.5}$$

则称之为**正的**. 容易看出, 只有正均衡性的图才有可能有 0 嵌入.

下面着手探究在每个亏数大于 0 的节点处或赢数大于 0 的面中角的分配. 由于显节点对于这里的目标无关紧要. 自然, 总假设图 G 没有显节点. 这样在 G 的任何 0 嵌入 $\mu_0(G)$ 中, 所有的角都只能取 $\pi/2$, π 或 $3\pi/2$ 这三个可能值. 令 $\mathcal{A}(\mu_0 G)$ 为 $\mu_0(G)$ 中所有角的集合, $\mathcal{A}(f;\mu_0 G)$ 和 $\mathcal{A}(v;\mu_0 G)$ 分别为在面 f 内的和与节点 v 关联的集合. 为方便起见, 在 $\mathcal{A}(\mu_0^r G)$ 上引进一个整函数 θ: $\forall A\in\mathcal{A}(\mu_0 G)$,

$$\theta(A) = \begin{cases} 0, & A=\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & A=\pi, \\ 2, & A=\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases} \tag{10.3.6}$$

θ 被称为 $\mathcal{A}(\mu_0 G)$ 的角在 $\mu_0(G)$ 中的**分配**, $\theta(A)$ $(A\in\mathcal{A}(\mu_0 G))$ 被称为 A 在 $\mu_0(G)$ 中的**分配值**.

引理 10.3.3 令 $\mu_0(G)$ 为图 $G=(V,E)$ 的一个 0 嵌入. 它的面集记为 F, 则有

$$\begin{cases} \forall v\in V, & \displaystyle\sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0 G)} \theta(A) = \mathrm{def}\,(v), \\ \forall f\in F, & \displaystyle\sum_{A\in\mathcal{A}(f;\mu_0 G)} \theta(A) = \begin{cases} \mathrm{res}\,(f), & f\neq f_0, \\ \mathrm{res}\,(f)+8, & \text{否则}, \end{cases} \end{cases} \tag{10.3.7}$$

其中 f_0 为 $\mu_0(G)$ 的无限面.

证 首先, 记

$$\tilde{\theta} = 1-\theta, \tag{10.3.8}$$

则有 $\forall v \in V$,

$$\sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) = \begin{cases} 4, & \rho(v;\mu_0G)=4, \\ 2, & \rho(v;\mu_0G)=3, \\ 0, & \rho(v;\mu_0G)=2. \end{cases}$$

另一方面, 由 (10.3.8) 式,

$$\sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) = \rho(v;\mu_0G) - \sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0G)} \theta(A).$$

这就导出 (10.3.7) 式的第一个关系式.

进而, 由引理 10.2.1 有 $\forall f \in F-\{f_0\}$,

$$4 = \sum_{A\in\mathcal{A}(f);\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) = \rho(f;\mu_0G) - \sum_{A\in\mathcal{A}(f;\mu_0G)} \theta(A).$$

当 $f=f_0$ 时有

$$-4 = \sum_{A\in\mathcal{A}(f_0;\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) = \rho(f_0;\mu_0G) - \sum_{A\in\mathcal{A}(f_0;\mu_0G)} \theta(A).$$

这就导出 (10.3.7) 式的第二个关系式.　　　　□

为方便起见, 令 $A_{v,f}$ 为 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ (其面的集合为 F) 上与 v 关联并且在 f 内的那个角.

引理 10.3.4　令 $G=(V,E)$ 是一个无显节点的正均衡性的图, $\mu(G)$ 为 G 的一个平面嵌入. 如果有一个整函数 θ: $\mathcal{A}(\mu G)\to\{0,1,2\}$, 使得 (10.3.7) 式满足, 则 θ 作角的分配确定 $\mu(G)$ 的一个 0 扩张 $\mu_0(G)$.

证　对 $\mu(G)$ 的面数用归纳法. 当 G 本身是一个圈 $C=v_1v_2\cdots v_\nu$ 时, 由 (10.3.7) 式的第一个关系可知

$$\text{def }(v_i) = 2 = \theta(A_{v_i,f_0}) + \theta(A_{v_i,f_1}), \quad i=1,2,\cdots,\nu,$$

其中 f_0 和 f_1 分别为 $\mu(G)$ 的无限面和那个有限面. 这样, $(\theta(A_{v_i,f_0}),\theta(A_{v_i,f_1}))$ 有三种可能值: $(1,1),(2,0)$或 $(0,2)$, 它们分别对应 $(A_{v_i,f_0},\ A_{v_i,f_1})$ 为

$$(\pi,\pi),\ (3\pi/2,\pi/2)\text{或 }(\pi/2,3\pi/2).$$

由 (10.3.7) 式的第二个关系式和引理 10.2.1 可知, 以 θ 作一个分配确定 $\mu(G)$ 的一个 0 扩张.

一般地, 可以假设 v_0 是无限面 f_0 边界上的一个 2 节点. 事实上, 在 f_0 内, 由 (10.3.7) 式的第二个关系式和引理 10.2.1 可知至少有 4 个角为 $3\pi/2$, 这样的 v_0 总

是存在的. 设 $P(v_1,v_2)$ 是 $\mu(G)$ 上的一条路, 在它上, 除 v_1 和 v_2 的次不小于 3 外, 所有内节点的次均为 2 且 v_0 是它的一个内节点. 记 G' 为从 G 中去掉 $P(v_1,v_2)$ 的所有内节点及它们的关联边所得的图. 用 f'_0 表示 $\mu(G')$ 的无限面, 并将它视为是由 $\mu(G)$ 中的无限面 f_0 和有限面 f_1 所合成的. 自然, $P(v_1,v_2)$ 在 f_0 和 f_1 的公共边界上. 容易验证, 整函数 θ': $\mathcal{A}(\mu G')\to\{0,1,2\}$, 使得 $\forall A\in\mathcal{A}(\mu G')$,

$$\theta'(A)=\begin{cases}\theta(A), & A\neq A_{v_i,f'_0},\\ \theta(A_{v_i,f_0})+\theta(A_{v_i,f_1})+1, & \text{否则},\end{cases}\qquad i=1,2$$

在 $\mu(G')$ 上满足 (10.3.7) 式. 由归纳假设, θ' 作为一个角分配确定 $\mu(G')$ 的一个 0 嵌入 $\mu_0(G')$, 而且由 (10.3.7) 式的第二个关系式和引理 10.2.1, 即得 $\mu_0(G)$ 可延拓为 $\mu(G)$ 的一个 0 嵌入 $\mu_0(G)$. 事实上, 只要在 $\mu_0(G')$ 上适当恢复 $P(v_1,v_2)$ 的 0 嵌入即可得 $\mu_0(G)$. ♮

定理 10.3.1 令 G 是一个具正均衡性且无显节点的图, 则它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 有一个 0 扩张 $\mu_0(G)$ 当且仅当在 $\mu(G)$ 上存在一个整函数 θ: $\mathcal{A}(\mu G)\to\{0,1,2\}$ 满足 (10.3.7) 式.

证 由引理 10.3.3 和引理 10.3.4 直接可得. ♮

对于一个正均衡性的图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$, 引进一个二部图, 用 $Q_{\rm ui}=Q_{\rm ui}(G)=(X_Q,Y_Q;E_Q)$ 表示, 按如下的方式所确定:

$$\begin{cases}X_Q=\displaystyle\bigcup_{\substack{v\in V\\ \mathrm{def}(v)>0}}\{v(i)|\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant\ \mathrm{def}(v)\},\\ Y_Q=\displaystyle\bigcup_{\substack{f\in F-\{f_0\}\\ \mathrm{res}(f)>0}}\{f(i)|\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant \mathrm{res}(f)\}\\ \qquad\qquad\bigcup\{f_0(i)|\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant \mathrm{res}\ (f_0)+8\}\end{cases}\tag{10.3.9}$$

和

$$E_Q=\Bigg(\bigcup_{\substack{v\in V\\ \mathrm{def}(v)>0}}\ \bigcup_{\substack{f\in F-\{f_0\}\\ \mathrm{res}(f)>0\\ f\ \mathrm{ind}\ v}}A_{v,f}\Bigg)\bigcup\Bigg(\bigcup_{\substack{v\in V(f_0)\\ \mathrm{def}(v)>0}}A_{v,f_0}\Bigg),\tag{10.3.10}$$

其中

$$\begin{cases}A_{v,f}=\{(v(i),f(j))|\forall i,j,1\leqslant i\leqslant\ \mathrm{def}(v),1\leqslant j\leqslant \mathrm{res}(f)\},\\ A_{v,f_0}=\{(v(i),f_0(j))|\forall i,j,1\leqslant i\leqslant \mathrm{def}\ (v),1\leqslant j\leqslant \mathrm{res}(f_0)+8\}.\end{cases}$$

称这个二部图 $Q_{\rm ui}$ 为 $\mu(G)$ 的**均衡图**. 由均衡性 (10.3.2), 总有

$$\lambda=|X_Q|=|Y_Q|.\tag{10.3.11}$$

引理 10.3.5　令 $\mu(G)$ 为图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入, 则在 $\mu(G)$ 上存在一个整函数 θ: $\mathcal{A}(\mu G)\to\{0,1,2\}$, 使得满足 (10.3.7) 式当且仅当在均衡图 $Q_{\text{ui}}(\mu G)$ 上有一个完美对集.

证　必要性可由均衡性 (10.3.2) 和均衡图的定义导出.

现在证充分性. 设

$$M=\{(x_i,y_i)|\forall i,1\leqslant i\leqslant\lambda,x_i\in X_Q,\ y_i\in Y_Q\}\tag{10.3.12}$$

为 $Q_{\text{ui}}=Q_{\text{ui}}(\mu G)$ 上的一个完美对集. 令

$$\begin{aligned}M(A_{v,f})=&\{(x_i,y_i)|\forall(x_i,y_i)\in M,\ 1\leqslant i\leqslant\lambda,\\&(x_i\text{ ind }v)\wedge(y_i\text{ ind }f)\},\end{aligned}\tag{10.3.13}$$

其中 $A_{v,f}\in\mathcal{A}(\mu G)$, $v\in V$, $f\in F$. 由 Q_{ui} 的定义, 容易验证

$$\forall A\in\mathcal{A}(\mu G),\quad\theta(A)=|M(A)|\tag{10.3.14}$$

就是 $\mu(G)$ 上的一个取值为 0, 1 或 2, 并且满足 (10.3.7) 式的整函数.　$\natural$

定理 10.3.2　令 $G=(V,E)$ 为一个正均衡性的图且无显节点, $\mu(G)$ 为它的一个平面嵌入, 则 $\mu(G)$ 有一个 0 扩张 $\mu_0(G)$ 当且仅当其均衡图 Q_{ui} 有一个完美对集.

证　由定理 10.3.1 和引理 10.3.5 直接可得.　$\natural$

10.4　特殊判准

首先, 进一步将定理 10.3.2 所述的一般判准用于求 0 可嵌入性的禁用构形.

令 $\mu(G)$ 为一个正均衡性图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入, F 为它的面的集合. 设 C^* 是一个上圈. 由 5.2 节中所述的 Jordan 定理, $\mu(G\backslash C^*)$ 恰有两个连通片, 分别用 $\mu_{\text{in}}^*=\mu_{\text{in}}(G;C^*)$ 和 $\mu_{\text{out}}^*=\mu_{\text{out}}(G;C^*)$ 表示. 令 V_{in}^* 和 V_{out}^* 分别为 μ_{in}^* 和 μ_{out}^* 的节点集. 若 $\tilde V=V_{\text{in}}^*$ (或 V_{out}^*) 满足

$$\sum_{v\in\tilde V}\text{def}\,(v)>\sum_{\substack{f\in F\\ f\text{ ind }v}}\text{res}_0(f),\tag{10.4.1}$$

并且无上圈 C_1^* 有 $\mu_{\text{in}}(G;C_1^*)\subset\mu_{\text{in}}^*$(或者 μ_{out}^*) 也满足 (10.4.1) 式, 则称 C^* 为**节点非均衡的**. 用 Ω_{ver} 表示. 在 (10.4.1) 式中,

$$\text{res}_0(f)=\begin{cases}\text{res}\,(f)+8, & f=f_0,\\ \text{res}\,(f), & \text{否则},\end{cases}\tag{10.4.2}$$

其中 f_0 为 $\mu(G)$ 的无限面.

另一方面, 令 C 为 $\mu(G)$ 上的一个圈. 由 Jordan 曲线定理, 记

$$\begin{cases} \mu_{\text{in}} = \mu_{\text{in}}(G;C) = C\bigcup(\mu(G)\bigcap C_{\text{in}}), \\ \mu_{\text{out}} = \mu_{\text{out}}(G;C) = C\bigcup(\mu(G)\bigcap C_{\text{out}}). \end{cases}$$

用 F_{in} 和 F_{out} 分别表示 μ_{in} 和 μ_{out} 在 F 中的面的集合. 当然, $F_{\text{in}} + F_{\text{out}} = F$. 若 $\tilde{F} = F_{\text{in}}$(或 F_{out}) 满足

$$\sum_{f\in\tilde{F}} \text{res}_0(f) > \sum_{v\in V(\mu_{\text{in}})} \text{def}\,(v), \tag{10.4.3}$$

并且没有圈 C', 使得 $\mu_{\text{in}}(G;C') \subset \mu_{\text{in}}$(或 μ_{out}) 也满足 (10.4.3) 式, 则称 C 为**面非均衡的**, 用 Ω_{fac} 表示.

引理 10.4.1 令 $\mu(G)$ 为一个正均衡性图 $G(V,E)$ 的平面嵌入, 则 $\mu(G)$ 有一个 Ω_{ver} 当且仅当 $\mu(G)$ 有一个 Ω_{fac}.

证 设 C^* 为确定 Ω_{ver} 的上圈, $\mu^*_{\text{in}} = \mu_{\text{in}}(G;C^*)$ 满足 (10.4.1) 式. 由 μ^*_{in} 和 $\mu^*_{\text{out}} = \mu_{\text{out}}(G;C^*)$ 之间的对称性, 这一假定自不失一般性. 令

$$C = \sum_{f\subset\mu^*_{\text{out}}} \partial f,$$

则由均衡性 (10.3.2) 式, 有 $\mu_{\text{in}} = \mu(G;C_{\text{in}}) = \mu^*_{\text{out}}(f_0 \not\subset \mu^*_{\text{out}})$, 或者 $\mu_{\text{out}} = \mu(G;C_{\text{out}}) = \mu^*_{\text{out}}(f_0 \subset \mu^*_{\text{out}})$ 满足 (10.4.3) 式, 而且若 C 不是一个 Ω_{fac}, 则 μ_{in}(或 μ_{out}) 有一个圈 C', 使得 $C'_{\text{in}} \subset C_{\text{in}}$(或 $C'_{\text{out}} \subset C_{\text{out}}$), $\mu'_{\text{in}} = \mu(G;C'_{\text{in}})$(或 $\mu'_{\text{out}} = \mu(G;C'_{\text{out}})$) 满足 (10.4.3) 式. 这就导致总可找到一个 Ω_{fac}. 必要性得证.

反之, 以类似的方式也可得充分性. ♮

引理 10.4.2 构形 Ω_{ver} 和 Ω_{fac} 对于 0 可扩张性均为禁用的.

证 由引理 10.4.1, 只要对 Ω_{ver} 和 Ω_{fac} 中的任何一个证明此引理即可.

若在平面嵌入 $\mu(G)$ 中有 Ω_{ver}, 则由定理 1.3.8 可知均衡图 Q_{ui} 不可能有完美对集. 又由定理 10.3.2 可知 $\mu(G)$ 不是 0 可扩张的. 因此, 由 Ω_{ver} 的极小性可知 Ω_{ver} 是一个禁用构形. ♮

定理 10.4.1 一个节点次不大于 4 的无三角形的可平面图 $G = (V,E)$ 是 0 可嵌入的当且仅当在它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 中不存在 Ω_{ver}(或 Ω_{fac}).

证 必要性由引理 10.4.2 直接得到.

现在证充分性. 因为在一个平面嵌入 $\mu(G)$ 中无 Ω_{ver}, 则对任何 $B \subset V$,

$$\sum_{v\in B} \text{def}\,(v) \leqslant \sum_{\substack{f \text{ ind } v \\ v\in B}} \text{res}_0(f). \tag{10.4.4}$$

否则, 若存在 $B \subset V$, 使得不满足 (10.4.4) 式, 则在均衡图 $Q_{\text{ui}}(\mu G)$ 中, 由 $X(B)$ 和 $Y(B)$ 的节点导出的子图必有一个连通片, 记为 $H = (X_0, Y_0; E_0)$, $X_0 \subset X(B)$, $Y_0 \in Y(B)$, 使得

$$\sum_{v \text{ ind } V(X_0)} \text{def }(v) = |X_0| > |Y_0| = \sum_{f \in F(Y_0)} \text{res}_0(f), \tag{10.4.5}$$

其中 $X(B)$ 和 $Y(B)$ 分别为在 X_Q 和 Y_Q 相应 B 中的节点和与 B 关联的面的那些均衡图的节点的集合, $V(X_0)$ 和 $F(Y_0)$ 分别为在 $\mu(G)$ 中那些相应 X_0 和 Y_0 中的节点和面的集合. 这就导致在 G 中存在一个上圈 C^*, 使得 μ^*_{in} 或 μ^*_{out} 为 B 在 G 中导出子图的一个平面嵌入, 而且满足 (10.4.1) 式. 与 $\mu(G)$ 中无 Ω_{ver} 矛盾, 从而由定理 1.3.8 可知 $Q_{\text{ui}}(\mu G)$ 有一个完美对集. 进而, 再由定理 10.3.2, 即得充分性. ♮

根据上面得到的那些结果, 可以发现一大批正均衡性的图不是 0 可嵌入的. 下面列几类这样的图.

推论 10.4.1　设一个正均衡性图 $G = (V, E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中没有一个面是 0 许可的, 即对任何面 f 均有

$$n_{2\text{-val}}(f) < n_{4\text{-val}}(f) + 4, \tag{10.4.6}$$

则 $\mu(G)$ 不是 0 可扩张的, 而且若 G 与一个 3 连通的图同胚, 则 (10.4.6) 式将使 G 不是 0 可嵌入的.

证　这是定理 10.2.1 的一个直接结果. ♮

推论 10.4.2　任何无三角形且在每一个圈上至多有三个 2 节点的图不是 0 可嵌入的.

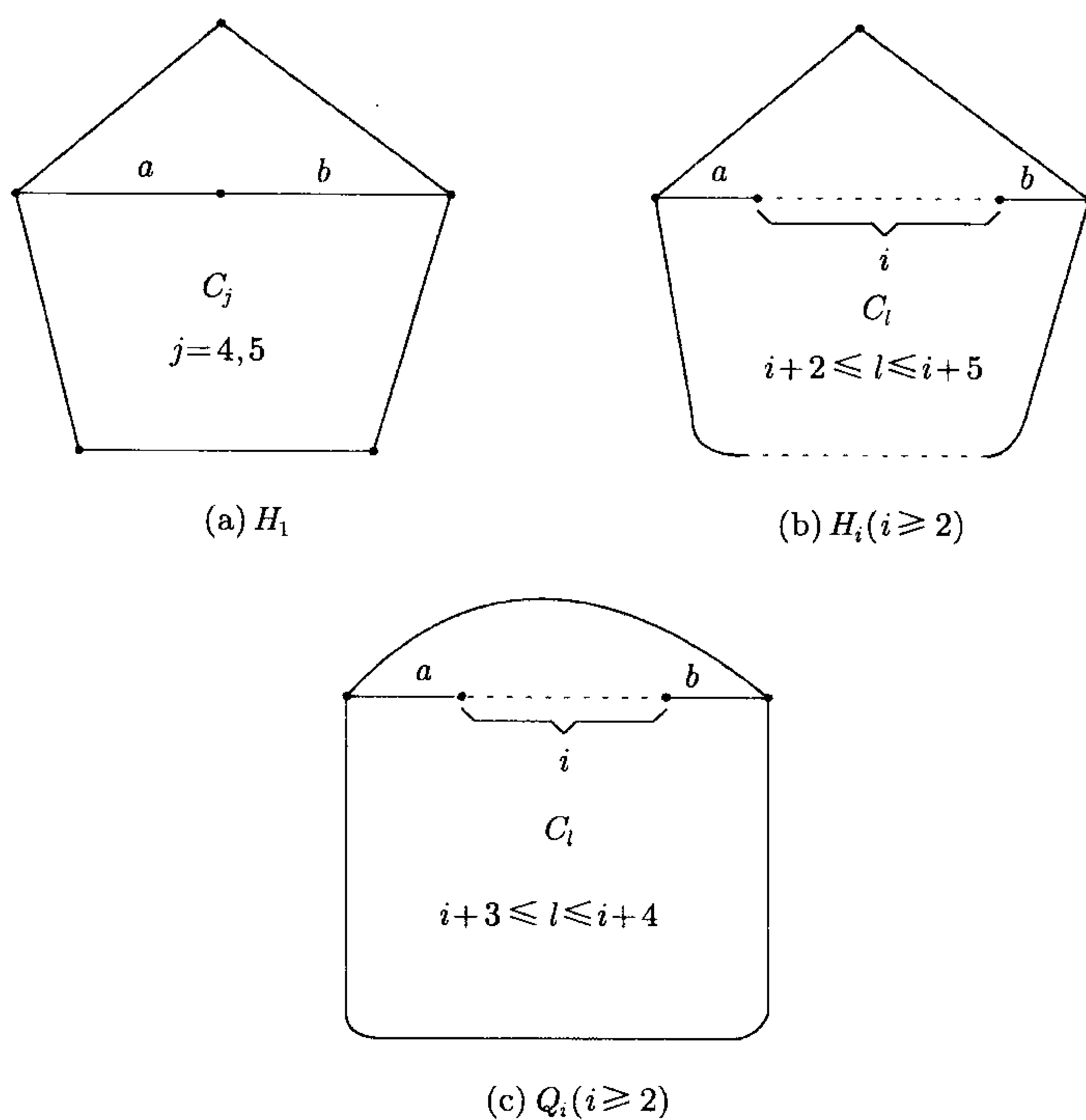
证　这是推论 10.4.1 的一个直接结果. ♮

推论 10.4.3　在无三角形的图 $G = (V, E)$的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 中, 若有 $H_i(i \geqslant 1)$ 或 $Q_i(i \geqslant 2)$ 如图 10.4.1 所示, 则 G 不是 0 可嵌入的.

证　因为 $H_i(i \geqslant 1)$ 有 Ω_{ver}. 事实上, 如图 10.4.1 所示, 在每个图中, 边对 $\{a, b\}$ 均为 Ω_{ver} 中的那个上圈 C^*. 由定理 10.4.1, 即得推论的结论. ♮

推论 10.4.4　在无三角形的图$G = (V, E)$ 的一个平面嵌入中, 若存在 $\Phi_i(i \geqslant 1)$ 和 $\Phi'_i(i \geqslant 2)$, 如图 10.4.2 所示的一个构形, 则 G 不是 0 可嵌入的.

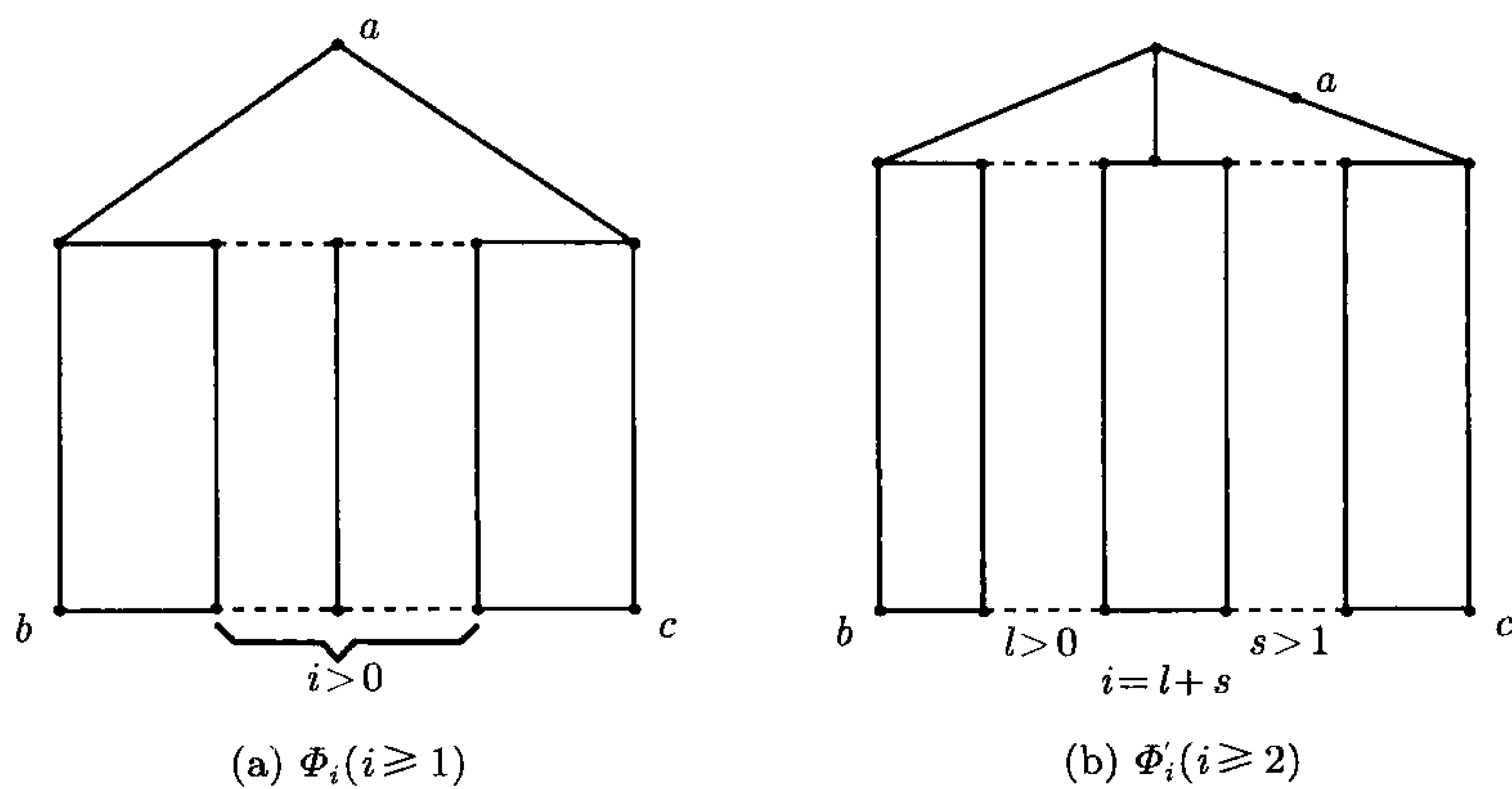
证　因为在 $\Phi_i(i \geqslant 1)$ 和 $\Phi'_i, (i \geqslant 2)$ 中, 如图 10.4.2 所示每个构形都仅有三个 2 节点. 由推论 10.4.3 可知全不是 0 可嵌入的, 从而 G 也必不是 0 可嵌入的, 即得推论的结论. ♮



(a) H_1 (b) $H_i(i\geqslant 2)$

(c) $Q_i(i\geqslant 2)$

图 10.4.1



(a) $\Phi_i(i\geqslant 1)$ (b) $\Phi'_i(i\geqslant 2)$

图 10.4.2

推论 10.4.5 令 $G=(V,E)$ 是一个正均衡性的图. 若在它的每个平面嵌入 $\mu(G)$ 中均有一个面 f, 使得

$$n_{4\text{-val}}(f) > n_{2\text{-val}}(f) + 4, \tag{10.4.7}$$

则 G 不是 0 可嵌入的.

证　由于易知 f 的边界圈本身形成了一个 Ω_{fac}, 由定理 10.4.1, 即得推论的结论. ♮

进而, 再研究两类可平面图, 并且对它们的 0 可嵌入性发现了非常简单的表征. 这就是外可平面图与 Halin 图.

引理 10.4.3　任何无三角形的外可平面图均有两条相互独立的边, 它们的端点全是 2 节点.

证　首先, 容易看出任何外平面图均至少有两个 2 节点不相邻, 并且在两个不同的有限面的非公共 (若相邻) 边界上.

然后, 还知若一个 2 节点不与其他 2 节点相邻, 则由外平面性它必落在一个三角形上, 从而这两个 2 节点均与另外的 2 节点相邻. 又它们在两个不同面的 (非公共的, 若相邻) 边界上, 故只能引理成立. ♮

定理 10.4.2　一个无 4 节点的外可平面图 $G = (V, E)$ 是 0 可嵌入的当且仅当它不含有三角形.

证　因为必要性显然, 只证充分性. 对 G 的度用归纳法. 当 G 的边很少, 或者 G 本身就是一个圈时, 容易验证.

一般地, 因为 G 无三角形, 由引理 10.4.3 可以假设 (u, v) 是一条边, 并且 u 和 v 全是 2 节点. 令 L 为包括边 (u, v) 所有节点都是 G 中的 2 次节点组成的最长路, 记 u_0 和 v_0 为与 L 两端点相邻, 但不在 L 中的节点. 可设 (u_0, v_0) 为 G 的一条边; 否则, 可在 G 上添上边 (u_0, v_0) 得 G'. 令 $G_1 = G - L$, 或者 $G_1 = G' - L$, 当 $(u_0, v_0) \notin E$ 时. 由于 G_1 仍然是无 4 节点的外平面图, 当然也不会有三角形. 由归纳假设, G_1 是 0 可嵌入的. 由外平面性, u_0 和 v_0 仍在无限面边界上. 不管怎样, 总可以从 G_1 的一个 0 嵌入经过恢复 L 而得到 G 的一个 0 嵌入, 从而充分性得证. ♮

如 3.1 节中所提到的, 一个 Halin 图是由一个树和一个外边界圈构成的, 这里, 假设在树上没有 2 节点. 事实上, 这种假定对于这里的目的是非本质的.

为简便起见, 对任何图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 记

$$\text{dif}\,(S) = \sum_{\substack{f \text{ ind } S \\ f \in F}} \text{res}_0(f) - \sum_{v \in S} \text{def}\,(v), \tag{10.4.8}$$

其中 $S \subseteq V$.

引理 10.4.4　任何一个无三角形的 Halin 图, 而且所有内节点的次均大于 2 必至少有两个 2 节点在外边界圈上.

证　令 L 是给定的 Halin 图 G 中那个树上的最长路. 记 u 和 v 为 L 的两个端点. 由最长性, 它们必全在外边界圈上. 若 u_1 和 v_1 分别为在 L 上与 u 和 v 相邻的节点, 则由 L 的最长性和 u_1 与 v_1 的次大于 2, 考虑到无三角形, u_1 与 v_1 均

必至少有一个关联面, 在外边界圈上的公共边界, 至少含两条边, 从而在外边界圈上至少有两个 2 节点. 引理得证.

定理 10.4.3 令 $G=(V,E)$ 是一个无三角形的 Halin 图, 并且它的所有内节点全是 3 节点, 则 G 是 0 可嵌入的当且仅当在外边界圈上至少有 4 个 2 节点.

证 因为由推论 10.4.2, 即得必要性, 下面只证充分性. 由定理 10.4.1, 只要论证 G 不含 Ω_{ver} 即可. 用反证法. 设 C^* 是一个节点非均衡的上圈, 则有两种可能的情形发生: $\mu_{\text{in}}^*=\mu_{\text{in}}(G;C^*)$ 有一个节点在外边界圈 $B=\partial f_0$ 上, 或否. 为方便起见, 令 F_{in}^* 为 G 中所有那些与 μ_{in} 的节点关联的面的集合.

情形 1 $V_{\text{in}}^*\cap V(B)=\varnothing$, 其中 $V_{\text{in}}^*=V(\mu_{\text{in}}^*)$. 由于 μ_{in}^* 是树, 则有

$$|F_{\text{in}}^*|=|E(C^*)|, \tag{10.4.9}$$

而且, 因为 V_{in}^* 中所有节点皆为 G 中的 3 节点, 于是有

$$|F_{\text{in}}^*|=|V_{\text{in}}^*|+2. \tag{10.4.10}$$

由于只 (或否) 与 μ_{in}^* 的显节点关联的面的次至少比它的与 μ_{in}^* 或 C^* 关联的边界边的数目多 2(或 1), 若 μ_{in}^* 中显节点的数目 $\nu_1(\mu_{\text{in}}^*)$ 少于 4, 而且它们每个都与一个四边形关联, 则至少 $4-\nu_1(\mu_{\text{in}}^*)$ 个其他面, 每个的次至少比与 μ_{in}^* 或 C^* 关联的那些面的数目大 2, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{f\in F_{\text{in}}^*}\rho(f;G)&\geqslant 2(\varepsilon(\mu_{\text{in}}^*)+|V_{\text{in}}^*|+2)+|V_{\text{in}}^*|+2+\max(4,\nu_1(\mu_{\text{in}}^*))\\&\geqslant |V_{\text{in}}^*|+4(|F_{\text{in}}^*|-1)+4\\&=|V_{\text{in}}^*|+4|F_{\text{in}}^*|,\end{aligned} \tag{10.4.11}$$

其中用到 (10.4.9), (10.4.10) 式和 $\varepsilon(\mu_{\text{in}}^*)=|V_{\text{in}}^*|-1$. 另一方面, 由 G 的内节点的 3 正则性有

$$\sum_{v\in V_{\text{in}}^*}\text{def}\,(v)=|V_{\text{in}}^*|. \tag{10.4.12}$$

这样, 由 (10.4.11) 和 (10.4.12) 式可知 $\text{dif}(V_{\text{in}}^*)\geqslant 0$, 与 C^* 的节点非均衡性矛盾.

情形 2 $V_{\text{in}}^*\cap V(B)\neq\varnothing$. 令 $V_0=V_{\text{in}}^*\cap V(B)$ 和 $V_1=V_{\text{in}}^*\backslash V_0$. 由情形 1 中所讨论的可知

$$\text{dif}\,(V_{\text{in}}^*)=\text{dif}\,(V_1)+\text{res}_0(f_0)-\sum_{v\in V(B)}\text{def}(v). \tag{10.4.13}$$

根据 (10.4.11) 和 (10.4.12) 式有

$$\text{dif}\,(V_1)\geqslant\max(0,\nu_2(f_0,\mu_{\text{in}}^*)-4), \tag{10.4.14}$$

其中 $\nu_2(f_0;\mu_{\text{in}}^*)$ 为 $V(B)$ 中 G 的相应 $\mu_{\text{in}}^*[V_1]$ 中显节点的 2 节点数, 而且, 令

$$\Delta = \text{res}_0(f_0) - \sum_{v\in V(B)} \text{def}\ (v),$$

则有

$$\Delta \geqslant |V(f_0)| + 4 - (|V_0| + \nu_2(f_0;\mu_{\text{in}}^*)). \tag{10.4.15}$$

考虑到 (10.4.13) 和 (10.4.15) 式, 即可得

$$\text{dif}\ (V_{\text{in}}^*) \geqslant |V(f_0)| - |V_0| = 0.$$

又与 C^* 的节点非均衡性矛盾. ♮

10.5 注　记

(1) 很多算法, 其中多数在计算复杂性方面是线性的, 可以被设计用来识别一个与 3 连通的图同胚的图, 或它的平面嵌入是否为 0 可扩张的. 0 可嵌入的, 甚至 0 可实现的, 以便进一步在计算机上实现. 除了文献 (Liu, Y.P.[26]) 的结果外, 关于凸性的问题也完满地得到了解决. 然而, 一般图的 0 可嵌入性的判别就算法复杂性而言绝非容易 (Liu, Y.P.[27]).

(2) 这里所讨论的问题可以引申到高维的情形, 也许会有人还想看一看在曲面上的情形. 不过, 这时似乎不能再化为整数格上的问题, 除非利用 9.1 节中的曲面模型.

(3) 关于网格可嵌入性, 在文献 (Liu, Y.P.[26]) 中可以看到一些基础性的讨论, 但那里只提供了一些部分结果. 本章将遗留任务得以完成.

(4) 事实上, 网格可扩张性的问题与如下的 Diophantine 方程 (或不定方程) 等价: 对于图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, F 为其面的集合, 求 $x_A \in \{-1,0,1\}$ $(A\in\mathcal{A}(\mu G))$, 使得

$$\begin{cases} \forall v\in V, & \displaystyle\sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu G)} x_A = \begin{cases} 4, & \rho(v;G)=4,\\ 2, & \rho(v;G)=3,\\ 0, & \text{否则},\end{cases} \\ \forall f\in F, & \displaystyle\sum_{A\in\mathcal{A}(f;\mu G)} x_A = \begin{cases} -4, & f=f_0,\\ 4, & \text{否则}.\end{cases}\end{cases} \tag{10.5.1}$$

虽然, $X_A(A\in\mathcal{A}(\mu G))$ 的取法的可能性是 G 的阶 (或度) 的指数型函数, 事实上, 从 10.4 节和 10.5 节中所讨论的表明, 方程 (10.5.1) 是多项式地可解的.

第 11 章　嵌入的同构

11.1　嵌入的自同构

令 $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$ 是一个多面形, 其中 $G=(V,E)$ 为它的基准图, F 为它的面集. 对于 $e=(u,v)\in E$, 记

$$X(e;\Sigma)=\{e_{u,\mathrm{r}},e_{u,\mathrm{l}},e_{v,\mathrm{r}},e_{v,\mathrm{l}}\},\tag{11.1.1}$$

并称之为 e 的**四元胞腔**, 其中 $e_{u,\mathrm{r}}$, $e_{u,\mathrm{l}}$ 和 $e_{v,\mathrm{r}}$, $e_{v,\mathrm{l}}$ 分别表示 e 的从 u 和 v 发出的右侧、左侧的半边, 每一个都称为 e 的**端侧**. 令

$$\mathcal{X}(\Sigma)=\bigcup_{e\in E}X(e;\Sigma),\tag{11.1.2}$$

并称之为 Σ 的**通集**. 进而, 对于 $v\in V$, 设 $\varrho(v)=(a,b,c,\cdots)$ 为 Σ 上在节点 v 处的旋. 记

$$\begin{cases}\varrho_{\mathrm{r}}(v)=(a_{v,\mathrm{r}},b_{v,\mathrm{r}},c_{v,\mathrm{r}},\cdots),\\ \varrho_{\mathrm{l}}(v)=(\cdots,c_{v,\mathrm{l}},b_{v,\mathrm{l}},a_{v,\mathrm{l}})\end{cases}\tag{11.1.3}$$

分别称为 Σ 上 v 处的*右旋*、*左旋*, 则可以伴随 Σ 得到一个 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的置换 $\pi(\Sigma)$ 为

$$\pi(\Sigma)=\prod_{v\in V}\varrho_{\mathrm{r}}(v)\varrho_{\mathrm{l}}(v),\tag{11.1.4}$$

并称之为一个 **Σ置换**. 这里需特别指出的是, $\varrho_{\mathrm{r}}(v)$ 的走向与 $\varrho_{\mathrm{l}}(v)$ 的走向为互相反的. 有时, 用 $e_{0,\mathrm{r}},e_{0,\mathrm{l}}$ 和 $e_{1,\mathrm{r}},e_{1,\mathrm{l}}$, 而不是 $e_{u,\mathrm{r}},e_{u,\mathrm{l}}$ 和 $e_{v,\mathrm{r}}$, $e_{v,\mathrm{l}}$. 这时, 通常将边 $e=(u,v)\in E$ 视为有向边, 用 0 和 1 分别表示它的尾和首.

进而, 为方便起见, 引进两种运算 α 和 β, 它们实际上是 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的两类特殊的置换. 这就是对任何 $x\in\mathcal{X}(\Sigma)$, αx(或 x^{α}) $=\alpha(x)$ 表示与 x 同关联一个节点但在 x 的另一侧, βx(或 x^{β})$=\beta(x)$ 为关联的一个节点与 x 不同但与 x 在相同的侧. 因为对任何 $e\in E$ 有

$$\begin{cases}\alpha(e_{0,\mathrm{r}})=e_{0,\mathrm{l}},\ \alpha(e_{0,\mathrm{l}})=e_{0,\mathrm{r}},\\ \beta(e_{0,\mathrm{r}})=e_{1,\mathrm{r}},\ \beta(e_{0,\mathrm{l}})=e_{1,\mathrm{l}}\end{cases}\tag{11.1.5}$$

和

$$\begin{cases}\alpha\beta(e_{0,\mathrm{r}})=\beta\alpha(e_{0,\mathrm{r}}),\ \alpha\beta(e_{0,\mathrm{l}})=\beta\alpha(e_{0,\mathrm{l}}),\\ \alpha\beta(e_{1,\mathrm{r}})=\beta\alpha(e_{1,\mathrm{r}}),\ \alpha\beta(e_{1,\mathrm{l}})=\beta\alpha(e_{1,\mathrm{l}}).\end{cases}\tag{11.1.6}$$

换言之, 对任何 $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$\begin{cases} \alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \beta^2(x) = x, \\ \alpha\beta(x) = \beta\alpha(x). \end{cases} \tag{11.1.7}$$

引理 11.1.1　令

$$\Sigma_1 = \Sigma(V_1, E_1, F_1) \quad 和 \quad \Sigma_2 = \Sigma(V_2, E_2, F_2)$$

为两个多面形, $\tau : E_1 \to E_2$ 为一个双射, 则 τ 是 Σ_1 和 Σ_2 之间的一个同构当且仅当 τ 导出一个双射, 仍记为 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$, 使得如下形式:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\Sigma_1) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{X}(\Sigma_2) \\ {\scriptstyle \gamma_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} \\ \mathcal{X}(\Sigma_1) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{X}(\Sigma_2) \end{array} \tag{11.1.8}$$

对于 $(\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha, \alpha)$, (β, β) 和 (π_1, π_2) 全是可交换的, 其中 $\pi_i = \pi(\Sigma_i)(i = 1, 2)$.

证　由 τ 是 Σ_1 和 Σ_2 之间的一个同构, 对于

$$f = (a_f, b_f, c_f, \cdots) \in F_1$$

有

$$\tau(f) = (\tau(a_f), \tau(b_f), \tau(c_f), \cdots), \tag{11.1.9}$$

而且由 2.6 节中所讨论的, 对于 $v \in V$, $\varrho(v) = (a_v, b_v, c_v, \cdots)$ 有

$$\tau(\varrho(v)) = (\tau(a_v), \tau(b_v), \tau(c_v), \cdots). \tag{11.1.10}$$

可以按以下的方式, 从双射 τ: $E_1 \to E_2$ 导出双射:

$$\tau : \mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2).$$

首先, 取一个节点 $O \in V_1$ 作为始点. 设

$$\varrho(O) = (a_o, b_o, c_o, \cdots),$$

则 $\tau(\varrho(O)) = (\tau(a_0), \tau(b_0), \tau(c_0), \cdots)$. 令 $x(a_o) \in \mathcal{X}(\Sigma_1)$ 为 $a_{o,\mathrm{r}}$ 和 $a_{o,\mathrm{l}}$ 中之一, 定义

$$\tau(x(a_0)) = \begin{cases} x(\tau(a_0)), & \varrho(O) 与 \tau(\varrho(O)) 同向, \\ \alpha(x)(\tau(a_0)), & 否则. \end{cases} \tag{11.1.11}$$

然后, 用如下的规则将之延拓到整个 $\mathcal{X}(\Sigma_1)$: 若对于 $x \in \mathcal{X}(\Sigma_1)$, $\tau(x)$ 已被确定, 则定义

$$\begin{cases} \tau(\alpha x) = \alpha\tau(x), \\ \tau(\beta x) = \beta\tau(x), \\ \tau(\pi_1 x) = \pi_1\tau(x). \end{cases} \tag{11.1.12}$$

由 $G_1 = (V_1, E_1)$ 的连通性, 这个导出的双射 τ 从 α, β 和 π_1 的可延性得知, 在 $\mathcal{X}(\Sigma_1)$ 上是适定的, 而且由 (11.1.12) 式可知, (11.1.8) 式所示的形式皆为可交换的. 这就得到了必要性.

反之, 由 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$ 可导出 τ: $E_1 \to E_2$ 遵从这样的规则: 对于 $e \in E_1$, $\tau(e) \in E_2$ 相应四元胞腔

$$\{x(\tau(e)),\ \alpha x(\tau(e)),\ \beta x(\tau(e)),\ \alpha\beta x(\tau(e))\}.$$

由形式 (11.1.8), 对于 $(\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha, \alpha)$ 和 $(\beta,\ \beta)$ 是适定的. 当然 τ: $E_1 \to E_2$ 和 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$ 一样是一个双射, 进而在每一个节点 v 处在 Σ_1 上的旋, 由 $\pi(\Sigma_1)$ 上的那个右循环所确定. 由 (11.1.8) 式中 $(\gamma_1, \gamma_2) = (\pi_1, \pi_2)$ 的情形, 对于 $v \in V_1$, $\varrho(v) = (a_v, b_v, c_v, \cdots)$ 有 (11.1.10) 式. 同样, 由 1.5 节 (Liu, Y.P.[33]) 中所讨论的, 对于 $f = (a_f, b_f, c_f, \cdots) \in F_1$ 有 (11.1.9) 式, 从而 τ 是 Σ_1 和 Σ_2 之间的一个同构. 这就得到了充分性. ♮

引理 11.1.2 令 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 是一个多面形. 给定 $x, y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. 假设 τ_1 和 τ_2 是 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的两个双射, 并且它们确定了 Σ 上的两个自同构. 如果 $\tau_1(x) = \tau_2(x) = y$, 则 $\tau_1 = \tau_2$.

证 因为 $\tau_1(x) = \tau_2(x) = y$, 由引理 11.1.1 知

$$\begin{cases} \tau_1(\alpha x) = \alpha y = \tau_2(\alpha x), \\ \tau_1(\beta x) = \beta y = \tau_2(\beta x), \end{cases} \tag{11.1.13}$$

由 (11.1.8) 式,

$$\tau_1(\pi x) = \pi y = \tau_2(\pi x). \tag{11.1.14}$$

进而, 因为 Σ 的基准图 $G_1 = (V, E)$ 是连通的, 对任何 $z \in \mathcal{X}(\Sigma)$ $(z \neq y)$ 有一条由与 y 关联的边到与 z 关联的边的路. 由此, 存在一个正整数 $k > 0$, r_i, s_i, t_i $(i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \cdots, k)$, 使得

$$z = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha^{r_i}\beta^{s_i}\pi^{t_i}(y). \tag{11.1.15}$$

由 (11.1.13) 式和 (11.1.14) 式可知对任何 $z \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$\tau_1(\tilde{x}) = z = \tau_2(\tilde{x}),$$

其中

$$\tilde{x} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha^{r_i} \beta^{s_i} \pi^{t_i}(x),$$

所以, $\tau_1 = \tau_2$, 即得引理的结论. ♮

推论 11.1.1 若 τ 是 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 到它自身的一个双射, 并且导出 Σ 上的一个自同构, 使得有一个 $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$, $\tau(x) = x$, 则 $\tau = 1$, 即全同自同构. ♮

定理 11.1.1 令 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 为多面形 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 的自同构群, $\mathrm{aut}(\Sigma) = |\mathrm{Aut}(\Sigma)|$, 即群 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 的阶, $\varepsilon(\Sigma) = |E|$, 则有

$$\mathrm{aut}(\Sigma) | 4\varepsilon(\Sigma). \tag{11.1.16}$$

证 首先, 将 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中的元素按等价 $\sim_{\mathrm{Aut}}$ 分类: $\forall x, y \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$x \sim_{\mathrm{Aut}} y \Leftrightarrow \exists \tau \in \ \mathrm{Aut}(\Sigma), x = \tau y. \tag{11.1.17}$$

设在这个等价之下有

$$\mathcal{X}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{s} X(x_i), \tag{11.1.18}$$

其中 $x_i \in X(x_j)$ 当且仅当 $x_i \sim_{\mathrm{Aut}} x_j$. 然后证

$$|X(x_i)| = \mathrm{aut}(\Sigma), \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{11.1.19}$$

事实上, 对任何 $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$, 若 $\tau_1 x_i = \tau_2 x_i$, 则 $\tau_2^{-1} \tau x_i = x_i$. 因为 $\tau_2^{-1}\tau_1 \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$, 由推论 11.1.1 可知 $\tau_1 = \tau_2$. 这就是说, (11.1.9) 式成立, 而且由 (11.1.1) 式和 (11.1.2) 式知 $|\mathcal{X}(\Sigma)| = 4\varepsilon(\Sigma)$. 由 (11.1.19) 式, 即可得定理的结论. ♮

推论 11.1.2 对于任何多面形 Σ 总有 $\mathrm{aut}(\Sigma) \leqslant 4\varepsilon(\Sigma)$. 对于平面上的多面形 Σ, 其等式成立当且仅当 Σ 是 C_n, C_n^* 和 Plato 多面体中之一, 其中 C_n 为长度为 n 的圈, C^* 为由 n 条重边组成的上圈.

证 第一个结论可由定理 11.1.1 直接导出. 由与定理 4.1.1 类似的讨论, 即可得第二个结论. 其理由是等式成立当且仅当 Σ 是全正则多面形. ♮

同样地, 如 5.1 节中所讨论的, 也可容易地得到在射影平面、环面以及 Klein 瓶上自同构群的阶为 $4\varepsilon(\Sigma)$ 的多面形 Σ.

推论 11.1.3 对于 3 连通的可平面图 $G = (V, E)$ 有

$$\mathrm{aut}(G) \leqslant 4\varepsilon(G), \tag{11.1.20}$$

其中 $\mathrm{aut}(G)$ 为 G 上的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的阶, $\varepsilon(G)$ 为图 G 的度.

证 由定理 5.3.3 可知 $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(\mu G)$, 其中 $\mu(G)$ 为 G 的平面嵌入. 由推论 11.1.2, 即得推论的结论. ♮

然而, 对于图 $G=(V,E)$, 一般而论, 允许 $\mathrm{aut}(G)>4\varepsilon(\Sigma)$. 即使对可平面图, 这一不等式也是允许的. 当然这时, 它绝不会是 3 连通的.

定理 11.1.2 令 ν_i 和 φ_i 分别为多面形 Σ 中次为 i $(i\geqslant 1)$ 的节点和面的数目, 则有

$$\mathrm{aut}(\Sigma)|(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i,j,i\geqslant 1, j\geqslant 1), \tag{11.1.21}$$

其中 $(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i,j\geqslant 1)$ 为括号中所有数的最大公约数.

证 由 (11.1.8) 式, 在 Σ 上的一个自同构 τ 必须有这样的性质: 对 $x\in\mathcal{X}(\Sigma)$ 与一个次为 $i(i\geqslant 1)$ 的节点和一个次为 $j(j\geqslant 1)$ 的面关联, $\tau(x)$ 也必与一个次为 i 的节点和一个次为 j 的面关联. 也可以用规则 (11.1.1), 对于 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中与次为 i 的一个节点关联的元素分类, 然后可见所有这些类均有同样的基数, 即自同构群 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 的阶 $\mathrm{aut}(\Sigma)$. 因为在 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中与一个次为 i 的节点关联的元素数为 $2i\nu_i$, 故 $\mathrm{aut}(\Sigma)|2i\nu_i$. 类似地, 也可得 $\mathrm{aut}(\Sigma)|2j\varphi_j$. 由 $i(i\geqslant 1)$, j $(j\geqslant 1)$ 的任意性, 即得 (11.1.21) 式. ♮

依据定理 11.1.2 证明中的想法, 还可进一步考查 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中那些既与一个次为 $i(i\geqslant 1)$ 的节点, 又与一个次为 $j(j\geqslant 1)$ 的面关联的元素等, 以改进 (11.1.21) 式. 这些只好留给读者.

推论 11.1.4 对任何一个多面形 Σ 均有

$$\mathrm{aut}(\Sigma)\leqslant(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i,j\geqslant 1). \tag{11.1.22}$$

证 这是定理 11.1.2 的直接结果. ♮

推论 11.1.5 对任一 3 连通可平面图 $G=(V,E)$ 均有

$$\mathrm{aut}(G)\leqslant(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i,j\geqslant 1). \tag{11.1.23}$$

证 与推论 11.1.3 的证明类似. ♮

11.2 Euler 和非 Euler 码

在这一节, 讨论用一个 ν 进制的 $2\varepsilon+1$ 位数表示一个多面形, 其中 $\nu=\nu(\Sigma)=|V|$, $\varepsilon=\varepsilon(\Sigma)=|E|$, $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$ 为多面形.

对于一个给定的多面形 Σ, 有各种方法产生 ν 进制的 $2\varepsilon+1$ 位数以表示它, 其要旨在于对 Σ 的基准图 $G=(V,E)$ 上的确向树给以定向. 这里, 仅提供两种定向方式.

在确向树上, 第一类定向方法是尽量按照面边界上所确定的循环次序.

一个节点, 根据尚未访到或已经访过, 分别称为处于*新的*或*旧的*状态, 分别用 N 和 $\bar{N}$ 表示. 一条边被安排有三个状态: O, I 和 II. 它们分别表示这条尚未 (0 次)

访、访一次和访两次, 访两次也称为*用完*的. 当然, 总是为简便起见, 而假设多面形 Σ 的基准图是简单的, 即无环和无重边. 然而, 下面的所有结果均易于引申到更一般的情形.

FOD 过程 令 $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$ 用 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的一个置换, 如 (11.1.4) 式所表示. 对于 $v\in V$, $e\in E$, 记 $S(v,e)=(S(v),S(e))$ 为节点 v 和边 e 所处的状态. 令 $\Lambda=\{0,1,\cdots,\nu-1\}$.

启始 选一个始节点 v 达 $x(e)$. v 与 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中的一个元素 $x(e)(e\in E)$ 关联, 令 $S(v,e)=(N,O)$.

行进 1 若到节点 v 达 $x(e)\in\mathcal{X}(\Sigma)$, 并伴随 $S(v,e)=(N,O)$, 在 v 处记录 Λ 中尚未记录过的最小数, 并令 $S(v,e)=(\bar{N},I)$. 旅行边 $e=(v,u)$ 从 v 经 $x(e)$ 到 u. 当 $S(u)\neq\bar{N}$ 时, 达 $x(e_1)=\pi\alpha\beta x(e)$, 并令 $S(u,e_1)=(N,O)$ 和 $S(e)=I$; 否则, 达 $\alpha\beta x(e)$, 并令 $S(e)=I$.

行进 2 若到节点 v 达 $x(e)\in\mathcal{X}(\Sigma)$, 并伴随 $S(v,e)=(\bar{N},I)$. 记录在 v 处已被记录过的数, 并令 $S(e)=II$. 旅行边 $e=(v,u)$ 从 v 经 $x(e)$ 到 u, 达 $x(e_1)=\pi^i\alpha\beta x(e)$, 其中 i 是使得与 $\pi^j\alpha\beta x(e)$ 关联的边尚未用完的最小者, 并令

$$S(e_1)=\begin{cases}O, & e_1\text{ 尚未状态},\\ II, & \text{否则}.\end{cases}$$

终止 若所有边皆处状态 II, 并在节点 v 处记录 0, v 就是此过程的始节点.

定理 11.2.1 对于节点 v 和 $x(e)\in\mathcal{X}(\Sigma)$ 与 v 关联的选定, FOD 过程是适定的, 而且依次所记录下来的是一个首位和末位均为 0 的一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数.

证 因为 FOD 过程的执行是沿 Σ 上由面的循环次序所确定的确向树的定向, 由 3.2 节中所讨论的, 定理中的第一个结论得证. 进而, 由 FOD 过程所得到的恰为 Σ 的基准图的每一边作为二重边的图上的一个 Euler 回. 因为从一个节点沿一边到每一个节点的每一步就在一个节点处记录一次, 而且最后一次在始节点处, 其数为 0. 沿着 Euler 回所记录下来的数字, 实际上形成一个 $2\varepsilon+1$ 位数. 又每个数字至多为 $\nu-1$, 即它本身为一个 ν 进制数. 这就得到了第二个结论. ♮

用 FOD 过程所得到的那个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数, 记为

$$X=X(\Sigma)=x_1,x_2,\cdots,x_{2\varepsilon+1},$$

并称它为 Σ 的一个 F码.

第一, 由 FOD 过程可以看出, 若将 X 看成一个序列, 并依从左向右的次序, 把第一次出现的数字记下来, 则所得的即为自然数序列 $0,1,2,\cdots,\nu-1$. 具有这种性质的 ν 进制数被称为*良次序的*.

第二, 因为在 FOD 过程中每一边旅行恰两次, 在 X 中, 2ε 个相继数对可以划分为两个部分: X_1 和 X_2, $|X_1| = |X_2| = \varepsilon$. 在 X_1 和 X_2 之间有一个双射, 使得相应的对若不是相同, 则必只是次序不同. 一个具有这种性质的 ν 进制数, 被称为*良多面形的*.

第三, 由 FOD 过程中的行进 1, 在 X 中的每个相继对 $x_i x_{i+1}$, 其中 x_{i+1} 不是第一次出现的, 而且相应的相继对, 在遇到 $x_{i+2} = x_i (x_{i+2} \neq x_i)$ 之前从不出现 (出现), $2 \leqslant i \leqslant 2\varepsilon$. 这就是说, 在 x_i 处有一个反射. 当然, $x_{i+1} < x_i$. 进而, 令 $f_1 = x_1, x_2, \cdots, x_{i_1}$, 使得 $x_{i_1} = x_1$, 所有 $x_i (1 \leqslant i \leqslant i_1 - 1)$ 皆为非反射的, 由行进 1, $x_i = i - 1 (1 \leqslant i \leqslant i_1 - 1)$. 若 $f_1, f_2, \cdots, f_h$ 已经发现, 则令

$$X\langle f_1, f_2, \cdots, f_k\rangle = x_1^{(k)} x_2^{(k)} \cdots \tag{11.2.1}$$

为在 X 所确定的次序下, 由所有未在 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 中出现的相继对组成的, 并且, 令

$$f_{k+1} = \prod_{i=0}^{l} X^{(k)}(t_i, s_{i+1}), \tag{11.2.2}$$

其中

$$X^{(k)}(t_i, s_{i+1}) = x_{t_i}^{(k)} x_{t_i+1}^{(k)} \cdots x_{s_{i+1}}^{(k)}, \quad t_0 = 1, \tag{11.2.3}$$

所有 $x_{t_i+1}^{(k)}$, $x_{t_i+2}^{(k)}, \cdots, x_{s_{i+1}-1}^{(k)} (0 \leqslant i \leqslant l)$ 均为非反射的, $x_{s_i}^{(k)} = x_{t_i}^{(k)} (1 \leqslant i \leqslant l)$ $x_{s_{l+1}}^{(k)} = x_{t_0}^{(k)}$, (11.2.2) 式所示的运算按照 $X\langle f_1, \cdots, f_k\rangle$ 中的次序进行. 容易检验, 一个多面形的 F 码具有这样的性质: 存在一个正整数 φ, 使得 $f_1, f_2, \cdots, f_\varphi$ 满足 $X\langle f_1, f_2, \cdots, f_\varphi\rangle = \varnothing$. 一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数, 若具有这样的性质, 则称为*良反射的*.

一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数, 若 $0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ 均至少出现一次, 而且它是良次序的、良多面形的和良反射的, 则称之为*良满足的*. 当然, 由上面所讨论的可知, 一个多面形的任何 F 码是良满足的.

第四, 若在 X 中的一段 $x_i x_{i+1} \cdots x_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2\varepsilon)$, 使得所有 $x_l (l = i, i+1, \cdots, j)$ 均第一次出现, 则它本身必为自然序列 $0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ 中的一段, 而且如果 $x_l = x_j (2 \leqslant x_l \leqslant \nu - 1)$ 和 $x_{l+1} = x_j - 1$ 则 x_j 在 $x_l x_{l+1}$ 之后在 X 中永不出现, 即 $\forall i (i > l)$, $x_i \neq x_j$. 若一个 $2\varepsilon + 1 (\varepsilon \geqslant \nu - 1)$ 位的 ν 进制数具有这种性质, 则称之为*良分配的*.

引理 11.2.1 任何一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数 $Z = z_1 z_2 \cdots z_{2\varepsilon+1}$, 若 Z 是良满足的, 则 Z 必是良分配的.

证 因为 $0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ 中的每个在 Z 中都至少出现一次, 由良次序性, 任何一段 $z_i z_{i+1} \cdots z_j$ 使得所有 $z_l (i < l < j)$ 为 Z 中第一次出现者, 均组成自然序列

的一段, 而且从良反射性和良多面形性, 即可得 Z 的良分配性. ♮

一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数 $X=x_1,x_2\cdots,x_{2\varepsilon+1}$, 如果它是良次序的, 而且可以通过收缩所有可能的段

$$x_{i-1}x_ix_{i+1},\quad x_i<x_{i-1}=x_{i+1},\ 2\leqslant i\leqslant 2\varepsilon$$

为一位 $x(=x_{i-1}=x_{i+1})$, 这就相当于把 X 作为一个单面形去掉所有 X 中的反射边, 而得到一个 $2\nu+1$ 位的 ν 进制数, 形成一个确向树的平面嵌入, 则称 X 为完全可收缩的.

引理 11.2.2　一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数是良满足的当且仅当它是完全可收缩的.

证　由良反射性, 收缩所有的 $x_{i-1}x_ix_{i+1}(x_i<x_{i-1}=x_{i+1},2\leqslant i\leqslant 2\varepsilon)$ 均变为一位数 $x=x_{i-1}(=x_{i+1}$ 同样地), 从而得到的就是一个 $2\nu-1$ 位的 ν 进制数, 而且它是良次序的和良多面形的. 事实上, 从良多面形性可知它本身即为一个树在平面上的嵌入. 因此, 由良次序性, 它是一个确向树的平面嵌入. 必要性得证.

反之, 由完全可收缩性, 容易验证充分性. ♮

定理 11.2.2　一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数 X 是一个每边恰与两个面关联的多面形的 F 码当且仅当它是良满足的.

证　由上面所讨论的, 必要性显然.

反之, 根据良满足性有

$$\Sigma=(f_1,f_2,\cdots,f_\varphi)\tag{11.2.4}$$

由 (11.2.1)~(11.2.3) 式所确定, 并且为一个多面形. 在它上按照 FOD 过程所得的 F 码就是 X. 这就得到了充分性. ♮

进而, 由引理 11.2.2 即可得一个 $2\varepsilon+1$ 位 ν 进制数是某个多面形的 F 码的一个表征. 据此, 可以方便地设计一个线性时间算法, 以利用计算机识别.

定理 11.2.3　一个 $2\varepsilon+1$ 位 ν 进制数 X 是某个每边均恰与两个面关联的多面形的一个 F 码当且仅当它是完全可收缩的. ♮

例如, 下面的 25 位 8 进制数:

$$X_1=\underbrace{012345(0}_{f_1}\overbrace{0)567(4}^{f_2}\underbrace{4)7(2}_{f_3}\overbrace{2)76(1}^{f_4}\underbrace{1)654}_{f_3}\overbrace{4)3(0}^{f_2}\overbrace{0)3(2}^{f_4}\underbrace{2)(1}_{f_3}\overbrace{1)0}^{f_4}$$

就是良满足的, 并伴随 (f_1,f_2,f_3,f_4) 如下:

$$f_1=(0,1,2,3,4,5),\quad f_2=(0,5,6,7,4,3),$$
$$f_3=(4,7,2,1,6,5),\quad f_4=(2,7,6,1,0,3),$$

其中以及随后, $(xx)(x=0,1,2,\cdots)$ 表示一位数 x, 以便识别 $f_1,f_2,\cdots,f_\varphi$. 由定理 11.2.2, X_1 是一个多面形的 F 码. 事实上, 如图 11.2.1(a) 所示, 它是在环面上的 (3.6) 多面形的一个 F 码.

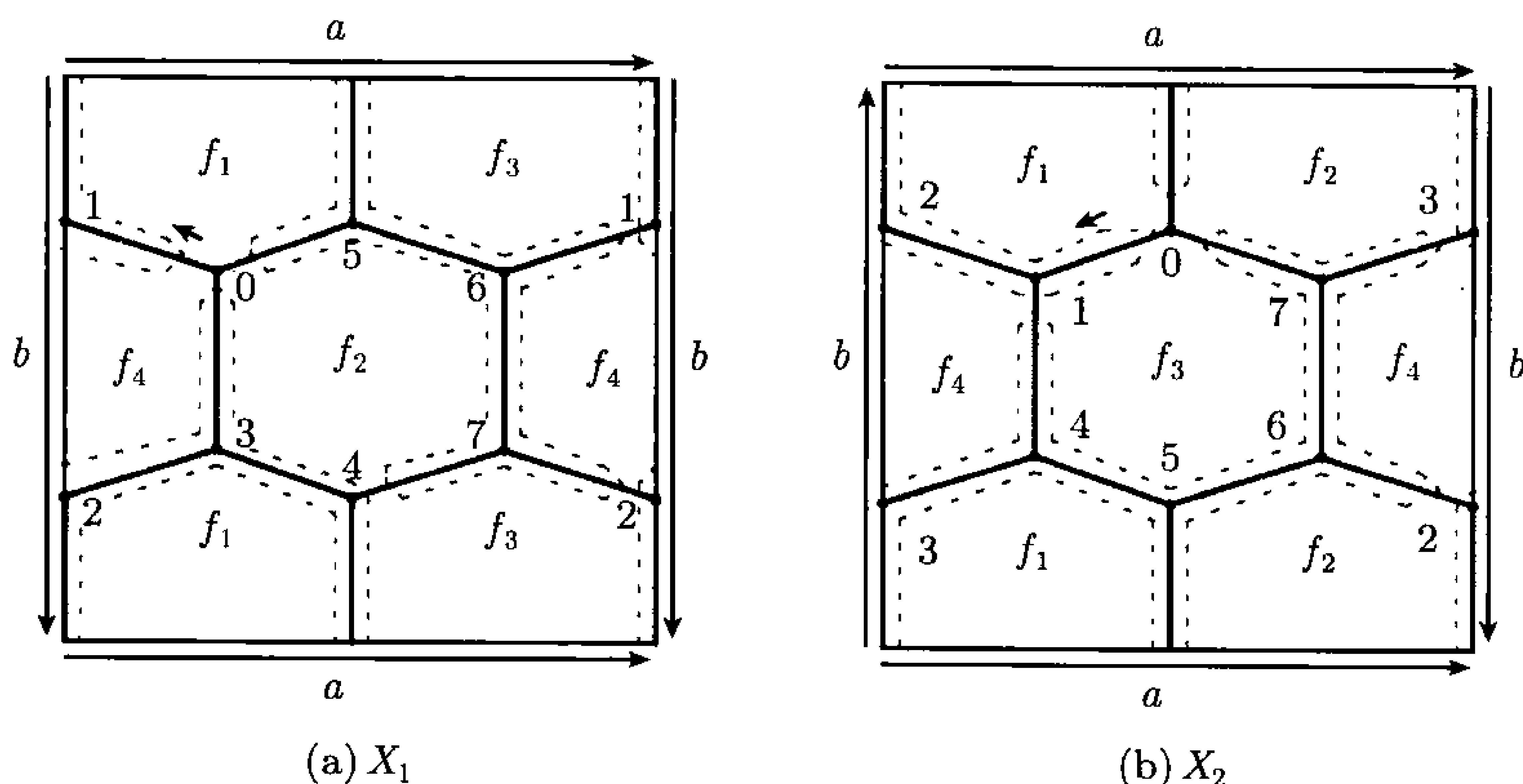


图 11.2.1

同时, 下面的 25 位的 8 进制数:

$$X_2=\underbrace{012345(0}_{f_1\to}\overbrace{0)56(2}^{f_2\to}\underbrace{2)67(3}_{f_4\to}\overbrace{3)7(0}^{f_3\to}\underbrace{0)7654(1}_{f_3\to}\underbrace{1)4(3}_{f_4\leftarrow}\overbrace{3)(2}^{f_2\leftarrow}\underbrace{2)(1}_{f_4\leftarrow}\underbrace{1)0}_{f_3\to}$$

也是良性满足的, 伴随 (f_1,f_2,f_3,f_4) 如下给出:

$$f_1=(0,1,2,3,4,5),\quad f_2=(0,5,6,2,3,7),$$
$$f_3=(0,7,6,5,4,1),\quad f_4=(2,6,7,3,4,1).$$

由定理 11.2.2, X_2 同样是一个多面形的 F 码. 事实上, 它也是 (3.6) 多面形的一个 F 码, 不过它是在 Klein 瓶上, 如图 11.2.1(b) 所示. 这里, 在 X_2 上下方 $f_i(i=1,2,3,4)$ 旁的箭头标示了在 f_i 中的走向. 在不可定向曲面上, 这是必需的, 以免与可定向的情形混淆.

另一方面, 若用定理 11.2.3, 只是判定 X_1 和 X_2 是否为一个多面形的 F 码, 由于它们皆完全地可收缩的, 即可得知 X_1 和 X_2 均为某多面形的 F 码.

多面形 $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$ 的一个码, 如果它是由 Σ 的基准图 $G=(V,E)$, 使每边变二重边通过求一个 Euler 回所确定, 则称之为 Euler的; 否则, 称为非Euler的. 当然, 凡多面形的 F 码皆为 Euler 的. 也可引进一个多面形的非 Euler 码.

也许人们会想到 FOD 过程的对偶形式, 依多面形对偶的观点, 姑且称之为 VOD过程, 用它求出多面形的另外的码, 或称它为 V码. 不过, 还是建立一个所谓

St 过程, 以求一个多面形的一个 St 码. 当然, 它不再是 Euler 码. 令 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 为一个多面形. G 为它的基准图. F 为它的面集. 对于 $v \in V$, 设

$$\sigma_v = ((v, u_1), (v, u_2), \cdots, (v, u_k)) \tag{11.2.5}$$

为在 v 处的旋, 则记

$$\pi(v) = (u_1, u_2, \cdots, u_h) \tag{11.2.6}$$

为一个循环, 或者说, $u_i\pi(v) = u_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, h)$ 和 $u_{h+1} = u_1$. 当然,

$$N(v) = \{u_1, u_2, \cdots, u_h\},$$

即 v 的邻域. 若 v 用数字 i 表示, 则可记

$$\pi(v) = \pi_i, \quad i \in \Lambda = \{0, 1, 2, \cdots, \nu - 1\}. \tag{11.2.7}$$

St 过程 随着这个过程一步一步地用 Λ 中的数标记节点, 并确定一个次序. 一条边 e, 若访过两次, 则记为 $S(e) = \bar{N}$. 一个节点 v, 若所有与 v 关联的边均访过, 则记 $S(v) = \bar{N}$.

启始 选一节点 v, $\pi(v) = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$, 令 v 为标 0 的节点, 即 $n(v) = 0$. 取

$$\begin{cases} \pi_0 = (1, 2, \cdots, k), \\ f(i) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, k, \ k = \rho(v), \\ n(u_i) = i, \ i = 1, 2, \cdots, k, \\ S(0) = \bar{N}, \\ \Lambda = \Lambda - \{0, 1, 2, \cdots, k\}. \end{cases}$$

记录 $0\pi_0 = 0(123\cdots k)$.

行进 设 $S(i) = \bar{N}(i = 0, 1, 2, \cdots, l-1)$, $\pi(l) = (u_1, u_2, \cdots, u_s)$, 则取

$$\pi_l = (f(l), i_1, i_2, \cdots, i_{s-1}), \quad S(l) = \bar{N},$$

其中对于 $j = 1, 2, \cdots, s-1$,

$$\begin{cases} i_j = n(u_{j-1}), f(i_j) = l, S((l, i_j)) = \bar{N}, \\ i_j = m = \min\{i | \forall i \in \Lambda\}, n(i_j) = m, \Lambda = \Lambda - m, \end{cases}$$

u_{j-1} 已标上数, 否则.

记录 π_l 得 $0\pi_0\pi_1\cdots\pi_{l-1}\pi_l$.

终止 当 $\nu - 1$ 已用来标节点, 而且所有的边和所有节点都处于状态 $\bar{N}$, 则过程终止.

自然可以看出, 过程结束所记录下来的, 或者说, 所得的 St 码也是一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数. 事实上, 即

$$0\pi_0\pi_1\pi_2\cdots\pi_{\nu-1}. \tag{11.2.8}$$

用与对于 F 码类似的思路, 也可以求得一个 $2\varepsilon+1$ 位 ν 进制数为一个多面形的 St 码的表征. 篇幅所限, 只能留给读者细究. 也许有人想看一下图 11.2.1(a) 与图 11.2.1(b) 中所提供的多面形的 St 码是怎样的. 前者的 St 码为

$$0(123)(045)(064)(065)(172)(173)(237)(456).$$

由此可以求得多面形的面如下:

$$f_1=(1,0,2,6,3,5),\quad f_2=(2,0,3,6,7,4),$$
$$f_3=(3,0,1,4,7,5),\quad f_4=(4,1,5,7,6,2),$$

如图 11.2.2(a) 所示.

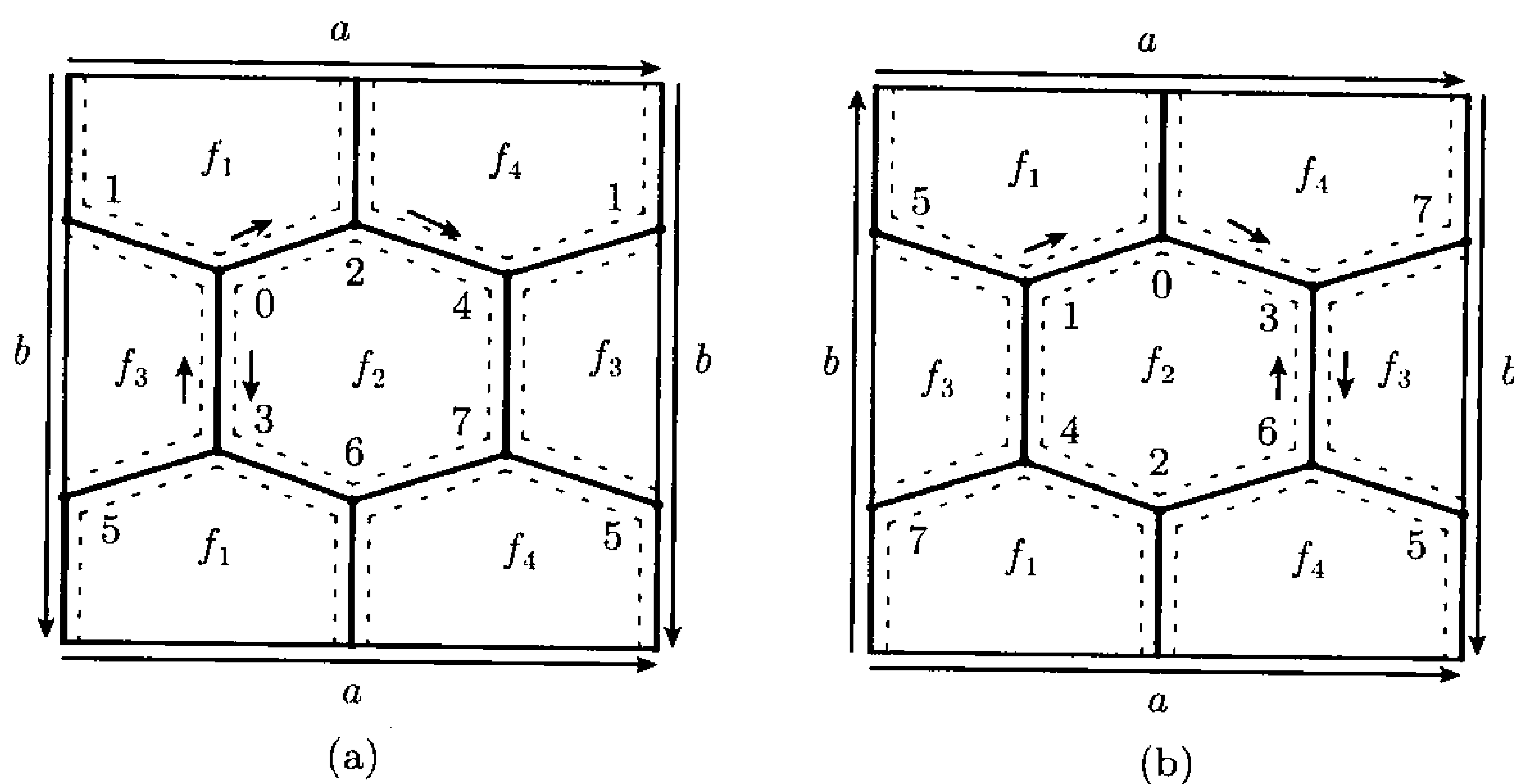


图 11.2.2

后者的 St 码为

$$0\ (123)\ (045)\ (046)\ (076)\ (127)\ (167)(2\overbrace{35}^{\leftarrow})\ \underbrace{(3\overbrace{54}^{\leftarrow})}_{\rightarrow},$$

其中若在第 $i+1$ 个括号内有 $\overbrace{x\cdots y}^{\rightarrow}$ 或 $\underbrace{x\cdots y}_{\rightarrow}$, 则在面边界中有 $xiy(i=0,1,\cdots,\nu-1)$ 为一段. 由此可得它的面应为

$$f_1=(1,0,2,4,7,5),\quad f_2=(3,0,1,4,2,6),$$
$$f_3=(3,7,4,1,5,6),\quad f_4=(6,2,0,3,7,5),$$

如图 11.2.2(b) 所示. 不管怎样, 在不可定向的情形, 如上所示在某些节点处与旋反序的情况必发生, 如箭头所示.

11.3　同构的确定

由 11.2 节中对于多面形的码所讨论的, 自然使得想到用同一类型的 Euler 码确定两个多面形是否同构. 然而, 一般来说, 一个多面形的两个相等的码, 即使对于平面的情形, 也不能确定它的一个自同构. 例如, 在图 11.3.1 中所示的就是这种情形. 这就建议我们寻求这样的条件, 使得至少对于平面的多面形有这样的性质: 用同一过程, 如 11.2 节中的 FOD 过程或 St 过程, 所得到的两个相等的码确定它的一个自同构.

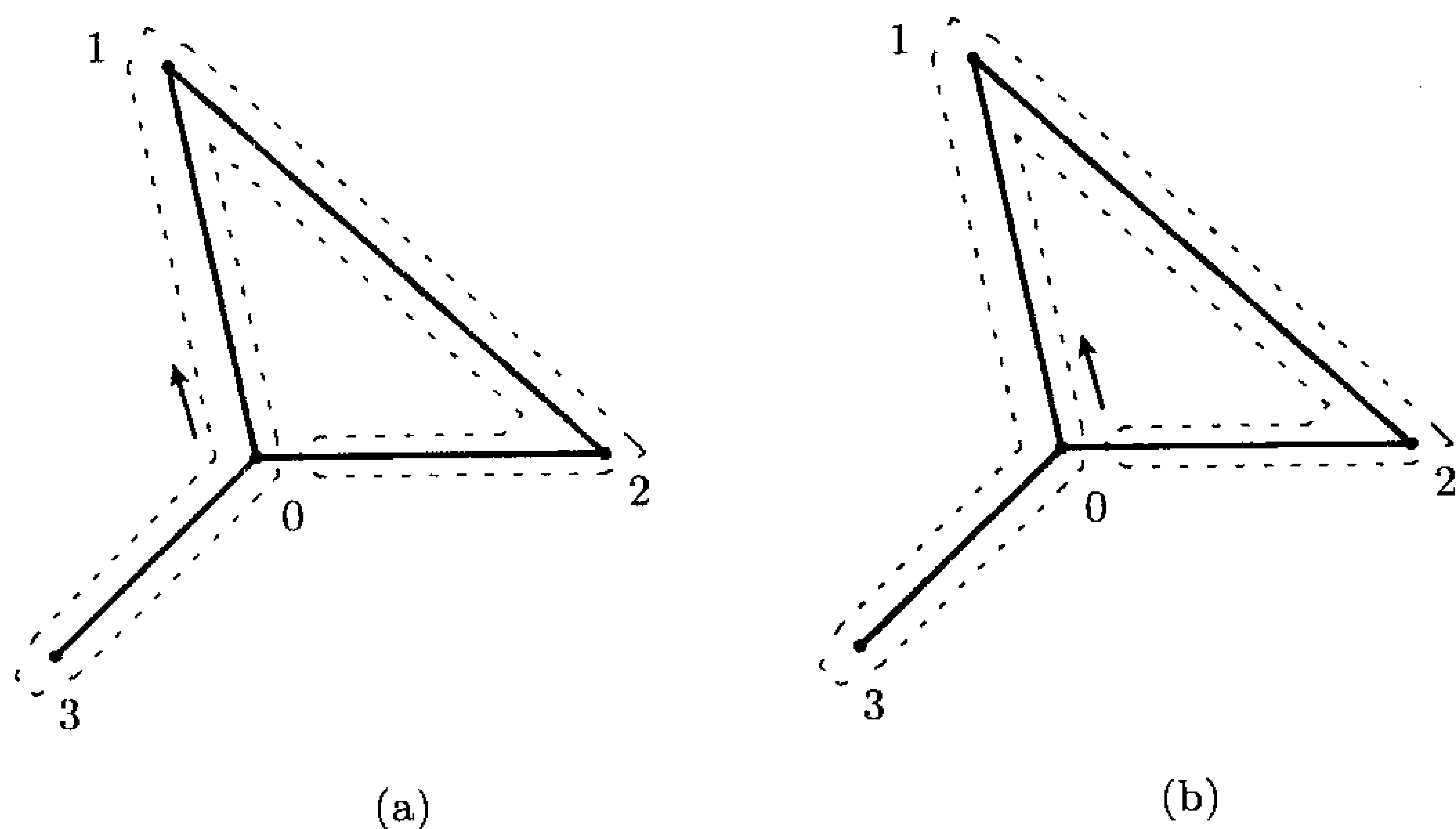


图 11.3.1

一个多面形, 对于它的一类码, 若任何两个相等的码均导致它的一个自同构, 使得始半边相对应, 则称这个多面形对这类码是*同步的*. 若一个多面形对于 F 码是同步的, 就简称为 *F同步的*. 对于一个多边形, 若在一个面的边界上, 没有一个节点与此边界上的至少三条边关联, 则称这个面为*简单的*.

引理 11.3.1　一个基准图 $G(\Sigma)$ 非树的多面形 Σ 是 F 同步的当且仅当其所有面均为简单的.

证　因为假若在 Σ 上, 有一个面不是简单的, 则必存在一个圈为此面边界所导出的图的真子图. 根据图 11.3.1 中所示的类似的理由可知 Σ 绝不会是 F 同步的. 这就导致必要性成立.

反之, 根据 Σ 的每一个面的简单性, 由一个 F 码用 11.2 节中的方法确定的面集与另一个码所确定的面集是相同的. 则由 FOD 过程对于始节点和一条与始节点关联的始边的一侧, 或者说, 始半边的唯一性, 即可导出 F 同步性. 这就得到了充

分性.

如果 X 是多面形 Σ 的一个 F 码, 则令 $x(X)$ 为沿 X 的走向所经过每一个四元脆腔中同向半边的序列, $\tilde{x}(X)$ 为 $x(X)$ 的共轭, 即

$$\tilde{x}(X)=\beta x(X), \tag{11.3.1}$$

其中 β 如 (11.1.5) 所定义. 称 $x(X)$ 和 $\tilde{x}(X)$ 分别为 X 的迹和共轭迹.

在图 11.3.2(a) 中, F 码

$$X_1=01230313210$$

的迹 $x(X_1)$ 和共轭迹 $\tilde{x}(X_1)$ 如下:

$$\begin{cases} x(X_1)=(x_1,x_4,x_5,x_2,\alpha\beta x_2,x_3,\alpha\beta x_3,\alpha\beta x_5,\alpha\beta x_4,\alpha\beta x_1), \\ \tilde{x}(X_1)=(\beta x_1,\beta x_4,\beta x_5,\beta x_2,\alpha x_2,\beta x_3,\alpha x_3,\alpha x_5,\alpha x_4,\alpha x_1). \end{cases}$$

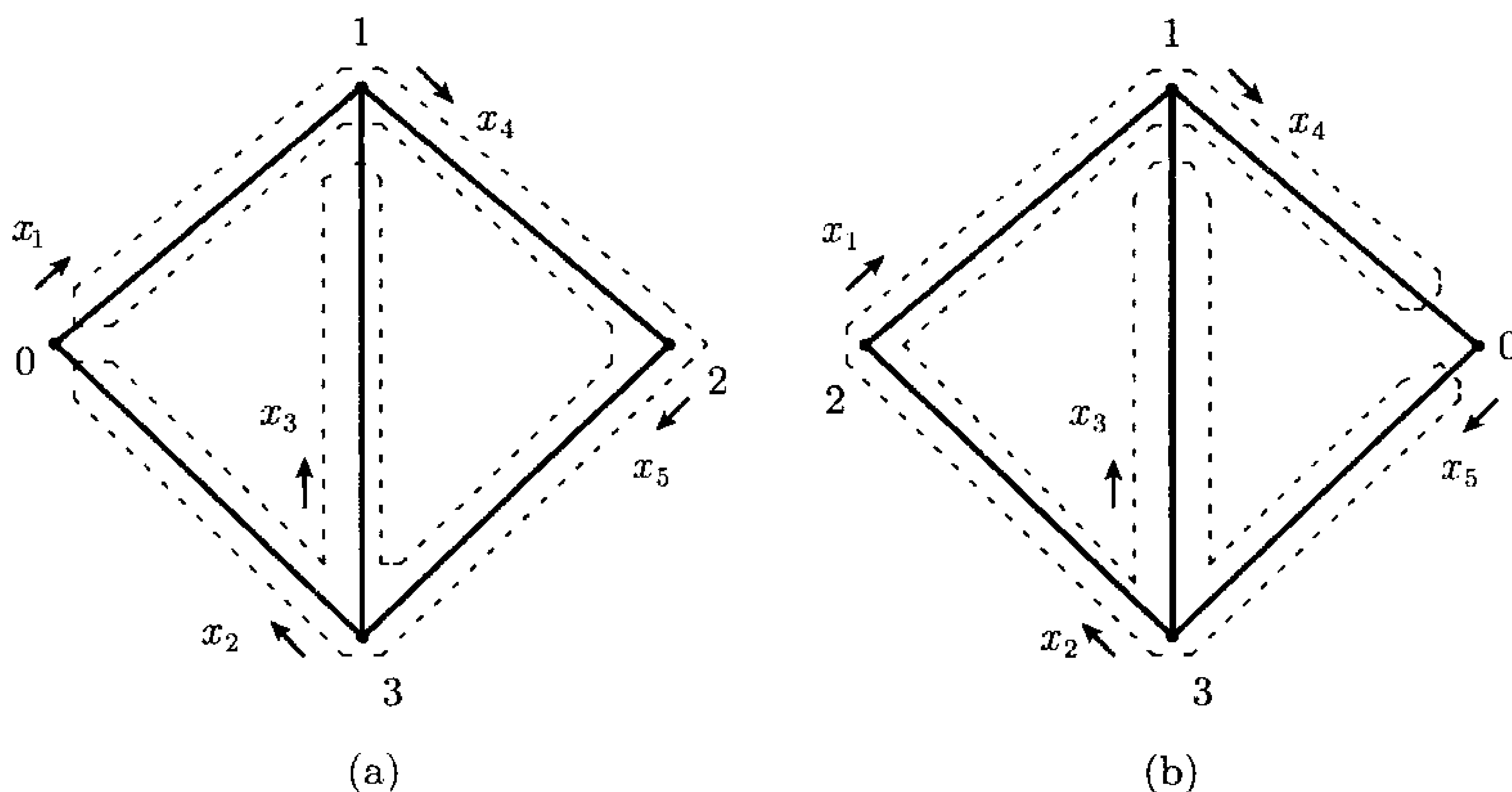


图 11.3.2

在图 11.3.2(b) 中, F 码

$$X_2=01230313210=X_1$$

的迹 $x(X_2)$ 与共轭迹 $\tilde{x}(X_2)$ 如下:

$$\begin{cases} x(X_2)=(\beta x_4,\beta x_1,\beta x_2,\beta x_5,\alpha x_5,\alpha x_3,\beta x_3,\alpha x_2,\alpha x_1,\alpha x_4), \\ \tilde{x}(X_2)=(x_4,x_1,x_2,x_5,\alpha\beta x_5,\alpha\beta x_3,x_3,\alpha\beta x_2,\alpha\beta x_1,\alpha\beta x_4). \end{cases}$$

引理 11.3.2 对于一个 F 同步的多面形, 若它的一个 F 码在它的所有 4ε 个 F 码中出现 k 次, 则它的任何一个 F 码均出现 k 次.

证　设 X_1 为多面形 Σ 的一个 F 码, X_1 在所有 4ε 个 F 码中出现 k 次. 令相应的 k 次出现的迹为

$$x_i(X_1) = (s_1^i, s_2^i, \cdots, s_{2\varepsilon}^i), \quad i = 1, 2, \cdots, k, \tag{11.3.2}$$

它们的共轭为

$$\tilde{x}_i(X_1) = (\tilde{s}_1^i, \tilde{s}_2^i, \cdots, \tilde{s}_{2\varepsilon}^i) = (\beta s_1^i, \beta s_2^i, \cdots, \beta s_{2\varepsilon}^i), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{11.3.3}$$

进而, 令 $\tau_i : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$, 使得

$$\tau_i(s_j^1) = s_j^i(\tau(\tilde{s}_j^1) = \tilde{s}_j^i), \quad i = 1, 2, \cdots, k, j = 1, 2, \cdots, 2\varepsilon. \tag{11.3.4}$$

当然, τ_1 就是全同双射, 或者说, $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 中的幺元.

断言 1　所有 $\tau_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 皆为 Σ 上的自同构.

证　由 F 同步性和用 FOD 过程产生 F 码, 对于给定始节点和始半边的唯一性有

$$\begin{cases} \tau_i(\alpha x) = \alpha\tau_i(x), \\ \tau_i(\beta x) = \beta\tau_i(x), \\ \tau_i(\pi x) = \pi\tau_i(x), \end{cases} \tag{11.3.5}$$

其中 $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 由引理 11.1.1 即得断言的结论. ♮

断言 2　$\Gamma = \{\tau_i | i = 1, 2, \cdots, k\} = \mathrm{Aut}(\Sigma)$, 即 Σ 的自同构群.

证　首先, 证明对任何 $i, j(1 \leqslant i, j \leqslant k)$, 存在 $t(1 \leqslant t \leqslant k)$, 使得

$$\tau_t = \tau_j\tau_i. \tag{11.3.6}$$

事实上, 由 $\tau_i(s_1^1) = s_1^i$ 和假设 $\tau_j(s_1^i) = s$ 有

$$\tau_j\tau_i(s_1^1) = s. \tag{11.3.7}$$

然而, 由断言 1, $\tau_j\tau_i$ 必也为 Σ 上的一个自同构. 由 F 码对于始半边 s 的唯一性, 则存在 t, 使得 $s = s_1^t(1 \leqslant t \leqslant k)$, 从而得 (11.3.6) 式.

然后, 证明对任一个 Σ 上自同构 τ, 存在一个 $t(1 \leqslant t \leqslant k)$, 使得 $\tau = \tau_t$. 假设 $\tau(s_1^1) = s$. 由于从 s_1^1 出发的 F 码记为 X_1, τ 是 Σ 上的一个自同构, 故从 s 出发的 F 码也为 X_1. 这就是说, 存在一个 $t(1 \leqslant t \leqslant k)$, 使得 $s = s_1^t$, 从而 $\tau = \tau_t$. ♮

由上述两个断言, 引理 11.3.2 即被导出. ♮

引理 11.3.2 使得能够通过利用 F 码来判断两个 F 同步的多面形是否同构. 同时, 其证明过程也使得能够求出一个 F 同步的多面形, 进而更一般的多面形的自同构群. 甚至由引理 11.3.2 还使得在研究 Σ 上的自同构时, 只考虑其 F 码的始半边

的对应就够了. 例如, 在图 11.3.2 中, 那个多面形的每个 F 码在它的所有 4ε 个 F 码中均出现 4 次, 共有 5 个互不相同的 F 码, 其中每个均可用一个由 4 个半边作为始半边的集合表示, 则有

$$\begin{array}{ll}\{x_1,\beta x_4,x_5,\beta x_2\}, & \{\beta x_1,x_4,\beta x_5,x_2\},\\ \{x_3,\alpha x_3,\beta x_3,\alpha\beta x_3\}, & \{\alpha x_1,\alpha\beta x_4,\alpha x_5,\alpha\beta x_2\},\\ \{\alpha\beta x_1,\alpha x_4,\alpha\beta x_5,\alpha x_2\}. & \end{array}$$

因此, 这个多面形的自同构群是 4 阶的.

引理 11.3.3 两个 F 同步多面形 Σ_1 和 Σ_2 是同构的当且仅当 Σ_1 有一个 F 码与 Σ_2 的一个 F 码相等.

证 由于 F 同步性, 充分性显然. 这里只证必要性.

因为 Σ_1 与 Σ_2 是同构的, 可设 τ 是它们之间的一个同构. 令 $x\in\mathcal{X}(\Sigma_1)$ 和 $y\in\mathcal{X}(\Sigma_2)$ 为在 τ 之下相应的两个半边, 则根据 F 码对于始半边的唯一性, 即得在 Σ_1 上的以 x 为始半边的 F 码与 Σ_2 中的以 y 为始半边的 F 码相等. 这就是必要性. ♮

由引理 11.3.2 可以看出, 两个 F 同步的多面形是同构的当且仅当 Σ_1 和 Σ_2 中所有 F 码的集合是相同的. 换句话说, 若称由一个多面形的所有 F 码依 ν 进制数值的非降次序排出的序列为它的 *F表*, 则由上面的一些引理即知两个 F 同步的多面形是同构的当且仅当它们的 F 表是相同的.

下面通过引进一些标记到一个多面形的 F 码的一些段上, 以区别它的不同的面. 将这种带标记的 F 码称为 *Fr码*. 然后证明对于 Fr 码, 任何多面形均是同步的, 并称为 *Fr同步的*.

若一个多面形的 F 码按如下的方式予以处理: 将其上代表同一面边界的段标以相同的记号, 在不同面边界上的段标的记号不同, 带这种标记的 F 码就是 Fr 码. 在图 11.3.1(a) 和图 11.3.1(b) 中提供的 F 码是相同的, 即

$$X=0\;1\;2\;0\;2\;1\;0\;3\;0,$$

但它们分别有 Fr 码 X_1 和 X_2 如下:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1=\underbrace{012(0}_{f_1}\overbrace{0)21(0}^{f_2}\underbrace{0)30}_{f_1},\\[2ex] X_2=\underbrace{012(0}_{f_1}\overbrace{0)21(00)30}^{f_2}. \end{array}\right.$$

如果两个 Fr 码不仅作为 ν 进制数相等, 而且带有的标记也可以采用相同的, 则称它们是全同的.

引理 11.3.4　所有多面形皆为 Fr 同步的.

证　因为对于一个多面形的 Fr 码, 带有相同标记的段形成一个面的边界, 这个多面形的面集是由 Fr 码唯一决定的, 故不同的 Fr 码不可能从它们的始半边的对应导出其多面形的一个自同构. 这就得到了引理的结论. ♮

引理 11.3.4 使得能够将引理 11.3.2 和引理 11.3.3 基于 Fr 码推广到一般多面形, 而不再加同步性的限制.

引理 11.3.5　若一个多面形的某 Fr 码出现 k 次, 则它的每个 Fr 码均在所有 4ε 个 Fr 码中出现 k 次.

证　由引理 11.3.4 和引理 11.3.2, 即可得引理的结论. ♮

对于多面形 Σ_1 的一个 Fr 码 X_1, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 为 4ε 个 Fr 码中所有与 X_1 全同的. 令 τ_i 为由 X_1 和 X_i 使得二者始半边对应所确定的 Σ 上那个自同构. 当然, τ_1 是全同的. 由引理 11.3.5, 集合 $\{\tau_i|i=1,2,\cdots,k\}$ 并不依赖 X_1 的选择, 其中, k 被称为这个多面形 Σ 的对称乘子.

引理 11.3.6　一个多面形 Σ 的自同构群为

$$\text{Aut}\ (\Sigma)=\{\tau_i|i=1,2,\cdots,k\}, \tag{11.3.8}$$

其中 k 为 Σ 的对称乘子.

证　由与引理 11.3.2 证明中类似的理由, 即可得引理的结论. ♮

根据引理 11.3.6 还可得如下引理:

引理 11.3.7　两个多面形 Σ_1 和 Σ_2 是同构的当且仅当在 Σ_1 上有一个 Fr 码与 Σ_2 的某 Fr 码是全同的.

证　与引理 11.3.3 的证明类似. ♮

若在 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上定义一个线性序, 如在每一个节点处, 选定一个半边 x 作为第一个, 首先从 x 开始沿左旋, 然后从 αx 开始沿右旋. 当然, 若两个半边与不同的节点关联, 则它们间的次序与代表节点的数的自然序一致. 这样, 根据 Fr 码作为一个 ν 进制数的非降次序, 如果相等, 则依它们的始半边的次序, 可以将所有 Fr 码排个线性序, 称之为这个多面形的 Fr 表.

定理 11.3.1　两个多面形 Σ_1 和 Σ_2 是同构的当且仅当它们有相同的 Fr 表.

证　这是引理 11.3.6 和引理 11.3.7 的直接结果. ♮

可以构造很多类型的码以表示多面形. 人们也许想看一下如何从多面形的其他类型的码出发, 沿着由 F 码到 Fr 码的思路, 得到与定理 11.3.1 类似的结果. 这些都只能留给读者.

11.4 注　记

(1) 可平面图的码是于 20 世纪 60 年代由 Weinberg 引进的, 参见文献 (Weinberg, L.[3,5]). 据此, 他得到了 3 连通可平面图的自同构群的最大阶 (Weinberg, L.[1]). 同时, 他也给出了判定两个 3 连通可平面图是否同构的一个有效算法 (Weinberg, L.[4,6]). 然而, 基于本章中的讨论, 可以使我们得到一般的可平面图, 不一定是 3 连通的有关结果.

(2) 也可以通过将非可平面图嵌入到曲面上的办法判定更一般的图之间是否同构, 不一定是可平面的图. 然而, 其有效性当然与一个图在一个曲面上的不同嵌入数密切相关.

(3) 在 20 世纪 70 年代, Hopcroft 和 Tarjan 对 3 连通可平面图判定同构与否也曾提供过算法. 不过, 他们的算法主要依赖于数据的结构, 参见文献 (Hopcroft, J.-R. Tarjan[2, 3]).

(4) Hopcroft 和 Wong 曾建议一系列的运算, 以简化判定 3 连通可平面图是否同构的手续, 以便求得更为有效的算法, 参见文献 (Hopcroft, J.E.-J.K. Wong[1]). 这里, 我们有理由建议利用定理 11.1.2 以及类似的方式, 进一步得到的也许为此目的更为有效.

(5) 在可平面的情形, 允许利用平面性辅助图和模 2, 或布尔方程的解, 以检验它们之间是否同构, 参见文献 (Liu, Y.P.[1,23, 24], Wu, W.T.[2]).

(6) 码还曾用于平面地图的计数, 参见文献 (Cori, R.[1], Cori, R.-A. Machi[1]).

(7) 更简单易行判定图嵌入同构的算法, 并且由此可便利地确定一个图嵌入的自同构群, 参见文献 (Liu, Y.P.[35,36,46]).

第12章 图的分解

12.1 二连通分解

虽然将一个图分解为块, 或者说不可分离片, 或者说二连通片 (2 连通片), 当图限制为简单的, 正如这里所约定的, 有多种途径. 这里却以一种新的方式, 通过利用在第 6 章和第 8 章中所引进的平面性辅助图给出了二连通片的表征.

令 $G=(V,E)$ 是一个图, $T_{\rm od}$ 为 G 上的一个确向树, 如 3.2 节所述. 为方便起见, 这里利用 6.4 节中所定义的平面性 1 辅助图. 当然, 为降低计算复杂性, 在 6.3 节中引进的平面性 0 辅助图和在 8.3 节中引进的平面性 2 辅助图, 也可以类似地用来刻画双连通片.

令 $H=\mathrm{Aux}_1(G;T_{\rm od})$ 为 G 的对于确向树 $T_{\rm od}$ 的一个平面性 1 辅助图, 对于任何一个上树边 α, 总是视为 H 的节点. 令 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 分别为 α 的首和尾. 因为在 V 上由确向树 $T_{\rm od}$ 引入一个偏序集, 并且一个上树边的首与尾在这个偏序之下总是可比较的, 可以定义上树边总是由大到小的方向. 同时, 树 $T_{\rm od}$ 上的边总是由小到大, 而且还可以在上树边集上, 或者说, 在 H 的节点集上, 引进两类偏序. 一个是根据首, 另一个是根据尾, 在 V 上的偏序之下确定前者不共首, 后者不共尾的上树边的序. 对前者情形下共首的上树边的序, 或后者情形下共尾的上树边的序, 则要根据在 G 的每一节点事先规定的与之关联边的线性序所决定. 为方便起见, 只用 $\preceq$ 表示所有的这些偏序, 以自然的方式而不加特别说明.

对每一个节点 $\alpha\in V(H)$, 令 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 作为相应上树边的首与尾, 并且记

$$\begin{cases} A(S)=\{h(\alpha)|\forall\alpha\in S\}, \\ B(S)=\{b(\alpha)|\forall\alpha\in S\}, \end{cases} \tag{12.1.1}$$

其中 $S\subset V(H)$. 若 S 是 H 的一个子图 H_1 的节点集, 也可以用 $A(H_1)$ 和 $B(H_1)$ 分别代替 $A(S)$ 和 $B(S)$.

引理 12.1.1 令 α 和 β 为对于确向树 $T_{\rm od}$ 的 G 中两条上树边. 若 α 和 β 在 G 的不同的二连通片中, 则它们在 H 的不同的连通片中.

证 用反证法. 设 α 和 β 在 H 的同一连通片中, 而且同时 α 和 β 分别在 G 的两个不同的二连通片 G_1 和 G_2 中.

因为 α 和 β 在 H 的同一连通片中, 在 H 中有一条连 α 和 β 的路 $P(\alpha,\beta)$. 由 6.4 节中所述的 H 的结构可知在 G 中, 存在一个圈的序列 $C_1,C_2,\cdots,C_k$, 使得

$\alpha \in C_1$ 和 $\beta \in C_k (k \geqslant 2)$, 并且 $C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 这就是说, α 和 β 必在 G 的同一个二连通片上. 与假设的条件矛盾. ♮

由引理 12.1.1 可知, 为确定图 G 的二连通片, 只需讨论 H 的连通片. 当然, 绝非图 G 的每个二连通片均恰对应 H 的一个连通片. 如图 12.1.1(a) 所示, 图 G 本身就是一个二连通片. 然而, 如图 12.1.1(b) 所示, G 的平面性 0 辅助图 H 却有三个连通片. 在图 12.1.1(a) 中, 粗线表示确向树 T_{od}.

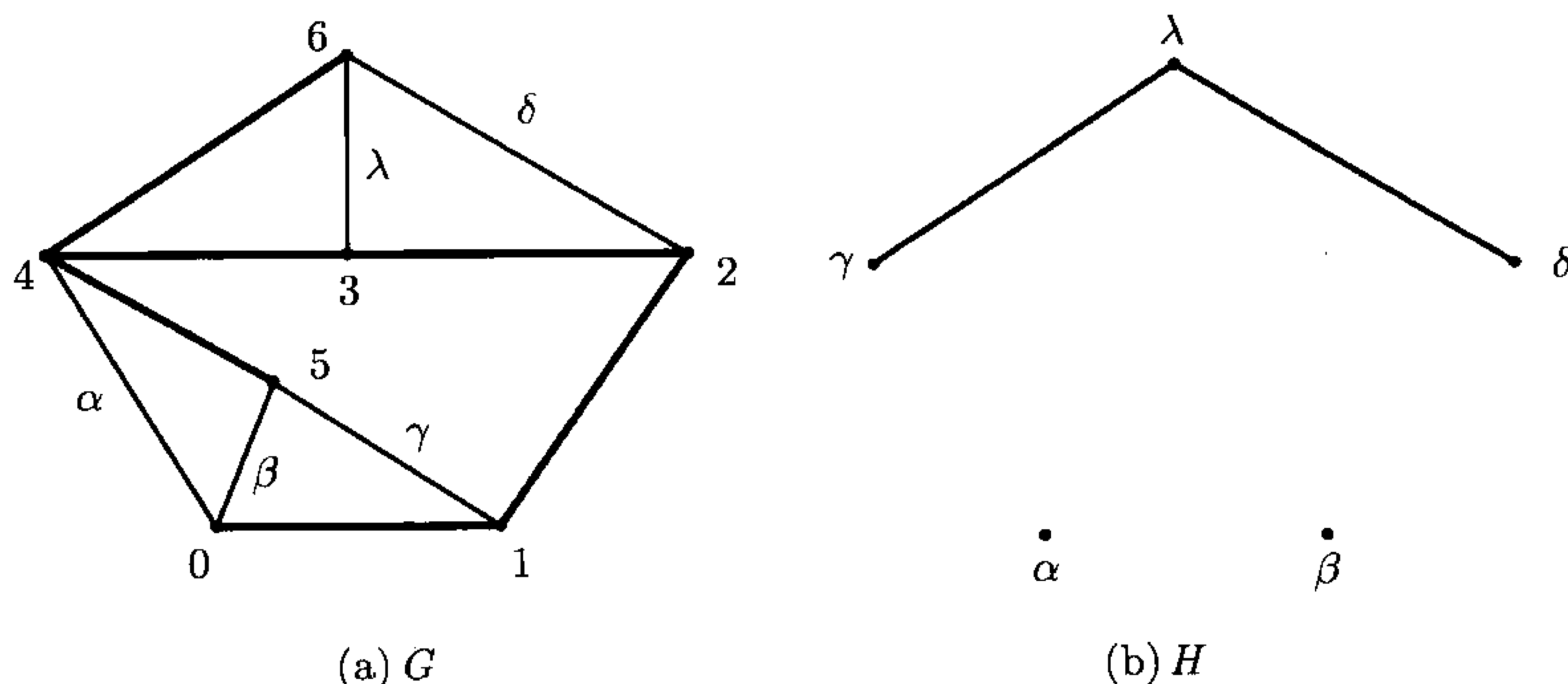


图 12.1.1

引理 12.1.2 对于任何两条上树边 α 和 β, 它们相应的基本圈 C_α 和 C_β 在 G 的同一个二连通片上当且仅当对确向树 T_{od},

$$\max(h(\alpha_0), h(\beta_0)) \prec \inf\{t(\alpha), t(\beta)\}, \tag{12.1.2}$$

其中对于 $\gamma = \alpha$ 和 β, $h(\gamma_0) = \min\{h(\gamma_1) | \forall \gamma_1 \notin T_{\text{od}}, h(\gamma_1) \preceq h(\gamma), t(\gamma) \preceq t(\gamma_1)\}$.

证 先证必要性. 设 C_α 和 C_β 在 G 的同一个双连通片上, 如果 α 和 β 不满足 (12.1.2) 式, 则有如下两种可能的情形要讨论:

情形 1 $h(\alpha_0)$ 和 $h(\beta_0)$ 是不可比较的, 因为这时, $C_{\alpha_0} \cap C_{\beta_0} = \varnothing$, α 和 β 不可能在 G 的同一个连通片上, 与前提条件矛盾.

情形 2 否则, 因为 $h(\alpha_0)$ 和 $h(\beta_0)$ 分别为圈 C_{α_0} 和 C_{β_0} 上的最小节点, 只可能

$$v = \min(h(\alpha_0), h(\beta_0)) = \inf\{t(\alpha), t(\beta).$$

不管怎样, 这将导致 v 是 G 的一个割点, 使得 α 和 β 落在 G 的不同的二连通片上, 又与前提条件矛盾.

再证充分性. 假设 α 和 β 为满足 (12.1.2) 式的两条上树边. 因为 $C_{\alpha_0} \cap C_{\beta_0}$ 为 T_{od} 上的一条非平凡的路, α 和 β 与 α_0 和 β_0 一样在 G 的同一个二连通片上. ♮

为了用一个图 G 的平面性辅助图 H 确定 G 的二连通片, 根据引理 12.1.2, 可以将 H 的连通片分类. 若 H 的两个连通片 H_1 和 H_2 具有这样的性质: 在 H_1

中有一个节点 α, 在 H_2 中有一个节点 β, 使得在 G 中的相应上树边 α 和 β 满足 (12.1.2) 式, 则称 H_1 与 H_2 是*同循环的*. 通过检查 1.2 节中的关系性 1, 关系性 $\tilde{2}$ 和关系性 3 可以看出, 两个连通片之间的同循环性是一个等价关系, 并用 $\sim_h$ 表示. H 的每一个同循环类被称为*同循环片*. 对于 H 的一个同循环片 A, 令

$$G_A = \bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha,$$

其中 A 也视为同循环片 A 上的节点集, α 既为 A 中的节点又是 G 中的上树边. 称 G_A 为原图 G 上同循环片 A 的*同循环象*.

定理 12.1.1　对于图 G, 其上的所有同循环象不随确向树 T_{od} 的选择而改变, 而且它们均为 G 的非平凡的二连通片.

证　由于平凡的二连通片, 即仅由一条边组成的二连通片为割边, 它含在任何的支撑树, 特别地, 确向树上, 故在 H 中不会有连通片对应 G 中的平凡二连通片.

先证第一个结论. 用反证法. 假设 $G_A(T_{\mathrm{od1}})$ 和 $G_B(T_{\mathrm{od2}})$ 分别为对于 T_{od1} 和 T_{od2} 的同循环片 A 和 B 的同循环象, 而且满足

$$\begin{cases} G_A(T_{\mathrm{od1}})\bigcap G_B(T_{\mathrm{od2}}) \neq \varnothing, \\ G_A(T_{\mathrm{od1}}) \neq G_B(T_{\mathrm{od2}}). \end{cases} \tag{12.1.3}$$

若有一边 e 在 $G_A(T_{\mathrm{od1}})$ 中, 但不在 $G_A(T_{\mathrm{od2}})$ 中, 则存在一个同循环片 $B_1 \neq B$, 使得 e 在 $G_{B_1}(T_{\mathrm{od2}})$ 中. 因为 e 本身不会是 G 的一个双连通片, e 必落在某个圈上. 由引理 12.1.2 所蕴含的, 对于 T_{od2} 的同循环片的唯一性必有 $B_1 = B$. 与 $B_1 \neq B$ 矛盾, 从而只能不会有边在 $G_A(T_{\mathrm{od1}})$ 中, 而不在 $G_A(T_{\mathrm{od2}})$ 中. 类似地也可以看出, 同样不会有边在 $G_B(T_{\mathrm{od2}})$ 中, 而不在 $G_A(T_{\mathrm{od1}})$ 中. 然而, 这又与条件 (12.1.3) 式矛盾.

由第一个结论和引理 12.1.2, 即可得第二个结论.　♮

一个割点, 如果它只与平凡的二连通片关联, 也被称为*平凡的*. 容易看出, 一个割点是平凡的当且仅当对于确向树 T_{od} 没有同循环象与之关联.

引理 12.1.3　对于一个非平凡的割点, 总有一个同循环象, 使得它的最小节点就是这个割点.

证　用反证法. 设 v 是一个非平凡的割点, 但不是任何一个同循环象的最小节点. 令 v 为对于某确向树 T_{od} 的同循环象 G_A 和 G_B 的公共节点. 由非最小性, 在 G_A 中存在一个 $v(A)$ 被 v 覆盖, 在 G_B 中存在一个 $v(B)$ 被 v 所覆盖. 然而, 在 T_{od} 上的 v 处至多有一条边指向 v. 也就是说, G_A 和 G_B 在同一个同循环片上. 与 v 为割点矛盾.　♮

定理 12.1.2　对给定图 G 上的一个确向树 T_{od}, 一个非 T_{od} 的根的节点是非

平凡割点当且仅当存在一个同循环象以它为最小节点, 根节点是非平凡割点当且仅当它在 $T_{\rm od}$ 上的次大于 1.

证 由引理 12.1.3, 只需证明第一个结论的充分性. 设 v 为某同循环片 G_A 上的最小节点且非 $T_{\rm od}$ 的根. 因为 v 不是根, 在 $T_{\rm od}$ 上有一个节点 u 被 v 覆盖. 又因为最小性, u 不可能在 G_A 上, 故 v 必为 G 的一个割点. 由于 G_A 为非平凡二连通片, 从而 v 为非平凡的割点.

第二个结论可由 2.2 节中所描述的求一个确向树的过程直接导出. □

12.2 三连通分解

令 $G=(V,E)$ 是一个图. 对于 V, 用它的子集 $V_i(i=1,2,\cdots,h)$ 的并表示, 如

$$V=\bigcup_{i=1}^{k}V_i. \tag{12.2.1}$$

记 $G_i=G[V_i]$ 为 G 上由 $V_i(i=1,\cdots,k)$ 导出的子图. 设

$$V_i\bigcap\Big(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant k,j\neq i}V_j\Big)=A_i,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

若在 G_i 上, 将 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 中所有不相邻的二节点都连一条边, 记所得的图为 $\tilde{G}_i$, 并称之为 G_i 的**相邻扩张**. 若表达式 (12.2.1) 满足对 $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,k$,

$$|V_i\bigcap V_j|\leqslant 2; \tag{12.2.2}$$

对于 $i=1,2,\cdots,k$,

$$\left|V_i\bigcap\left(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant k,j\neq i}V_j\right)\right|=2 \tag{12.2.3}$$

且所有 G_i 的相邻扩张 $\tilde{G}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 全是三连通的, 则称 G 的如下表示:

$$G=\bigcup_{i=1}^{k}G_i \tag{12.2.4}$$

为 G 的一个*三连通分解*.

对于一个二连通图 G, 容易看出, 如 (12.2.4) 式给出的三连通分解一般不是唯一的. 不过, 可以证明 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的相邻扩张的集合 $\{\tilde{G}_i|i=1,2,\cdots,k\}$ 是唯一的. 或者说, $\{V_i|i=1,2,\cdots,k\}$, 其中 $V_i=V(G_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 如 (12.2.1)~(12.2.3) 式中所示是适定的. 这里, $\tilde{G}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 被称为 G 的*三连通片*(或 *3连通片*). 当然, 这个说法与 4.3 节中所说的基本劈块是等价的. 每个 3 连通片的节点集, 被称为 G 的一个*原子*.

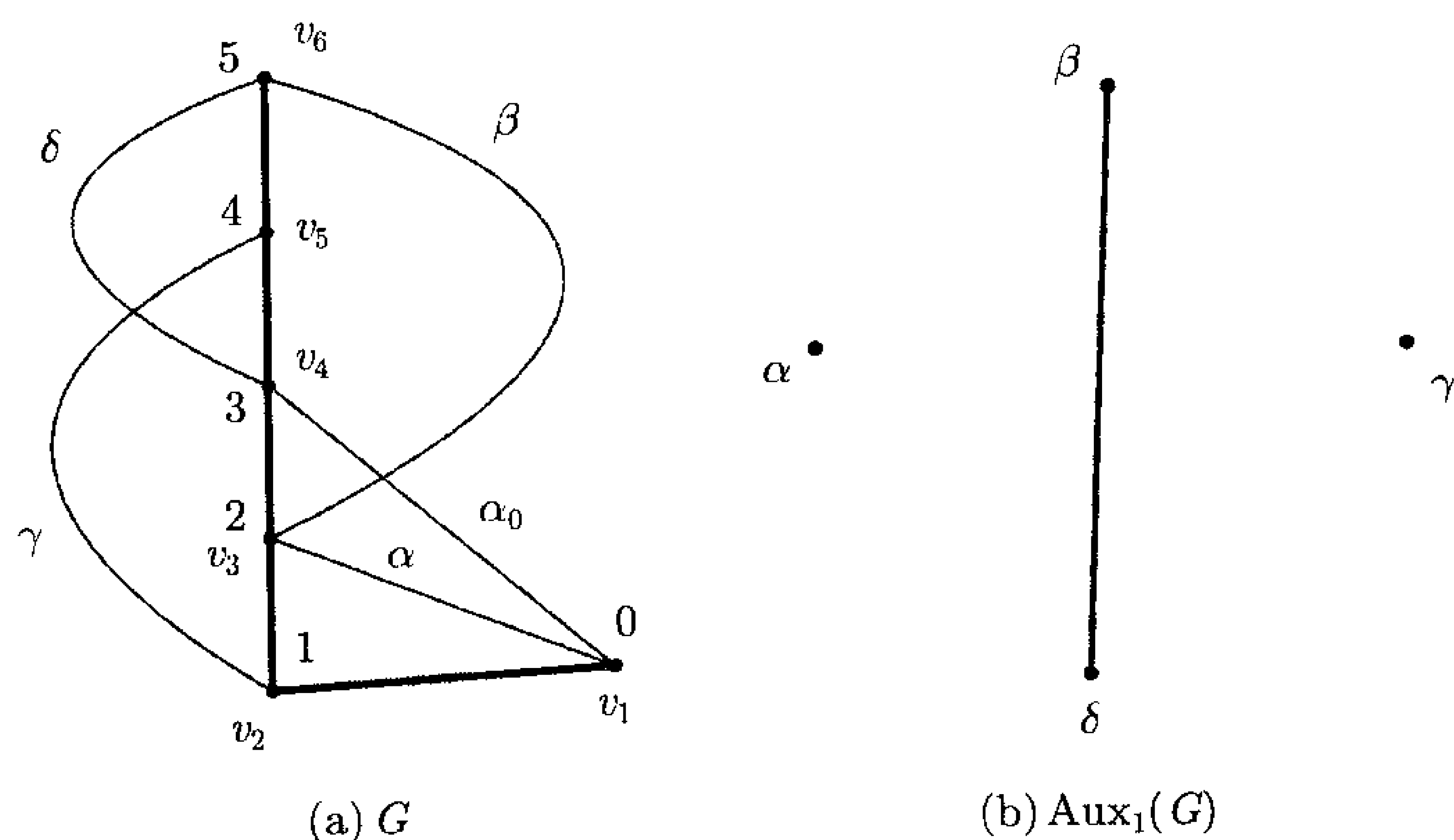
引理 12.2.1　若一个 2 连通图 G 有形式

$$G = G_1 \bigcup G_2, \quad G_1 \bigcap G_2 = \{u, v\}, \tag{12.2.5}$$

则对于任何确向树, 在平面性 1 辅助图 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 上, 没有一个与 G_1 关联的节点和一个与 G_2 关联的节点是相邻的.

证　因为 $\{u, v\}$ 是一个劈对, 对任何一个确向树 T_{od}, 在 T_{od} 上总有一条有向路连 u 和 v. 不妨设 $u \prec v$, 而且这条从 u 到 v 的有向路是在 G_1 上. 对任何 $\alpha \in \overline{T_{\mathrm{od}}}\ (G_1)$和 $\beta \in \overline{T_{\mathrm{od}}}\ (G_2)$, 为了二者相邻, 必有 $h(\beta) \preceq u$ 和 $h(\alpha) \prec \inf(t(\alpha), t(\beta))$; 否则, $h(\alpha) \preceq h(\beta) = \inf(t(\alpha), t(\beta))$. 在后一情形, 根据 6.4 节中所讨论的, 在 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 中, α和 β 不可能相邻. 在前一情形, 因为既不存在 $\gamma \in \overline{T_{\mathrm{od}}}(G_1)$, $h(\gamma) \prec h(\beta)(h(\beta) \prec h(\alpha))$, 也不存在 $\gamma \in \overline{T_{\mathrm{od}}}(G_2)$, $h(\gamma) \prec h(\alpha)(h(\alpha) \prec h(\beta))$, 使得 α 和 β 同在类型 A 中. 又类型 A 是使 α 和 β 相邻的仅有的可能, 从而 α 不可能与 β 相邻. ♮

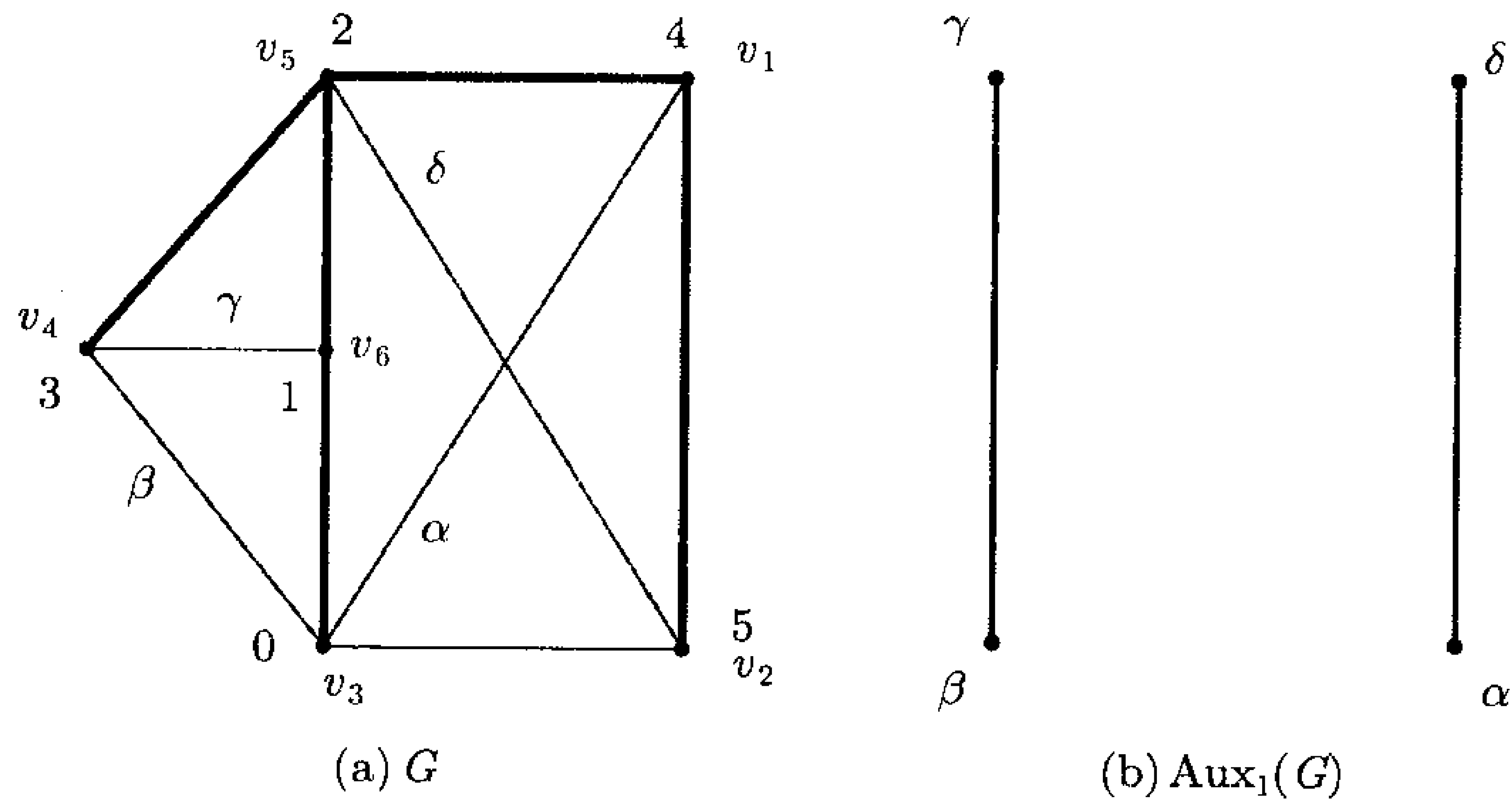
根据引理 12.2.1 可以看到, 对任何确向树 T_{od}, G 中在不同 3 连通片中的上树边为相应的平面性 1 辅助图的不同连通片中的节点. 然而, 平面性 1 辅助图中连通片的数目并不是随 T_{od} 的选择不变. 例如, 图 12.2.1(a) 给出的 G, 其中粗线为 T_{od}. 图 12.2.1(b) 给出了 G 的平面性 1 辅助图 $\mathrm{Aux}_1(G)$, 它有三个连通片.



(a) G　　(b) $\mathrm{Aux}_1(G)$

图 12.2.1

事实上, $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的以 α 和 γ 组成的两个连通片, 对应于 G 的两个 3 连通片中的同一个. 它们每个均为四阶完全图 K_4, 其中 $\{v_3, v_5\}$ 为劈对. 若如图 12.2.2(a) 所示, 取粗实线的边组成 T_{od}, 则它的相应的 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 如图 12.2.2(b) 所示就恰有两个连通片了. 这里, $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的每一个连通片恰相应 G 中的一个 3 连通片.



(a) G (b) $\mathrm{Aux}_1(G)$

图 12.2.2

为了求出 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 上的一个不变量, 以确定 G 的 3 连通片, 必须对于确向树将 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 上的连通片进行分类.

对于 G 的一个确向树 T_{od}, 由 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的一个连通片 A 所产生的图

$$G_A = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha, \tag{12.2.6}$$

其中 C_α 为由 $\alpha \in \overline{T_{\mathrm{od}}}$ 与 T_{od} 所成的那个基本圈. G_A 的节点集 $V(G_A)$ 被称为 G 的**半原子**. 若 A 和 B 是 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 中的两个连通片, 并且与 A, B 相应的 G 的两个半原子是一个包含另一个, 则称 A 和 B 是**同网的**.

通过引进传递性, 可以将 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的连通片间的同网关系延拓为一个等价关系. 根据它将 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 中的连通片分类, 其中的每一类被称为 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的**同网片**. $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的同一类中的连通片所相应的半原子之并被称为 G 的一个**准原子**.

引理 12.2.2 对于任一同网片 A, 由 (12.2.6) 式所确定的 G_A 与 G 的一个 3 连通片同胚.

证 用反证法. 设 G_A 含有 G 的一个分离对 $\{u, v\}$, 使得

$$G_A = G_1 \bigcup G_2, \quad G_1 \bigcap G_2 = \{u, v\},$$

其中 G_1 和 G_2 皆为非平凡的. 由引理 12.2.1 知 G_1 和 G_2 必分别相应 $\mathrm{Aux}_1(G)$ 的连通片 A_1 和 A_2. 因为既无 $V(G_1) \subseteq V(G_2)$, 也无 $V(G_2) \subseteq V(G_1)$, A_1 与 A_2 非同网. 然而, $A = A_1 \cup A_2$ 与 A 本身是个同网片矛盾. ♮

对于 $R \subseteq V$, 令 $V - \hat{R}$ 为所有那些关联边不全在 $G[R]$(即 R 在 G 上的节点导出子图) 中的节点的集合.

引理 12.2.3 对于一个准原子 R, 若

$$I(R) = R \bigcap (V - \hat{R}) \neq \varnothing, \tag{12.2.7}$$

则 $I(R)$ 形成由 T_{od} 所确定的偏序集 V 上的一个非平凡的链的集合.

证　由引理 12.2.2, $I(R)$ 至少含 G 的一个劈对, 用 $\{u,v\}$ 表示. 不失一般性, 可设 $u \prec v$, 而且在 T_{od} 上从 u 到 v 的路 $P(u,v)$ 在 R 上由 (12.2.6) 式产生的子图中. 由 2 连通性, 至少有一个上树边 α, 使得 $h(\alpha), t(\alpha) \in V - \hat{R}$ 且满足

$$h(\alpha) \preceq u \prec v \preceq t(\alpha).$$

这就是说, $P(u,v)$ 也在 $V - \hat{R}$ 上由 (12.2.6) 式所产生的子图中, 而且容易看出, $P(u,v)$ 的节点集 (即偏序集 V 中的一个链) 不是 R 和 $V - \hat{R}$ 上两子图的公共子图的任一连通片的真子图, 从而由于 $I(R)$ 中至少包含一个劈对, 即得引理结论. ♮

由引理 12.2.2 和引理 12.2.3 即可看到, 一般来说, 准原子仍然依赖于 T_{od} 的选择. 然而, 只是一个准原子 R 和 $V - \hat{R}$ 的公共部分依赖于 T_{od} 的选择.

引理 12.2.4　$\text{Aux}_1(G)$ 的同网片的数目不依赖于确向树 T_{od} 的选择.

证　因为存在 $\text{Aux}_1(G)$ 的同网片与 G 的准原子之间的一个 1-1 对应, 由引理 12.2.2 和引理 12.2.3 即可得引理的结论. ♮

至此, 或许有人要回到图 12.2.1 和图 12.2.2 所示的那个例子看一看.

由于图 12.2.1(b) 中的 $\text{Aux}_1(G)$ 的两个连通片 γ 和 α 是同网的, 故 $\text{Aux}_1(G)$ 只有两个同网片. 这个数目与图 12.2.2(b) 中的 $\text{Aux}_1(G)$ 的是相同的. 对此, 也可见同网片的数目与 T_{od} 的选择无关. 因为总是讨论 2 连通的图 G 而不带 2 节点, 由准原子在 G 上导出的子图, 只有那些与其余部分的公共路中的内节点为 2 节点, 从而一个准原子中的那个由它的导出子图的非 2 节点形成的子集就是 G 的一个原子.

定理 12.2.1　对于在一个 2 连通的图 $G = (V, E)$ 上任选的确向树 T_{od}, 令 $A_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 为由 $\text{Aux}_1(G)$ 所确定的原子, 则由 $A_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 在 G 上导出的子图 G_i 形成 G 的一个 3 连通分解,

$$\tilde{G}_i = G_i + U_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

其中 $U_i = \{(u,v) | \{u,v\}$ 为 G_i 上 G 的劈对且 $(u,v) \notin E\}$ 皆为 G 的 3 连通片.

证　由引理 12.2.2~ 引理 12.2.4 可直接导出定理的结论. ♮

设 $H_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 为 G 的所有 3 连通片, $V_i = V(H_i)$. 可以造一个新图, 称之为 G 的*原子结构*.

它的节点为 G 的原子, 即 $V_i (i = 1, 2, \cdots, k)$. 两个节点相邻当且仅当它们所代表的原子至少有一个公共节点.

引理 12.2.5　一个 2 连通图 G 的原子结构 $H = (U, B)$ 具有这样的性质: 其边集可以划分为两个部分 B_1 和 B_2, 使得 B_1 中的边均在 $H[B_1]$ 的某无弦圈上, B_2

的每一条边均在 $H[B_2]$ 的一个团上, 其中 $H[B_1]$ 和 $H[B_2]$ 分别为在 H 上由 B_1 和 B_2 导出的子图.

证 因为两个原子在 H 中相邻只有两种情形: 或者它们有两个公共节点形成一个劈对; 或者它们有一个公共节点在某个劈对中, 则 B 划分的 B_1 和 B_2 分别相应后者和前者的边.

由 G 的 2 连通性和 B_1 中的每一边的每个端点与某个劈对相应, 则在 $H[B_1]$ 中的每一边均在某圈上. 自然, 它是无弦的.

对于 B_2, 若一边相应的劈对只与两个原子关联, 则它必为 $H[B_2]$ 的一个割边, 它本身就是一个团, 即平凡的团; 否则, 这条边必在 $H[B_2]$ 的一个非平凡的团上. ♮

图 12.2.3(a) 给出了 G, 其中带阴影的部分表示一个原子. 图 12.2.3(b) 给出的是 G 的原子结构, 其中的粗线表示在 B_2 中的边.

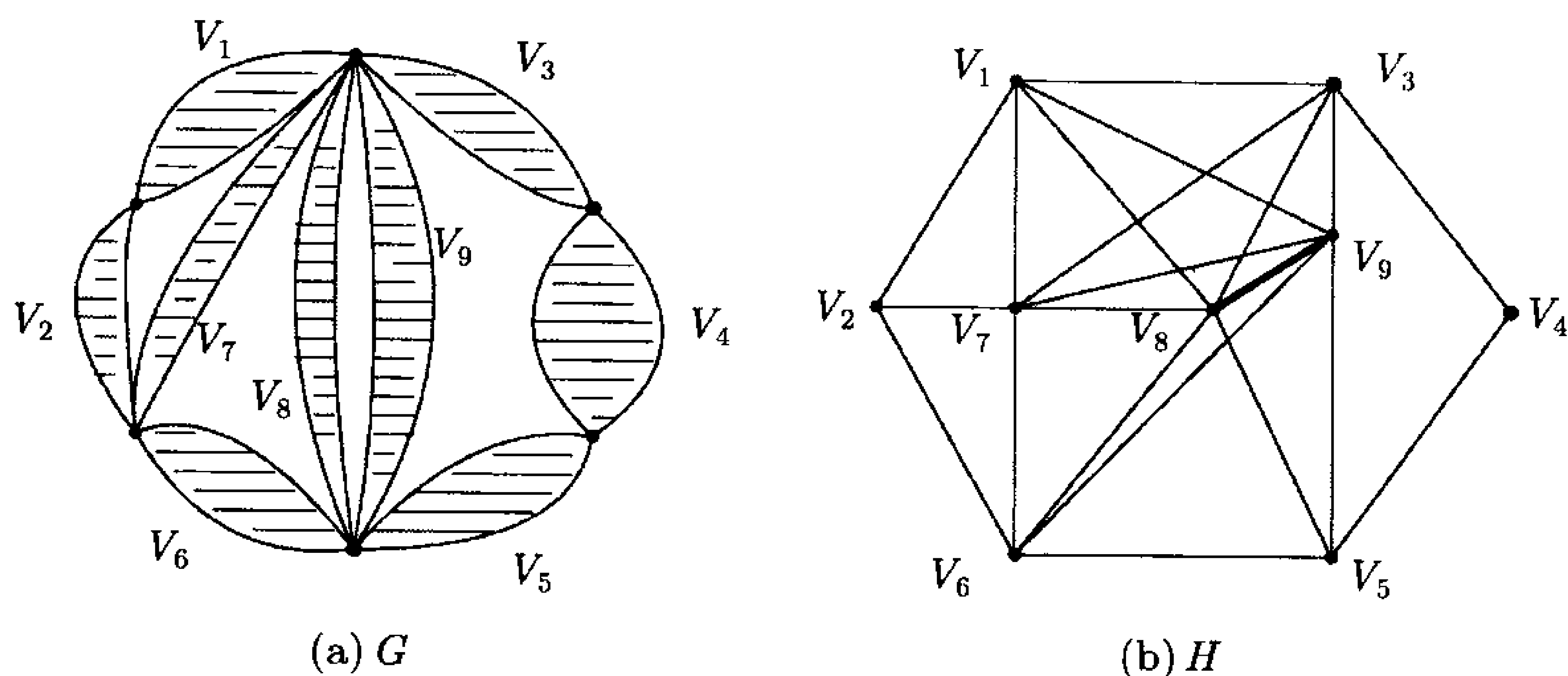


图 12.2.3

实际上, 它只有一条边, 自然, 自成一团, 细线的就是 B_1 中的边了.

定理 12.2.2 一个节点对 $\{u,v\}$ 是 G 的一个劈对当且仅当对一个给定的确向树, 或者有原子 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$, 使得 $(V_1,V_2,\cdots,V_s)$ 形成一个无弦圈且有性质: $u,v\in V_1$, $V_1\cap V_2=\{u\}$, $V_s\cap V_1=\{v\}$; 或者有两个原子 V_1 和 V_2, 使得 $V_1\cap V_2=\{u,v\}$.

证 由定理 12.2.1 和引理 12.2.5 直接可得定理结论. ♮

根据定理 12.2.1 和定理 12.2.2, 可以对任意给定的一个确向树, 确定一个 2 连通图的 3 连通片和劈对. 这就使得能够按照一定的目标, 如使计算量小、使过程简单等, 适当地选择确向树进行 3 连通分解.

12.3 平面分解

经过前两节的讨论, 允许在这里只研究 3 连通的图. 对于一个图 $G=(V,E)$,

若 $E=E_1+E_2+\cdots+E_k$, 使得所有边导出子图 $G[E_i](i=1,2,\cdots,k)$ 皆为可平面的, 则

$$G=\bigcup_{i=1}^{k}G[E_i] \tag{12.3.1}$$

被称为 G 的一个*平面分解*, 或者说, *平面化*. 容易看出, 任何一个图均有平面分解, 而且有各种方法对图进行平面分解.

然而, 这里所关心的是, 求图 G 的一个如 (12.3.1) 式所示的平面分解, 使得其中子图的数目 k 尽量得小. 这个最小的 k 被称为图 G 的*厚度* 或*平面数*.

一般来说, 确定图的厚度是一个很难的问题. 直到现在, 也只知道一些特殊图类的厚度, 或只知道一般图的厚度的一些上界或下界.

本节不拟讨论如何确定一些类型的图的厚度, 或者一般图的厚度的上、下界. 这些可以在目前已经出版的一些书中查到. 此处的目的在于提供一种方法来, 求一般图的平面分解, 使得其中子图的数目在某种意义下尽可能少. 可以想象, 它会在超大规模集成电路的设计中得以应用.

令 $G=(V,E)$ 为一个图, T 为 G 上的一个树 (当然, 支撑的). 若 H 是 G 的一个平面子图, 使得有这样的性质: T 在 H 上, 或者说, H 是 G 的一个 *T平面子图*, 而且除 H 本身外, 在 G 上无任何 T 平面子图也含 H 作为子图, 则称这样的 H 为 G 的一个 *T极大平面图*.

若 (12.3.1) 式中的所有子图相互均有公共的树 T, 则称 (12.3.1) 式的这种形式为 G 的*共 T 平面分解*. 同样地, 在一个共 T 平面分解中, 若其中的 T 平面子图的数目 k 是最小的, 则称这个 k 为 G 的*共 T 厚度*. 人们也许注意到了, 图的共 T 平面分解不再是一种特殊的平面分解, 因为这时的 T 平面子图的边集并不形成 G 的边集的一个划分.

如果 G 的一个共 T 平面分解中的所有平面子图, 对于这个给定的 T 全是 T 极大的, 则称之为 *T极大平面分解*.

不管是考虑图的共 T 平面分解和共 T 厚度, 还是考虑图的 T 极大平面分解, 其基本的一步就是求一个图的 T 极大平面子图. 这就是为什么在本节只集中注意力于对给定的树, 确定图中的 T 极大平面子图. 为便于处理, 还总是限定 T 为确向树 $T_{\rm od}$.

又会使人们想到, 通过平面性辅助图, 研究如何去掉图中的一些上树边, 使剩下的图为它的一个 $T_{\rm od}$ 极大平面子图. 不管怎样, 在下面的例子中将会看到如何去掉上树边的方式不能不考虑. 图 12.3.1(a) 给出了图 G, 其上的粗实线为确向树 $T_{\rm od}$, 它的平面性 0 辅助图 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 由图 12.3.1(b) 给出, 其中的粗实线表示权为 1 的边. 因为在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中仅有两个奇权圈, 它们无公共边, 这就是

$$C_1=(x_{p,\xi},y_{\zeta,\xi},x_{t,\gamma},y_{s,\delta},x_{p,\beta},y_{t,\eta})$$

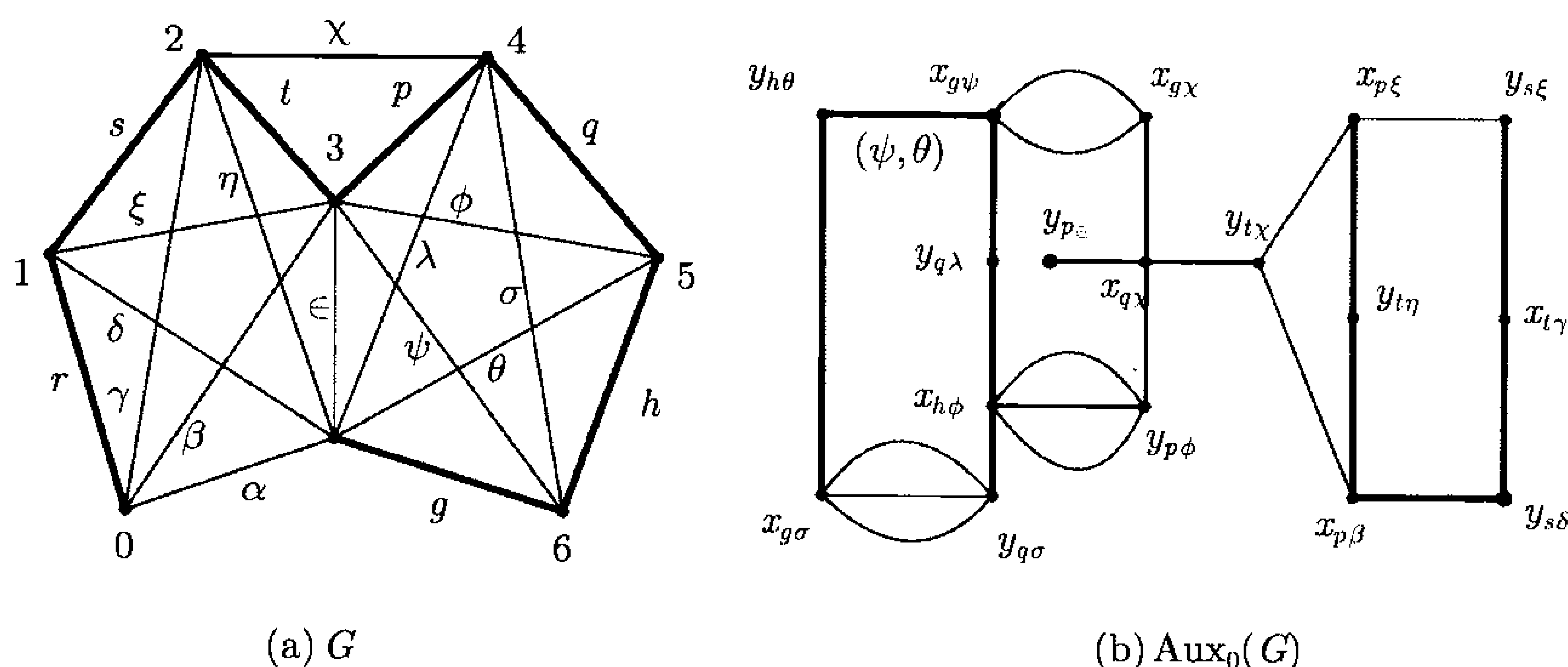
和

$$C_2 = (x_{g,\sigma}, y_{h,\zeta}, x_{g,\psi}, y_{g,\lambda}, x_{h,\varphi}, y_{q,\sigma}).$$

在 C_2 中, 那条 3 重边 $(y_{q,\sigma}, x_{g,\sigma})$ 被视为一边. 只要在 $\text{Aux}_0(G)$ 中去掉 $y_{g,r}$ 和 $x_{g,\sigma}$ 之一即可使 C_2 不再存在. 令 $\tilde{\tau}(S)$ 为那些与 $\text{Aux}_0(G)$ 的一个子图 S 关联的 G 的上树边的集合, 则可以看出

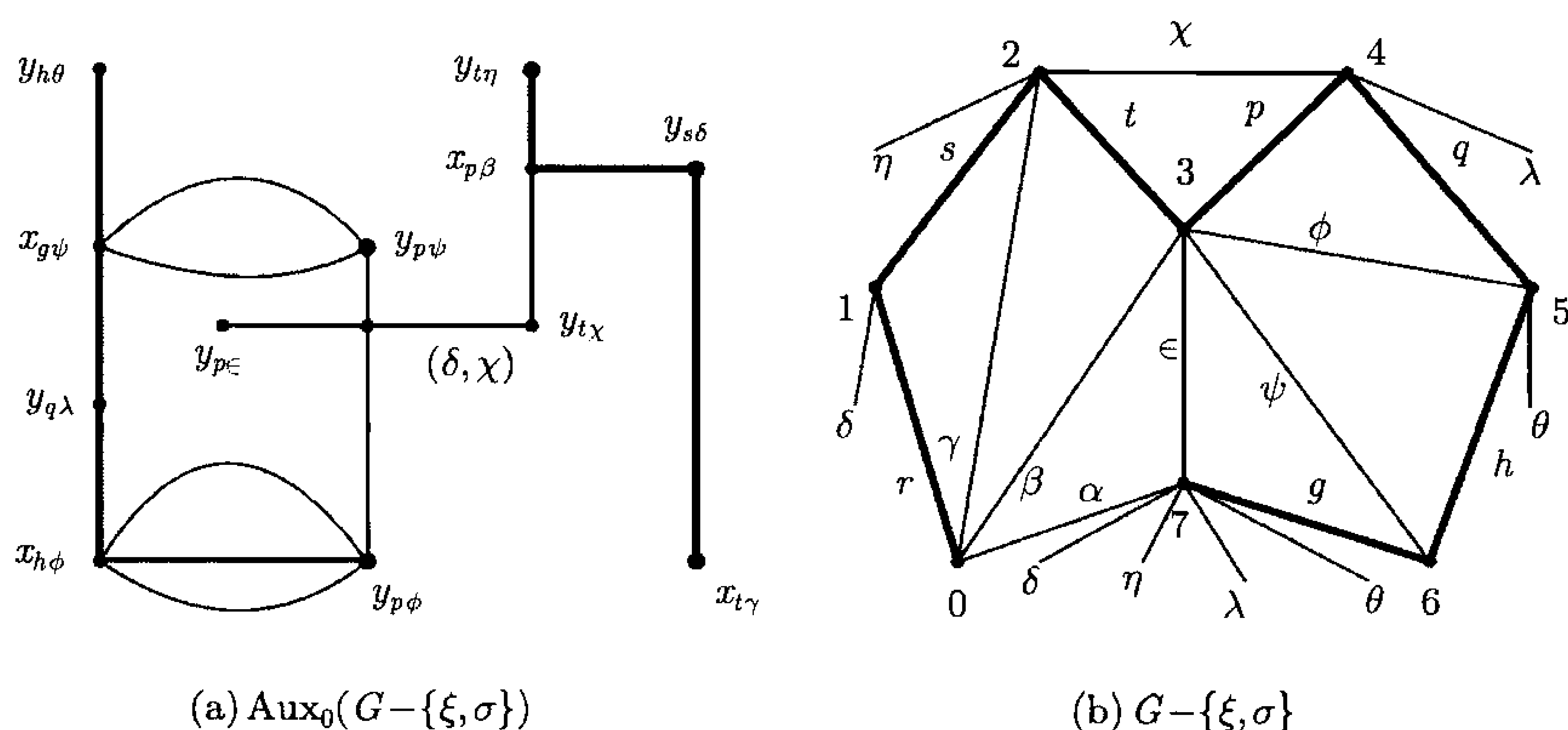
$$\begin{cases} \tilde{\tau}(C_1) = \{\xi, \gamma, \delta, \beta, \eta\}, \\ \tilde{\tau}(C_2) = \{\sigma, \zeta, \psi, \lambda, \varphi\}. \end{cases}$$

因为 $\tilde{\tau}(G) \cap \tilde{\tau}(C_2) = \varnothing$, 绝不可能从 G 中仅去掉一条上树边而得到一个 T_{od} 极大子图. 然而, 根据 6.3 节中所引进的理论, 可以从 G 中去掉两条上树边, 一条在 $\tilde{\tau}(C_1)$ 中, 另一条在 $\tilde{\tau}(C_2)$ 中, 而得到它的一个 T_{od} 极大平面子图. 仅以 $\{\xi, \sigma\}$ 作为要去掉的上树边为例. 在 $\text{Aux}_0(G)$ 中去掉与 ξ 和 σ 关联的节点 $x_{p,\xi}, y_{s,\xi}, x_{g,\sigma}$ 和 $y_{q,\sigma}$ 后所得的 $\text{Aux}_0(G) - \{\xi, \sigma\}$, 如图 12.3.2(a) 所示, 这里不再有奇圈.



(a) G　　(b) $\text{Aux}_0(G)$

图 12.3.1



(a) $\text{Aux}_0(G - \{\xi, \sigma\})$　　(b) $G - \{\xi, \sigma\}$

图 12.3.2

事实上, 将 G 去掉 ξ 和 σ 两边所得到的图有如图 12.3.2(b) 所示的平面嵌入.

引理 12.3.1　令 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 为图 G 对于确向树 T_{od} 的平面性 0 辅助图. 对于上树边 α, 记 $G-\alpha$ 为从 G 中去掉 α 后所得的图, 则有

$$\mathrm{Aux}_0(G-\alpha)=\mathrm{Aux}_0(G)-X(\alpha)Y(\alpha), \tag{12.3.2}$$

其中 $X(\alpha)Y(\alpha)$ 表示在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 中与 α 关联的所有的节点和边.

证　因为 α 是 G 中确向树 T_{od} 的上树边, G 上的确向树 T_{od} 仍然是 $G-\alpha$ 上的确向树. 由平面性 0 辅助图的构造, 即得引理的结论. ♮

令 $C_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的所有基本圈, $\tilde{\tau}(C_i)(i=1,2,\cdots,s)$ 为与 C_i 上的节点或边关联的 G 中上树边的集合. 若 G 中一个上树边的集合 S 具有性质

$$S\bigcap\tilde{\tau}(C)\neq\varnothing, \tag{12.3.3}$$

其中 C 为 $C_i(i=1,2,\cdots,s)$ 中的所有奇权圈, 使得

$$X(S)Y(S)=\bigcap_{\alpha\in S}\Big(\mathrm{Aux}_0(G)-X(\alpha)Y(\alpha)\Big)$$

不再有奇权圈, 则称 S 为 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个壳. 事实上, 一个壳总可视为集合 $C_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的一类覆盖. 如果一个壳的任何一个真子集均非壳, 则称为极小壳.

定理 12.3.1　对于 G 的一个给定的确向树 T_{od}, 令 S 为 G 的上树边的一个集合, 则

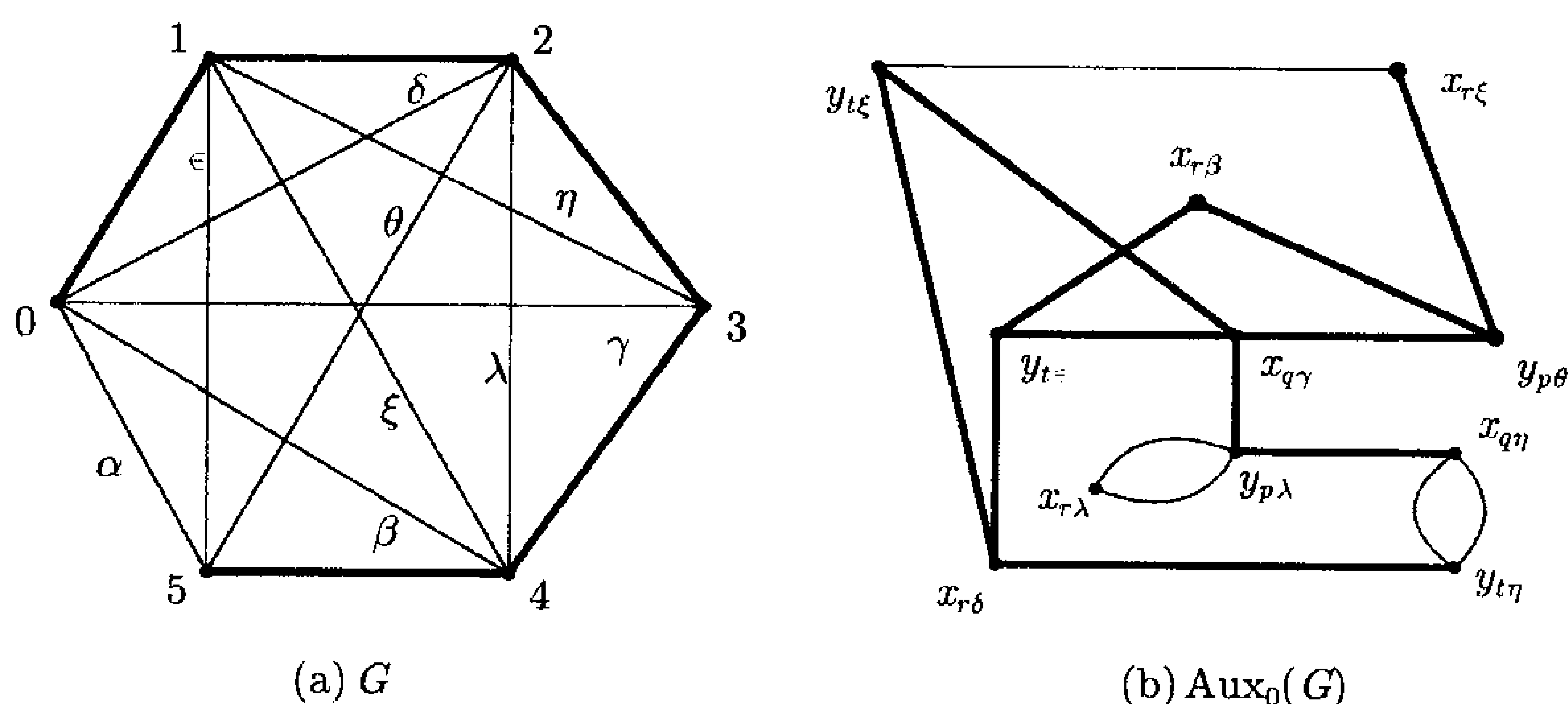
$$G-S=\bigcap_{\alpha\in S}(G-\alpha)$$

是 G 的一个 T_{od} 极大平面子图当且仅当 S 是 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个极小壳, 其中 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 为 G 对于 T_{od} 的平面性 0 辅助图.

证　必要性. 由引理 12.3.1, 图 $G-S$ 的平面性 0 辅助图为 $\mathrm{Aux}_0(G)-X(S)Y(S)$, 因为 $G-S$ 是 G 的一个 T_{od} 极大平面子图. 由定理 6.4.1(1), (2) 知 S 是 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个壳, 但对任何 $\alpha\in S$, $S-\{\alpha\}$ 均非 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个壳, 从而 S 是 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个极小壳.

充分性. 设 S 是 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个极小壳. 由引理 12.3.1 和定理 6.4.1(1), (2), $G-S$ 是 G 的一个平面子图. 然而, 由 S 的极小性, $G-S$ 则是 T_{od} 极大的. ♮

由图 12.3.2 人们也许会想到, 所有的极小壳具有相同的基数. 然而, 图 12.3.3(a) 所示的图 G, 粗实线为确向树 T_{od}, 则有 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 如图 12.3.3(b) 所示.



(a) G (b) $\mathrm{Aux}_0(G)$

图 12.3.3

在 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 上的粗实线表示权为 1 的边. 可以验证, $\{\varepsilon, \zeta, \lambda\}$ 和 $\{\xi, \eta\}$ 均为极小壳, 但它们的基数不同.

若 G 的一个 T 极大平面子图具有最大的度, 则称之为 T **最大平面子图**. 同样地, 若 $\mathrm{Aux}_0(G)$ 的一个极小壳具有最小的基数, 则称它为一个**最小壳**.

可以发现在定理 12.3.1 中, 将极大和极小分别用最大和最小代替仍然成立.

根据定理 12.3.1, 可以通过逐次地在去掉的上树边与 T_{od} 所导出的图上求 T_{od} 极大平面子图的办法, 求共 T_{od} 平面分解或者 T_{od} 极大平面分解.

12.4 页 分 解

如果一个图 $G = (V, E)$ 可以在一个半平面上表示, 可以不失一般性地假设为欧氏 (x, y) 平面的上半平面 $y \geqslant 0$, 使得节点都在直线 $y = 0$ 上, 所有的边皆为上半平面中的 Jordan 线段, 而且任何一对除在相邻时的公共端点外, 无任何其他公共点, 则称 G 为**页可嵌入的**, 或**可嵌入页上的**. 这样的一种表示称为 G 的**页嵌入**. 当然, 页嵌入本身也是平面嵌入, 但反之未必然. 例如, K_4 是可平面的, 它的平面嵌入就是 正四面体, 但下面就会看到 K_4 不是可嵌入页上的. 不过, 在 K_4 上去掉任一边所得的图则是页可嵌入的. 图 12.4.1(a) 给出了这个图, 图 12.4.1(b) 给出了它的一个页嵌入.

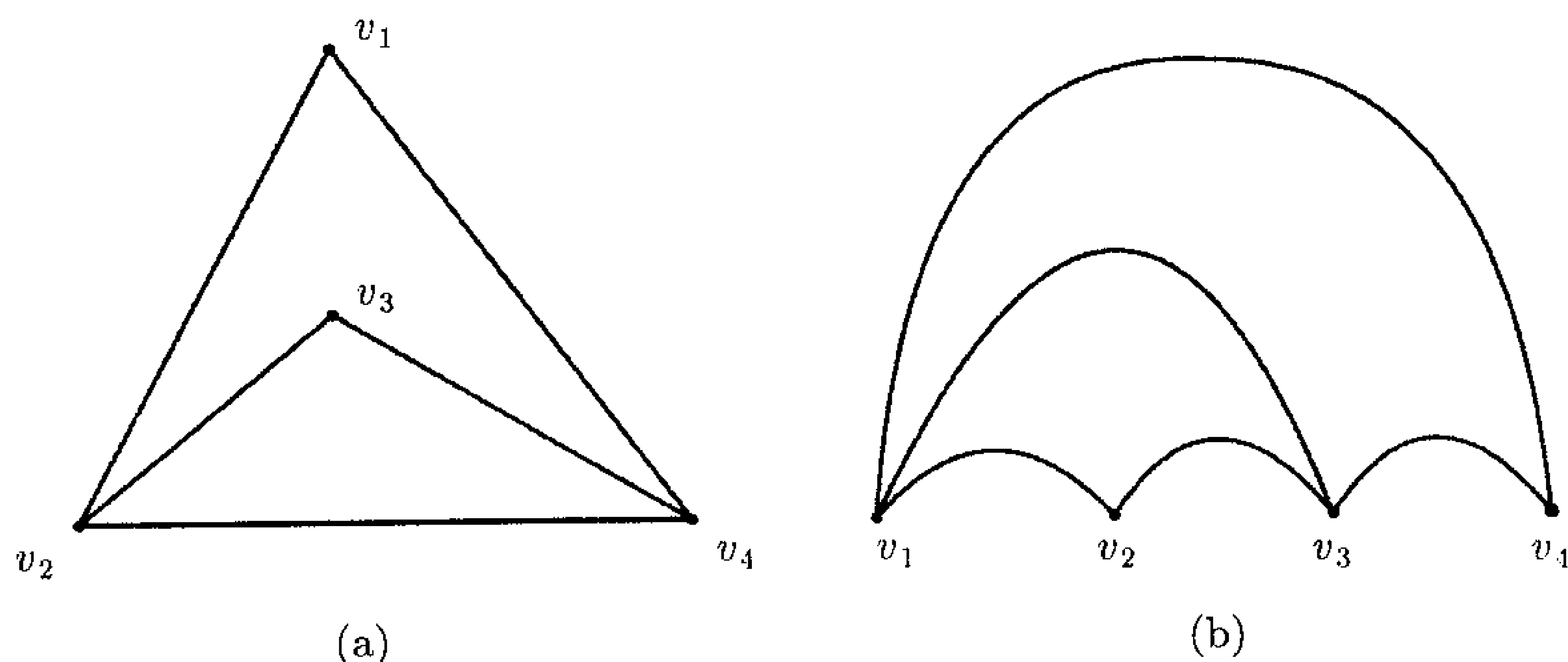
引理 12.4.1 任何树皆可嵌入页上.

证 因为任何树均可嵌入到平面上, 仅讨论树本身就是它的平面嵌入. 如 3.1 节中所述, 可以任取一个节点, 用 O 表示, 和一个与 O 关联的边 r. 用 3.1 节中的旅行规则, 分别以 O 和 r 作为始节点和始边可得一个树的码, 只要将节点依在这个码中出现的次序从左到右嵌入到直线 $y = 0$ 上.

在每个节点处, 按与树的平面嵌入上的旋的相反次序, 即得这个树的一个页

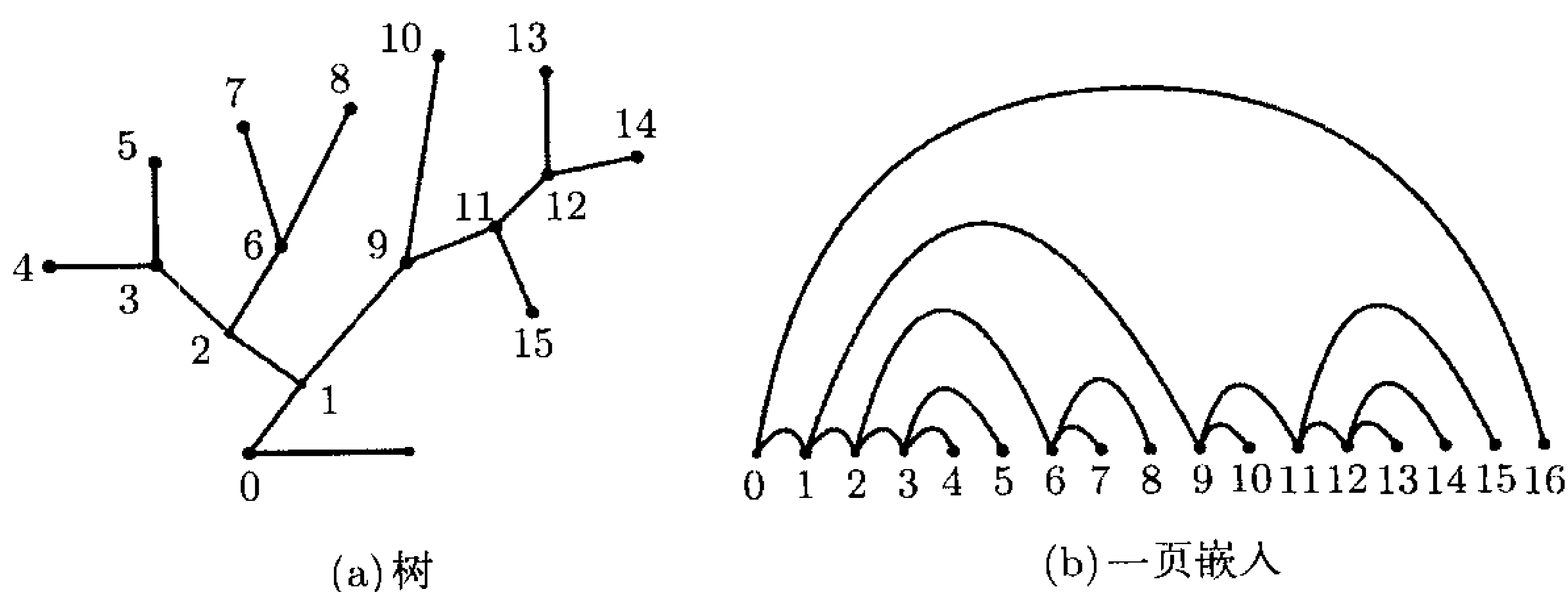
嵌入.

图 12.4.2 显示了求一个树的页嵌入的过程. 图 12.4.2(a) 中给出了树的平面嵌入, 图 12.4.2(b) 中为由这个平面嵌入所产生的页嵌入.



(a)　(b)

图 12.4.1



(a) 树　(b) 一页嵌入

图 12.4.2

引理 12.4.2　任何不可分离的外平面图是页可嵌入的.

证　因为一个外平面图可嵌入到平面上, 使得所有的节点全在无限面的边界上. 由不可分离性, 无限面的边界实际上是一个圈. 总可以将所有节点嵌入到 $y = 0$ 的直线上, 使得从左向右出现的次序与在圈上的次序相同. 然后, 依照节点在这个平面嵌入中旋的次序, 即可得一个页嵌入.

在图 12.4.3 中可以看出, 由引理 12.4.2 的证明所提供的过程, 怎样从图 12.4.3(a) 中的一个外平面图求得图 12.4.3(b) 所示的它的一个页嵌入.

定理 12.4.1　一个图是页可嵌入的当且仅当它是一个外平面图.

证　充分性. 由外平面性, 可以根据节点在其无限面边界上第一次出现的次序, 从左到右把所有节点嵌入到 $y = 0$ 的直线上. 然后, 用引理 12.4.1 和引理 12.4.2 的证明中所建议的过程, 即从图的二连通分解导致一个页嵌入.

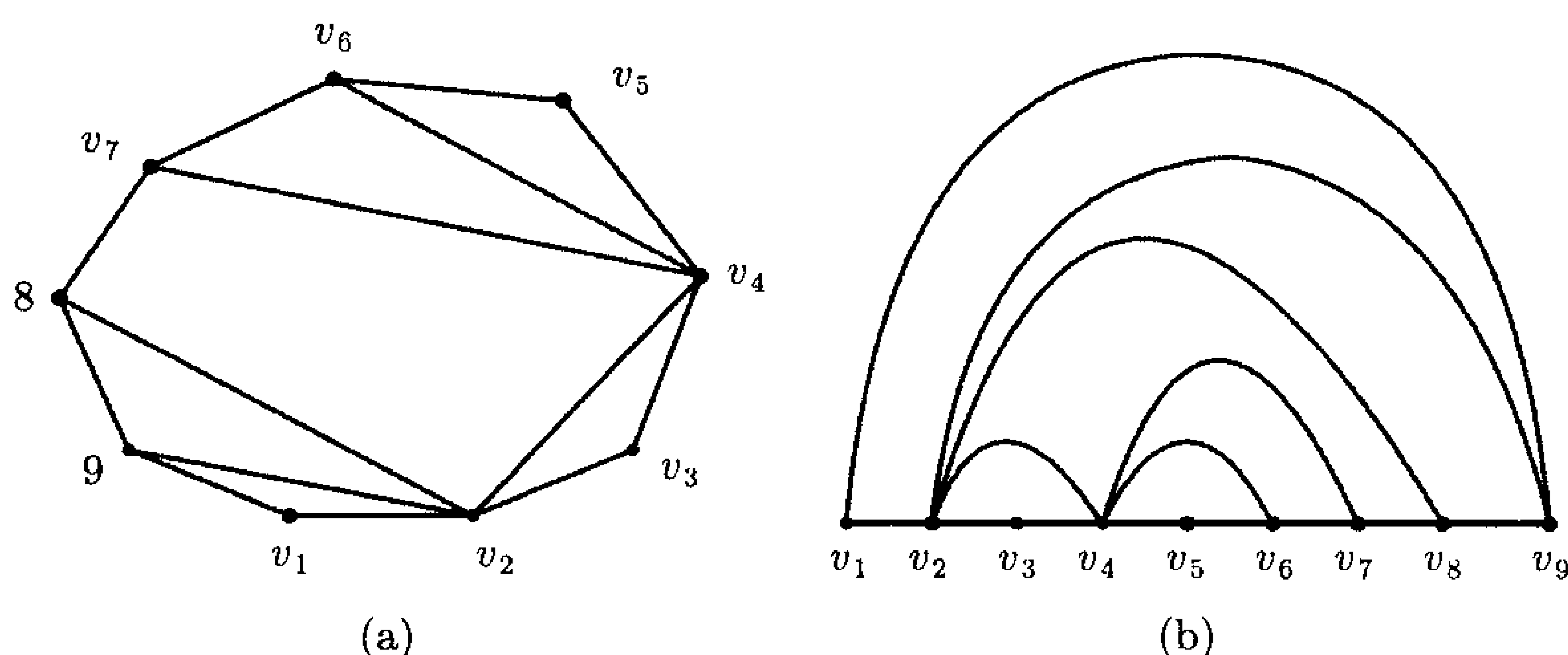


图 12.4.3

必要性. 因为页嵌入实为外平面图的一种平面嵌入, 即得结论. ♮

若一个图 $G=(V,E)$ 的边集 E 有划分 $E=E_1+\cdots+E_k$, 使得

$$\begin{cases} G=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k} G[E_i], \\ V=V(G[E_i]),\ i=1,2,\cdots,k \end{cases} \tag{12.4.1}$$

和所有 $G[E_i](i=1,2,\cdots,k)$ 皆为页可嵌入的, 并且 V 中节点在直线上的次序相同, 则形如 (12.4.1) 式的表示被称为 G 的一个**页分解**. 将图 G 表示为 $G[E_i](i=1,2,\cdots,k)$ 的页嵌入的并, 得其节点全在同一条直线上, 也称这种表示为 G 的一个**书嵌入**. 自然, 需要在页分解中子图的数目越小越好. 在 G 的所有可能的页分解中, 最少的子图数被称为 G 的**页数**. 若一个图的页数为 k, 则称之为 $l(\geqslant k)$**页可嵌入的**.

引理 12.4.3 任何一个图, 若它是某 Hamilton 平面图的子图, 则它必为 2 页可嵌入的.

证 设 G 是一个 Hamilton 平面图, C 是其上的 Hamilton 圈. 因为由引理 8.2.2 总有 $G=G_1\cup G_2$, 使得 $G_1\cap G_2=C$ 且 G_1 与 G_2 皆为外平面图, 故由引理 12.4.2 即得引理的结论. ♮

因为可以证明若 $G=G_1\cap G_2$, 使得 $G_1\cap G_2=\{v\}$, 则 G 的页数为 G_1 和 G_2 页数中的最大者, 但这里 G_1 和 G_2 的页嵌入要保证 v 在直线上为 G_1 节点中的最小者, 同时为 G_2 节点中的最大者, 或反之. 在这里允许只讨论不可分离的图而不失一般性.

定理 12.4.2 一个不可分离的图 G 的页数为 2 当且仅当 G 是某 Hamilton 平面图的子图, 并且有一个子图与 K_4 同胚.

证 充分性. 由引理 12.4.3 可知 G 的页数不大于 2, 而且由于 K_4 的出现, G 不是外平面图. 由定理 12.4.1, G 的页数不小于 2. 充分性得证.

必要性. 由于 G 的页数为 2. 可以假设 G 本身就是一个有 2 页的书嵌入. 当然, G 是一个 Hamilton 平面图的一个子图. 事实上, 只要将在直线上的相继而不相

邻的两节点连上一条边, 即得到一个 Hamilton 平面图. 因为没有与 K_4 同胚的子图的图本身就是外平面图. 由定理 12.4.1, G 必有一个子图与 K_4 同胚. 必要性得证. ♮

设 π 为 $\{1,2,\cdots,\nu\}$ $(=V)$ 上的一个置换, 图 $G=(V,E)$. 对于 π, V 上的一个线性序, 由

$$\pi(i)\prec\pi(j)\Leftrightarrow i<j$$

所确定. 如果按照这个线性序, G 可嵌入到 $k(k\geqslant 1)$ 页上, 则称 G 为 ***k* 页 *π* 可扩张的**. 当然, 一个图为 k 页的当且仅当存在 V 上的一个置换 π, 使得它是 k 页 π 可扩张的.

令 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$. 对于每对边 $e_i=(u_i,v_i)$ 和 $e_j=(u_j,v_j)$, 若在 π 的线性序之下,

$$u_i\prec u_j\prec v_i\prec v_j, \tag{12.4.2}$$

则称 e_i 和 e_j 在 $G=(V,E)$ 中是 **π 交叉的**. 可以引进一个模 2 变量 $x_i(1\leqslant i\leqslant\varepsilon)$ 与边 e_i 关联, 并构造一个模 2 方程组

$$x_i+x_j=\begin{cases}1, & e_i\text{和}e_j\text{为}\pi\text{交叉的},\\ 0, & \text{否则},\end{cases} \tag{12.4.3}$$

其中 $\{i,j\}$ 为对于所有可能的边对 $\{e_i,e_j\}$, $1\leqslant i,\ j\leqslant\varepsilon$, $e_i,e_j\in E$.

定理 12.4.3 对于图 $G=(V,E)$ 的节点集 V 上的一个置换 π, G 为 1 页 π 可扩张的当且仅当方程组 (12.4.3) 有一个解, 使得所有变量不是全取值为 0 就是全取值为 1.

证 在一个 1 页的 π 扩张中, 所有的边对均非 π 交叉的, 从而由 (12.4.3) 式的定义, 即可得必要性.

反之, 从方程 (12.4.3) 的单值 (0 或 1) 的解也可知, 任何一对边均非 π 交叉的, 从而可以将节点按 π 所确定的线性序嵌入到 $y=0$ 的直线上, 而得到 G 的一个 1 页的嵌入. 这就是充分性. ♮

进而, 还可以利用方程 (12.4.3) 表征图 G 的 2 页 π 可扩张性. 若一个图是 2 页 π 可扩张的, 但不是 1 页 π 可扩张的, 则称 G 是**恰 2 页 π 可扩张的**.

定理 12.4.4 对于图 $G=(V,E)$ 的节点集 V 上的一个置换 π, G 是恰 2 页 π 可扩张的当且仅当方程 (12.4.3) 有一组非常数的解.

证 因为从 G 的一个 2 页的 π 扩张, 只要将在一页中所有边相应的变量全取为 0, 而另一页上所有边的相应变量均取为 1, 则可以验证即得方程 (12.4.3) 的一组解. 必要性显然.

反之, 从方程 (12.4.3) 的一组非单值的解出发, 可以将节点按 π 所确定的线性序嵌入到 $y=0$ 直线上. 然后, 将相应变量为 0 的边嵌入到同一页上, 将相应变量为 1 的边全嵌入到另一个面上. 这就得到了 G 的一个 2 页 π 扩张. 充分性得证. ♮

如果图 $G=(V,E)$ 的一个页分解, 使得其中每个子图全是 1 页 π 可扩张的, 则称之为 G 的一个**页π分解**, 其中同上所述, π 是 V 上的一个置换. 在 G 的所有页 π 分解中, 一个页π分解所含子图数目的最小值和最大值分别称为它的**页最小数**和**页最大数**. 事实上, 页最小数就是上面所说的页数.

由方程 (12.4.3) 也可以构造一个所谓 G 的 **π交叉图**, 它的节点相应变量, 或 G 的边, 和两个节点相邻当且仅当它们相应的变量出现在 (12.4.3) 式的同一个方程之中. 根据定理 12.4.3 和定理 12.4.4, 可以利用 π 交叉图得到如定理 7.4.1 形式的相应定理. 进而, 还可以与 12.3 节中类似地讨论带有一些极性的页分解.

12.5 纵 横 分 解

设 $\mu(G)$ 是图 $G=(V,E)$ 的一个平面浸入. 如果所有的边在 $\mu(G)$ 中均为只由水平和竖直线段所组成的折线段, 则称之为 G 的一个**纵横浸入**. 当然, 只有那些节点的次不大于 4 的图才有纵横浸入.

引理 12.5.1 一个图 $G=(V,E)$ 有一个纵横浸入当且仅当 G 没有一个节点的次大于 4.

证 因为在任何一个纵横浸入中, 每一个节点只能有 4 个可能的连边方向, 必要性显然.

反之, 可以从 G 的一个平面浸入得到一个新图的一个平面嵌入, 这个新图 $\tilde{G}$ 为将 G 的浸入中所有两边的交叉点作为节点而得到. 因为只考虑简单二重交叉 (如 6.1 节中所述), 所有新引进的节点的次均为 4, 故 $\tilde{G}$ 仍满足引理条件, 从而由定理 9.1.1 即可导出充分性. ♮

根据引理 12.1.1, 可以称节点次不大于 4 的图为**可纵横的**. 由 G 的一个纵横浸入通过将交叉点作为新节点所得的可平面图, 被称为 G 的**关联平面图**. 关联平面图的由 G 和浸入 $\mu(G)$ 引进交叉点为节点而得到的平面嵌入, 被称为 $\mu(G)$ 的**平面拓展**.

引理 12.5.2 任何一个可纵横的图均可纵横地划到有两侧的平面上, 使得所有水平线段在一侧, 而所有竖直线段在另一侧, 并且在每边上的折, 即水平与竖直线段的公共点处, 穿一个连两侧的通道 (即孔) 就有任何两条边均无其他公共点, 除可能的公共端外.

证 由引理 12.5.1, 可以就图的纵横浸入讨论. 事实上, 任何纵横浸入均可有如引理中所述的表示. ♮

在引理 12.5.2 中所述的一个图的表示, 被称为一个*纵横 2 侧嵌入*. 一个有纵横 2 侧嵌入的图, 被称为*纵横 2 侧可嵌入的*. 当然, 由引理 12.5.1 和引理 12.5.2 可以看出, 一个图是纵横 2 侧可嵌入的当且仅当它是可纵横的.

若一个图 $G=(V,E)$ 的边集 E 可以划分为 $E_1,E_2,\cdots,E_k$, 使得所有边导出子图 $G[E_1],G[E_2],\cdots,G[E_k]$ 全是纵横 2 侧可嵌入的, 则所有这些子图之并, 即 G 本身, 被称为 G 的一个*纵横分解*. 在 G 的纵横分解中, 称它所含子图的最小数为 G 的*纵横 2 侧厚度*, 并记为 $t_{r2}(G)$. 容易看出, 总有关系

$$t_{r2}(G) \geqslant \lceil \Delta(G)/4 \rceil = \lambda(G), \tag{12.5.1}$$

其中 $\Delta(G)$ 为 G 中节点次的最大值.

一个图 $G=(V,E)$, 若它的纵横 2 侧厚度 $t_{r2}(G)=\lambda(G)$, 则称它为*纵横下可嵌入的*. G 的一个纵横分解, 使得其中子图的数目为 $\lambda(G)$, 则称之为 G 的*纵横下分解*.

为了求一个图 G 的纵横分解尽量接近其纵横下分解, 自然会建议我们求*极大或最大可纵横的子图*, 即使得不能再加边, 同时保证每个节点的次不大于 4, 或者度最大的这种子图.

这里仅讨论求这种最大子图的问题. 事实上, 可以将它变换为求最大对集的问题.

令 $G=(V,E)$ 是一个图. 当然, 不一定是可平面的. 对于 $v\in V$, 记

$$\begin{cases} P(v)=\{v(e)|\forall e\in E_v\}, \\ Q(v)=\{v_i|i=1,2,3,\cdots,\rho(v)-4\}, \end{cases} \tag{12.5.2}$$

其中 E_v 为与 v 关联的边的集合, $\rho(v)$ 为在 G 中节点 v 的次. 构造一个与 G 关联的图 $G'=(V',E')$ 如下:

$$\begin{cases} V'=\displaystyle\sum_{v\in V}\big(P(v)+Q(v)\big), \\ E'=\displaystyle\sum_{(u,v)\in E}E(K_{P(u),P(v)})+\sum_{v\in V}E(K_{P(v),Q(v)}), \end{cases} \tag{12.5.3}$$

其中 $K_{X,Y}, X=P(v)$ 或 $P(u)$, $Y=P(v)$ 或 $Q(v)$ 为以 X 和 Y 为两个节点独立集的完全二部图, 并称 G' 为 G 的*扩充*. 为方便起见, 还记

$$\begin{cases} P=\displaystyle\sum_{v\in V}P(v), \\ Q=\displaystyle\sum_{v\in V}Q(v). \end{cases}$$

容易验证, 若 H 是 G 的一个可纵横的子图, 则 H 相应 G' 中的一个使 Q 被饱和的对集.

引理 12.5.3 若 M' 是 G 的扩充 G' 的一个饱和 Q 的最大对集, 则对于 $v \in V$, 在 M' 上将 $P(v)$ 中不与 $Q(v)$ 相邻的所有节点收缩到一个节点所得与 Q 无关的图, 是 G 的节点次不大于 4 的最大子图.

证 首先, 在 M' 上对于 $v \in V$, 由收缩 $P(v)$ 中不与 $Q(v)$ 相邻的节点为一个节点, 去掉那些与 $Q(v)$ 关联的 M' 中边的二端点得一个图 H. 容易验证, $V(H) \subseteq V$ 且 H 是 G 的一个子图. 然后, 由 G' 的构造也可验证, 所有 H 的节点均为次不大于 4 的, 其理由是由 Q 被 M' 所饱和, 对任何 $v \in V$, 至少在 $P(v)$ 中有与 $Q(v)$ 的节点数相同的节点被 M' 饱和. 最后, 证 H 是最大的. 用反证法. 假若 $H_1 \neq H$ 是 G 的一个最大的可纵横的子图. 从 H' 出发, 可以求出一个 G' 中的对集 M_1', 使得同样饱和 Q. 记 H_1 为在 M_1' 上收缩相应的 P 中的节点, 去掉与 Q 关联的边的端点所得的图. 同样, H_1 也是 G 的可纵横的子图. 然而, 这时从 $|E(H_1)| > |E(H)|$ 可得

$$|E(M_1')| - |E(M')| = |E(H_1) - E(H)| > 0.$$

与 M' 是 G' 中一个最大对集矛盾. ♮

至此, 也许有人想要知道一个图有 4 正则支撑子图的条件, 因为它在讨论一个正则图的纵横下可分解性时尤为重要.

定理 12.5.1 一个图 G 有 4 正则的支撑子图当且仅当它的扩充 G' 有一个完美对集.

证 与引理 12.5.3 的证明类似. 事实上, 完美对集本身也是一个最大对集 M'. 不过, 这时相应子图 H 是 4 正则的, 即得定理的结论. ♮

如果在一个图 G 的纵横分解中, 所有子图皆为可平面的, 则称它为 G 的一个*纵横平面分解*. 当然, 一个纵横平面分解就是这样的一个平面分解, 使得所有子图均为纵横可嵌入的. 一个图 G 的纵横平面分解中所含子图数的最小值被称为 G 的*纵横厚度*, 用 $t_r(G)$ 表示. 对此, 仍然有

$$t_r(G) \geqslant \lambda(G), \tag{12.5.4}$$

其中 $\lambda(G)$ 为由 (12.5.1) 式所确定的. 显然, 由定义即知还有

$$t_r(G) \geqslant t_{r2}(G). \tag{12.5.5}$$

基于上述和 12.3 节中所讨论的, 可以用两种方式如对于纵横 2 侧厚度和一般厚度所用过的那样讨论纵横厚度.

12.6 注　记

(1) 确定一个图的割点或二连通分解的其他准则可以参见文献(Shirey, R.W.[1]). 在那里, 也许是第一次提供了一个算法. 不管怎样, 这个算法的计算复杂性为 $O(\nu\varepsilon)$.

(2) 图的 3 连通分解的想法是由 MacLane 于 1937 年首先提出的, 参见文献 (MacLane, S.[1]). 为这种分解设计的第一个线性时间算法出现在 1973 年. 那时, Hopcroft 和 Tarjan 用以作为判定图的平面性的准备步骤, 参见文献 (Hopcroft, J.-R. Tarjan[4]).

(3) 事实上, 判定一个图的平面性的许多算法, 或多或少可以作为求一个图的极大平面子图的出发点, 可参见文献 (Auslander, L.-S.V. Parter[AP1], Brehaut, W.M.[1], Dambit, Ja.[1], Demoucron, G.-Y. Malgrange-R. Pertuiset[1], Engle, W.L.[1], Fisher, G.J.[1], Fisher, G.J.-O. Wing[1], Goldstein, A.J.[1], Goldstein, A.J.-D.G. Schweikert[1], Hopcroft, J.-R. Tarjan[1,5], Hotz, G.[1,2], Jayakumar, R.-K. Thulasiraman-M.N.S. Swamy[1], Knauer, B.[3], Lempel, A.-S. Even-I. Cederbaum[1], Lin, P.M.[1], Rubin, F.[2,3], Shih, Z.C.-R.C.T. Lee-S.N. Yang[1], Shirakawa, I.-H. Takahashi-H. Ozaki[1], Ulrich, J.W.[1], Willamson, S.G.[1], Wing, O.[1]) 等. 当然, 为此尚需进一步研究要作哪些必要的处理.

(4) 关于一些特殊类型图的厚度以及与其他不变量的关系, 可参见文献 (Alekseev, V.B.-V.S. Gonchakov[1], Beineke, L.-F. Harary[1,3], Beineke, L.-F. Harary-J.W. Moon[1], Battle, J.-F. Harary-Y. Kodama-J.W.T. Youngs[1], Bose, N.K.-K.A. Prabhu[1], Hobbs, A.M.[1], Hobbs, A.M.-G.W. Grossman[1,2], Kleinert, M.[1], Tutte, W.T.[1,2]) 等.

(5) 关于一般图的平面分解的算法, 还可参见文献 (Jayakumar, R.[1], Melikhov, A.N.-V.M. Kuleychik-V.V. Lisyak[1], Shirakawa, I.-H. Takaha- shi-H. Ozaki[1,2]) 等. 当然, 按照定理 12.3.1 的说法, 求一个非可平面图的一个最大可平面子图, 即使 T 最大可平面子图都不是容易的.

(6) 关于书嵌入的问题与算法, 可见综述文章 (Chung, F.R.K.-F.T. Leighton-A.L. Rosenberg[1]). 一般来说, 确定一个图的页数是困难的. 然而, 已经知道可平面图的页数至多为 4, 参见文献 (Yannakakis, M.[1]). 如果两页被视为与平面等价, 则容易证明任何图均有书上的一个嵌入, 使得至多有三页, 参见文献 (White, A.T.[1]).

(7) 纵横分解的问题来源于超大规模集成电路的设计. 与此有关的许多问题的模型和解法, 可参见文献 (Akers, S.B.-F.O. Hadlook[1], Batini, C.-M. Talamo-R. Tamassia[1], Becker, B.[1], Becker, B.-G. Hotz[1], Braun, D.[1], Chen, R.W.-Y. Kajitani-S.P. Chan[1], Clarke, E.M.-Y. Feng[1], van Cleemput, W.M.[1], van Cleem-

put, W.M.-J.G. Linders[1], Cohoon, J.P.-P.L. Heck[1],Cong, J.-D.F.Wong-C.L. Liu[1], Du, D.-Y. Zhang[1], Engle, W.L.[2], Engle, W.L.-D.A. Mylnski[1], Fisk, C.J.-D.L. Caskey-L.L. West[1], Fletcher, A.J.[1], Frederickson, G.N.-R. Janardan[1], Gerez, S.H.-O.E. Herrmann[1], Gonzalez, T.F.-S.L. Lee[1], Gonzalez, T.F., et al[1], Gonzalez, T.F.-S. Q. Zheng[1], Goto, S.-E.S. Kuh[1], Kapoor, S.-P. Ramanan[1], Kauffman, L.H.[1], Kodres, U.R.[1,2], Lodi, E.-F. Luccio-L. Pagli[1], Owens, A.B.[1], Rim, C.S,et al[1], Rosenstiehl, P.[1], Rosenstiehl, P.-R. Tarjan[1], Sarrafzadeh, M.-D.T. Lee[1], Schweikert, D.G.-B.W. Kermighan[1], Tamassia, R.[1], Thomassen, C.[2], Ting, B.S.-E.S. Kuh-I. Shirakawa[1,2], Valiant, L.G.[1], Vanlier, M.C.-R.H. Otten[1], Wong, D. F.[1], Yao, X.-M. Yamada-C.L. Liu[1], Yoshida, K.-T. Nakagawa[1]) 等.

(8) 本章的主要结果是从平面性辅助图出发而得到的. 这类图似第一次在 1978 年出现在文献 (Liu, Y.P.[1]) 中. 之后, 在文献 (Liu, Y.P.[19], Liu, Y.P.[23,24]) 中得到了发展. 同时, 在文献 (Fraysseix, H.-P. Rosenstiehl[1,2], Liu, Y.P.[22], Rosenstiehl, P.[Ro3], Sun, X.R.[1,2], Xu, W.X.[1]) 等中也可以见到. 定理 12.3.1 的原始说法在文献 (Liu, Y.P.[25]) 中.

(9) 与图的分解有关的新进展, 还可参见文献 (Liu, Y.P.[29]). 在纵横嵌入方面, 可参见文献 (Liu, Y.P.[27,28], Cui, X.F.-Y.P. Liu[1], Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi[1], Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi-B. Simeone[1,2], Liu, Y.P.-A. Morgana-B. Simeone[1∼6], Liu, Y.P.[30]) 等.

第 13 章　曲面可嵌入性

13.1　树迁定理

本节采用于 1979 年在文献 Liu, Y. P. [8, 9] 中提出的研究路线, 即从具备一定性质 (那里是深探树, 在本书第一版中用确向树), 由一个图所有边衍生树的平面嵌入为出发点, 通过非拓扑运算, 直到形成这个图的曲面嵌入.

下面将会看到这种限定性质是不必要的. 那里仅讨论与最大亏格嵌入有关的问题, 而这里讨论此研究路线的普遍意义.

虽然基本思想可以看成联树模型的前身, 下面将会看出在路线上, 与联树有本质的差异. 联树本身确定了其基准图的一个曲面嵌入. 此处是从树的平面嵌入通过复原悬挂点到给定图的节点, 形成这个图的所有曲面嵌入.

给定一个图 $G = (V, E)$, 令 T 为 G 上的一个支撑树. 若将每一个上树边添加在 T 上作为悬挂边, 这样由 G 所有边引出的树被称为其**延伸树**, 用 $\check{T}$ 表示.

通过树 T 或圈的定向, 将延伸树 $\check{T}$ 定向. 为了使得这个定向在选定 G 节点旋和 T 根节点之下适定, 总是将上树边的方向选为沿 T 的边界的一个方向, 从先遇到的端点到后遇到的端点. 为方便起见, 节点用根节点 0 和其他节点沿 T 的这个边界方向第一次遇到次序的自然数代替.

在 $\check{T}$ 上的悬挂点, 保留与 G 上相应节点数字相同. 图 13.1.1(a) 给出 K_5(即 5 阶完全图) 的一个支撑树 T, 用粗实线表示; 图 13.1.1(b) 为 T 的一个延伸树 $\check{T}$.

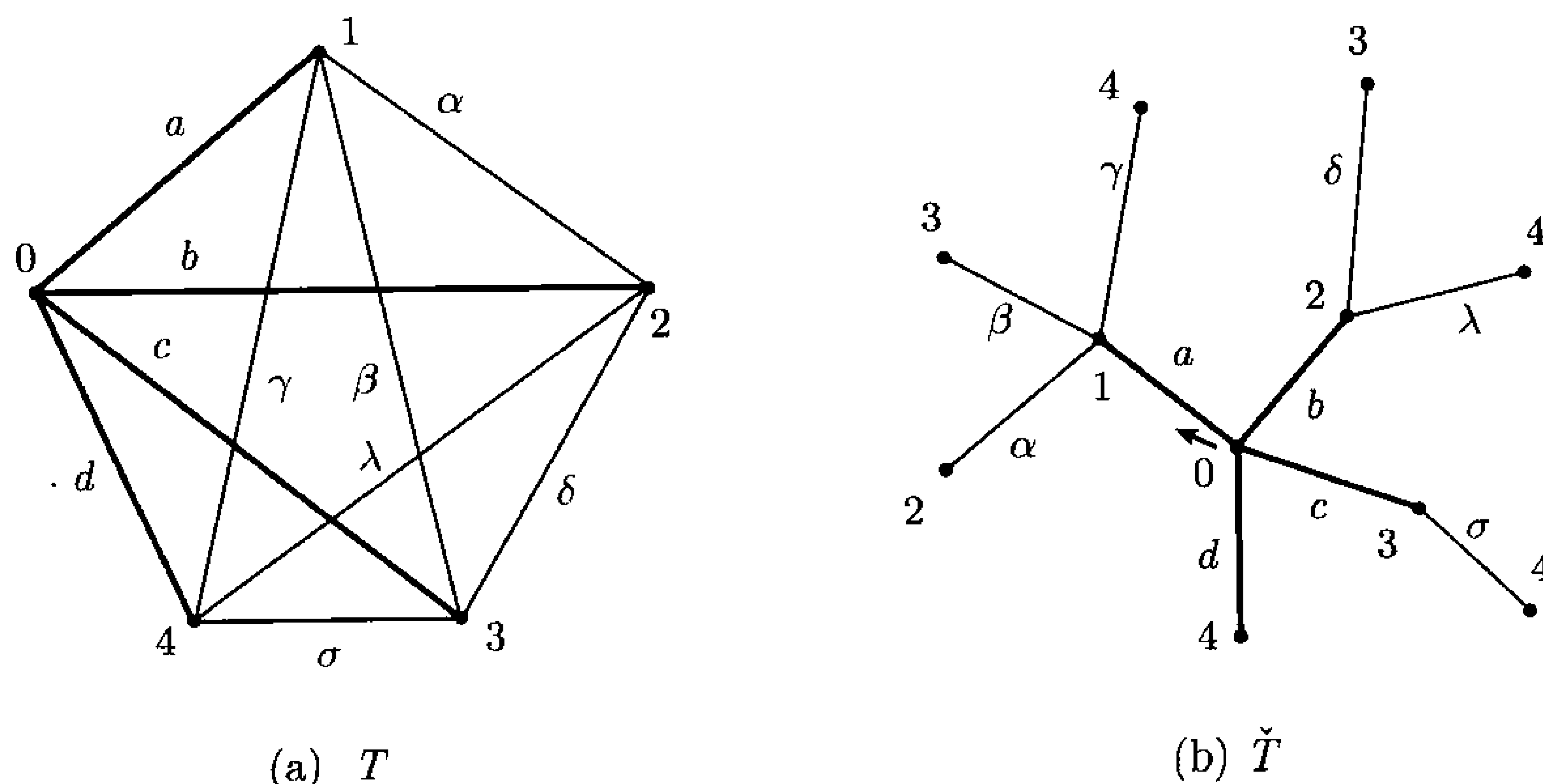


图 13.1.1

令 $C = C(V; e)$ 为由 0 开始沿 $\breve{T}$ 的边界所得的迁, 或称树迁. 可以看出, 这个迁所给出的边序列 $C = C(e)$ 为图 $G = (V, E)$ 的一个 (边) 二重覆盖. 记

$$C(V; e) = 0P_{0,i_1}v_{i_1}P_{i_1,i_2}v_{i_2}P_{i_2,i'_1}v_{i'_1}P_{i'_1,i'_2}v_{i'_2}P_{i'_2,2\epsilon}0, \tag{13.1.1}$$

其中 $\epsilon = |E|$.

对于一个由节点和边组成的序列 Q, 用 $[Q]_{\text{eg}}$ 表示将 Q 中的节点忽略后的边序列, 则 $C_{\text{eg}} = [C(V; e)]_{\text{eg}}$ 为一个单面形.

例 13.1.1 从图 13.1.1(b) 中的 $\breve{T}$ 得树迁

$$C(V; e) = 0P_{0,8}0P_{8,14}0P_{14,18}0P_{18,20}0,$$

其中 $v_0 = v_8 = v_{14} = v_{18} = v_{20} = 0$,

$$\begin{cases} P_{0,8} = a1\alpha2\alpha^{-1}1\beta3\beta^{-1}1\gamma4\gamma^{-1}1a^{-1}, \\ P_{8,14} = b2\delta3\delta^{-1}2\lambda4\lambda^{-1}2b^{-1}, \\ P_{14,18} = c3\sigma4\sigma^{-1}3c^{-1}, \\ P_{18,20} = d4d^{-1}. \end{cases}$$

对于一个自然数 i, 若 av_ia^{-1} 是 C 中的一段, 则 a 被称为反射边, v_i 称为 a 的反射点.

因为图中的悬挂点 (即 1 次节点) 和 2 次节点对于嵌入无关紧要, 下面所要讨论的图总是默认节点次不小于 3, 这就是总可以只考虑反射边都是上树边.

如果在 (13.1.1) 式中, v_{i_1} 与 v_{i_2} 都是反射点, 它们的反射边皆为上树边, 在 G 中相邻且 $v_{i'_1} = v_{i_1}$ 与 $v_{i'_2} = v_{i_2}$, $[P_{v_{i_1},i_2}]_{\text{eg}} \cap [P_{v_{i'_1},i'_2}]_{\text{eg}} = \varnothing$, 但 $v_{i'_1}$ 与 $v_{i'_2}$ 都不是反射点 (除非是树的悬挂点, 如果考虑的话!), 则称从 C 到

$$\Delta_{v_{i_1},v_{i_2}}C(V; e) = 0P_{0,i_1}v_{i_1}P_{i'_1,i'_2}v_{i_2}P_{i_2,i'_1}v_{i'_1}P_{i_1,i_2}v_{i'_2}P_{i'_2,0}0 \tag{13.1.2}$$

的变换为对 $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$ 作一次换段, 也就是将端点相同的两端互换.

例 13.1.2 在例 13.1.1 的 $C = C(V; e)$ 中, $v_2 = 2$ 和 $v_4 = 3$ 是两个反射点, 它们的反射边分别为 α 和 β, $v_9 = 2$ 和 $v_{15} = 3$. 对 C 作一次换段得

$$\Delta_{2,3}C = 0P_{0,2}2P_{9,15}3P_{4,9}2P_{2,4}3P_{15,20}0 \ (= C_1),$$

其中

$$\begin{cases} P_{0,2} = a1\alpha \ (= P_{1;0,2}), \\ P_{9,15} = \delta 3\delta^{-1}2\lambda 4\lambda^{-1}2b^{-1}0c3 \ (= P_{1;2,8}), \\ P_{4,9} = \beta^{-1}1\gamma 4\gamma^{-1}1a^{-1}0b2 \ (= P_{1;8,13}), \\ P_{2,4} = \alpha^{-1}1\beta \ (= P_{1;13,15}), \\ P_{15,20} = \sigma 4\sigma^{-1}3c^{-1}0d4d^{-1} \ (= P_{1;15,20}). \end{cases}$$

引理 13.1.1　单面形 $\Delta_{v_i,v_j}C_{\rm eg}$ 是可定向的当且仅当 $C_{\rm eg}$ 是可定向的, $\Delta_{v_{i_1},v_{i_2}}C_{\rm eg}$ 的可定向亏格比 $C_{\rm eg}$ 大 1.

证　因为 Δ 运算保持单面形的可定向性不变, 前一个结论成立. 为证后一个结论, 设上树边 α 和 β 分别是 v_{i_1} 和 v_{i_2} 处的反射边. 因为

$$C_{\rm eg} = A\alpha\alpha^{-1}B\beta\beta^{-1}CDE,$$

其中

$$A\alpha = [P_{0,i_1}]_{\rm eg}, \quad \alpha^{-1}B\beta = [P_{i_1,i_2}]_{\rm eg},$$
$$\beta^{-1}C = [P_{i_2,i_1'}]_{\rm eg}, \quad D = [P_{i_1',i_2'}]_{\rm eg}, \quad E = [P_{i_2',i_\epsilon}]_{\rm eg},$$

则有

$$\begin{aligned} \Delta_{v_{i_1},v_{i_2}}C_{\rm eg} &= A\alpha D\beta^{-1}C\alpha^{-1}B\beta E \\ &\sim_{\rm top} ABCDE\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \ (\text{推论 } 2.4.1) \\ &= C_{\rm eg}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \ (\text{曲面性 } 1, \text{ 见 } 2.5 \text{ 节}), \end{aligned}$$

从而后一个结论成立.　♮

如果在 C 上可以相继作 k 次换段, 则称 C 为一个 k**树迁**. 因为每次换段减少一对反射边, 在 C 上至多有 $m = \lfloor \beta/2 \rfloor$ 对反射边, 于是有 $0 \leqslant k \leqslant m$, 其中 $\beta = \beta(G)$ 为图 G 的 Betti 数, 或圈秩. 当 $k = m$ 时, C 也被称为**正规的**.

对于图 G 上的一个 k 树迁 $C_k(V;e,e^{-1})$, 图 G_k 被定义为

$$G_k = T \ \bigcup \left[E_{\rm ref} \bigcap E_{\bar{T}} - \sum_{j=1}^{k} \{e_j, e_j'\} \right], \tag{13.1.3}$$

其中 T 为支撑树, $[X]$ 表示边子集 X 导出子图, $e \in E_{\rm ref}$, $e \in E_{\bar{T}}$, $\{e_j, e_j'\}$ 分别为反射边、上树边、用于换段的反射边对.

例 13.1.3　在例 13.1.2 中的 C_1 上, $v_{1;3} = 3$ 和 $v_{1;5} = 4$ 是两个反射点, $v_{1;8} = 3$, $v_{1;10} = 4$. 对 C_1 作换段得

$$\Delta_{3,4}C_1 = 0P_{1;0,10}3P_{1;17,19}4P_{1;12,15}3P_{1;10,12}4P_{1;19,20}0 \ (= C_2),$$

其中

$$P_{1;0,10}=a1\alpha2b^{-1}0c3\beta^{-1}1\gamma4\gamma^{-1}1a^{-1}0b2\delta(=P_{2;0,10}),$$
$$P_{1;17,19}=c^{-1}0d(=P_{2;10,12}),\quad P_{1;12,15}=\lambda^{-1}2\alpha^{-1}1\beta3\sigma4\sigma^{-1}(=P_{2;12,17}),$$
$$P_{1;10,12}=\delta^{-1}2\lambda(=P_{2;17,19}),\quad P_{1;19,20}=d^{-1}(=P_{2;19,20}).$$

因为在 C_2 上只有 $v_{2;6}=4$ 和 $v_{2;16}=4$ 两个反射点的反射边为上树边 γ 和 σ, 而另外 $v_{2;12}=4$ 和 $v_{2;19}=4$ 却使得 $[P_{2;6,16}]_{\rm eg}\cap[P_{2;12,19}]_{\rm eg}\neq\varnothing$, 不能再换段了. 此情之下, 由图 13.1.1(b) 给出的延伸树 $\breve{T}$ 提供一个 2 树迁 C, 自然也是 1 树迁.

然而, 如果按照上树边对 $\{\beta,\gamma\}$, $\{\delta,\lambda\}$ 和 $\{\alpha,\sigma\}$ 的次序作换段, 又从下面的过程可知 C 还是一个 3 树迁.

在例 13.1.1 的 C 中, β 和 γ 的反射点分别是 $v_4=3$ 和 $v_6=4$, 选 $4'=15$ 和 $6'=19$, 则有

$$\varDelta_{4,6}C=0P_{1;0,4}3P_{1;4,8}4P_{1;8,17}3P_{1;17,19}4P_{1;19,20}0(=C_1),$$

其中

$$P_{1;0,4}=P_{0,4},\quad P_{1;4,8}=P_{15,19},\quad P_{1;8,17}=P_{6,15},$$
$$P_{1;17,19}=P_{4,6},\quad P_{1;19,20}=P_{19,20}.$$

在 C_1 中, δ 和 λ 的反射点足标分别为 5 和 8, 选 $5'=17$ 和 $8'=19$, 则有

$$\varDelta_{5,8}C_1=0P_{2;0,5}3P_{2;5,7}4P_{2;7,16}3P_{2;16,19}4P_{2;19,20}0(=C_2),$$

其中

$$P_{2;0,12}=P_{1;0,12},\quad P_{2;12,14}=P_{1;17,19},\quad P_{2;14,17}=P_{1;14,17},$$
$$P_{2;17,19}=P_{1;12,14},\quad P_{2;19,20}=P_{1;19,20}.$$

在 C_2 中, α 和 σ 的反射点足标分别为 2 和 5, 选 $2'=18$ 和 $5'=19$, 则有

$$\varDelta_{5,8}C_2=0P_{3;0,2}3P_{3;2,3}4P_{3;3,16}3P_{3;16,19}4P_{3;19,20}0(=C_3),$$

其中

$$P_{3;0,2}=P_{2;0,2},\quad P_{3;2,3}=P_{2;18,19},\quad P_{3;3,16}=P_{2;5,18},$$
$$P_{3;16,19}=P_{2;2,5},\quad P_{3;19,20}=P_{2;19,20}.$$

由 $\beta(K_5)=6$ 可知 $m=3=\lfloor\beta/2\rfloor$, 从而树迁 C 是正规的.

例 13.1.3 启示我们确定图的最大亏格问题, 也可以转化为求图的一个 k 树迁, 使得 k 最大. 相关研究可参见文献 (Liu, Y. P. [46]).

引理 13.1.2　在一个图 G 的所有 k 树迁中, k 的最大值就是 G 的可定向最大亏格 $\gamma_{\max}(G)$.

证　为了证明这个引理, 首先要注意到如下两个事实 (不难用归纳法证明!):

事实 1　在所考虑的连通图 G 中, 存在一个支撑树, 使得任何两个上树边, 只要它们所在的两个基本圈有公共边, 这两个上树边就相邻.

事实 2　对于满足事实 1 的支撑树 T, 存在一种定向, 使得在其延伸树 $\check{T}$ 上, 无两个奇出上树边邻次悬点处从一个的次悬点, 在 G 中, 有一条到另一个次悬点的路.

因为任何两个上树边, 如果对一个支撑树, 它们的基本圈无公共边, 则它们对任何支撑树都不可能有公共边. 事实 1 允许求出一个支撑树, 使得相邻的上树边最多. 事实 2 允许在扩充树上求出一种定向, 使得相继作换段最多, 从而由引理 13.1.1 即可得引理的结论. ♮

定理 13.1.1　图 G 可嵌入到亏格 k 的可定向曲面上当且仅当存在 k 树迁 $C_k(V;e)$, 使得 G_k 是平面的.

证　必要性. 令 $\mu(G)$ 为 G 在可定向亏格 k 曲面上的一个嵌入. 由引理 13.1.2, 在 $\mu(G)$ 中存在一个支撑树 T 和其上树边的子集 E_0, $|E_0| = \beta(G) - 2k$, 使得 $\hat{G} = G - E_0$ 只有一个面. 依次作 k 次换段的逆, 即得 $\hat{G}$ 的一个 k 树迁. 令 K 为由这 k 对上树边组成的边子集, 从而由 2.4 节中的运算 2, $G_k = G - K = \hat{G} - K + E_0$ 是平面的.

充分性. 因为 G 有 k 树迁 $C_k(V;e)$, 令 K 为可相继作 k 次换段所用 k 对上树边的集合. 由于 $G_k = G - K$ 是平面的, 在其平面嵌入上, 对 $C_k(V;e)$ 相继作 k 次换段逆, 即得 G 在亏格 k 可定向曲面上的一个嵌入. ♮

例 13.1.4　在例 13.1.1 中, 对于 $G = K_5$, C 为其上对于上树边对 α 和 β 的 1 树迁, 而且 $G_1 = K_5 - \{\alpha, \beta\}$ 是平面的. 它的平面嵌入为

$$\begin{cases} [4\sigma^{-1}3c^{-1}0d4]_{\rm eg} = (\sigma^{-1}c^{-1}d), \quad [4d^{-1}0a1\gamma4]_{\rm eg} = (d^{-1}a\gamma), \\ [3\sigma4\lambda^{-1}2\delta3]_{\rm eg} = (\sigma\lambda^{-1}\delta), \quad [0c3\delta^{-1}2b^{-1}0]_{\rm eg} = (c\delta^{-1}b^{-1}), \\ [2\lambda4\gamma^{-1}1a^{-1}0b2]_{\rm eg} = (\lambda\gamma^{-1}a^{-1}b). \end{cases}$$

将 $\{\alpha, \beta\}$ 恢复到 G 中, 对 C 作一次换对得 C_1. 由 C_1 在 G_1 平面嵌入的基础上, 产生 G 在亏格 1 可定向曲面 (即环面) 上的一个嵌入

$$\begin{cases} [4\sigma^{-1}3c^{-1}0d4]_{\rm eg} = (\sigma^{-1}c^{-1}d), \quad [4d^{-1}0a1\gamma4]_{\rm eg} = (d^{-1}a\gamma), \\ [3\sigma4\lambda^{-1}2\delta3\beta^{-1}1a^{-1}0b2\alpha^{-1}1\beta3]_{\rm eg} = (\sigma\lambda^{-1}\delta\beta^{-1}a^{-1}b2\alpha^{-1}\beta), \\ [0c3\delta^{-1}2b^{-1}0]_{\rm eg} = (c\delta^{-1}b^{-1}), \quad [2\lambda4\gamma^{-1}1\alpha2]_{\rm eg} = (\lambda\gamma^{-1}\alpha). \end{cases}$$

用类似的方式可以讨论不可定向的情形. 令 $G=(V,E)$, 其上支撑树 T,

$$C(V;e)=0P_{0,i}v_iP_{i,j}v_jP_{j,2\epsilon}0 \tag{13.1.4}$$

为由 0 开始沿 $\check{T}$ 的边界所得的迁. 如果 v_i 是一个反射点, $v_j=v_i$, 则

$$\tilde{\Delta}_\xi C(V;e)=0P_{0,i}v_iP_{i,j}^{-1}v_jP_{j,2\epsilon}0 \tag{13.1.5}$$

被称为由在 $C(V;e)$ 上对反射点 v_i 作一次**反段**所得.

如果在 C 上可以相继作 k 次反段, 则称 C 为一个 $\tilde{k}$**树迁**. 因为每次反段减少一条反射边, 在 C 上至多有 β 条反射边 (总可通过适当选择树的根节点使得无反射边是树边!), 则有 $0\leqslant k\leqslant\beta$, 其中 $\beta=\beta(G)$ 为图 G 的 Betti 数, 或圈秩. 当 $k=\beta$ 时, C 也被称为**扭正规的**.

引理 13.1.3 一个连通图是扭正规的当且仅当它不是树.

证 因为树本身无上树边, 不能作反段运算, 从而有必要性. 反之, 因为一个图不是树, 由连通性就必有圈, 在它的树迁上至少有一个反射点. 因为对一个反射边作反段, 不影响其他反射边, 就使得总能相继作 $\beta=\beta(G)$ 次反段, 这个树迁是扭正规的, 从而有充分性. ♮

引理 13.1.4 令 C 为在一个图的树迁上作至少一次反段所得到的. 单面形 $[\Delta_iC]_{\rm eg}$ 是不可定向的, 它的不可定向亏格

$$\tilde{g}([\Delta_\xi C]_{\rm eg})=\begin{cases}2g(C)+1, & C\ 可定向,\\ \tilde{g}(C)+1, & C\ 不可定向.\end{cases} \tag{13.1.6}$$

证 因为在树迁上作第一次反段, 使它从可定向到不可定向, 继之仍保持不可定向形不变, 则有引理的第一个结论. 假若 $C_{\rm eg}$ 是可定向的且亏格为 $g(C)$(以后将用的只是 $g(C)=0$ 的情形). 因为

$$[\Delta_iC]_{\rm eg}=A\xi B^{-1}\xi C,$$

其中 $[P_{0,i}]_{\rm eg}=A\xi$, $[P_{i,j}]_{\rm eg}=\xi^{-1}B$, $[P_{j,\epsilon}]_{\rm eg}=C$. 由推论 2.4.2,

$$[\Delta_iC]_{\rm eg}\sim_{\rm top}ABC\xi\xi.$$

注意到由 2.4 节中的运算 0, 则有 $C_{rseg}\sim_{\rm top}ABC$. 由定理 2.5.1 知

$$\tilde{g}([\Delta_\xi C]_{\rm eg})=2g([C]_{\rm eg})+1=2g(C)+1.$$

假若 $C_{\rm eg}$ 是不可定向的且亏格为 $g(C)$. 因为 $C_{\rm eg}=A\xi\xi^{-1}BC\sim_{\rm top}ABC$, 就有 $\tilde{g}([\Delta_\xi C]_{\rm eg})=\tilde{g}(C)+1$. ♮

实际上, 在树迁上只用反段这一种运算, 就足以十分有效地求出一个图的不可定向最大亏格.

引理 13.1.5　除树外, 任何连通图的不可定向最大亏格均为它的 Betti 数.

证　由引理 13.1.3 和引理 13.1.4, 即可得引理的结论. ♮

对于图 G 上的一个 $\tilde{k}$ 树迁 $C_{\tilde{k}}(V;e)$, 图 $G_{\tilde{k}}$ 被定义为

$$G_{\tilde{k}} = T \bigcup \left[E_{\text{ref}} - \sum_{j=1}^{k} \{e_j\} \right], \tag{13.1.7}$$

其中 T 为支撑树, $[X]$ 表示边子集 X 导出子图, $e \in E_{\text{ref}}$ 与 $\{e_j, e'_j\}$ 分别为反射边与用于反段的反射边.

定理 13.1.2　图 G 是可嵌入到亏格 k 不可定向曲面的当且仅当存在 $\tilde{k}$ 树迁 $C_{\tilde{k}}(V;e)$, 使得 $G_{\tilde{k}}$ 是平面的.

证　由引理 13.1.3, 对于 $k\,(1 \leqslant k \leqslant \beta(G))$, 任何非树的连通图 G 都有 $\tilde{k}$ 树迁.

必要性. 因为 G 可嵌入到亏格 k 不可定向曲面 $S_{\tilde{k}}$, 令 $\tilde{\mu}(G)$ 是 G 在 $S_{\tilde{k}}$ 上的一个嵌入. 由引理 13.1.5, 在 $\tilde{\mu}(G)$ 中存在一个支撑树 T 和其上树边的子集 E_0, $|E_0| = \beta(G) - k$, 使得 $\tilde{G} = G - E_0$ 只有一个面. 依次作 k 次反段的逆, 即得 $\tilde{G}$ 的一个 $\tilde{k}$ 树迁. 令 K 为由这 k 条上树边组成的边子集, 从而由 2.4 节中的运算 2, $G_{\tilde{k}} = G - K = \tilde{G} - K + E_0$ 是平面的.

充分性. 因为 G 有 $\tilde{k}$ 树迁 $C_{\tilde{k}}(V;e)$, 令 K 为可相继作 k 次反段所用 k 条上树边的集合. 由于 $G_{\tilde{k}} = G - K$ 是平面的, 在其平面嵌入的基础上, 对 $C_{\tilde{k}}(V;e)$ 相继作 k 次换段, 即得 G 在不可定向亏格 k 曲面 $S_{\tilde{k}}$ 上的一个嵌入. ♮

例 13.1.5　在 $K_{3,3}$ 上, 取一个支撑树 T, 如图 13.1.2(a) 中粗边所示. 在图 13.1.2(b) 中, 给出 T 的一个延伸树 $\check{T}$. 从 $\check{T}$ 得到树迁

$$C = 0P_{0,11}2P_{11,15}2P_{15,0}0 \ (= C_0),$$

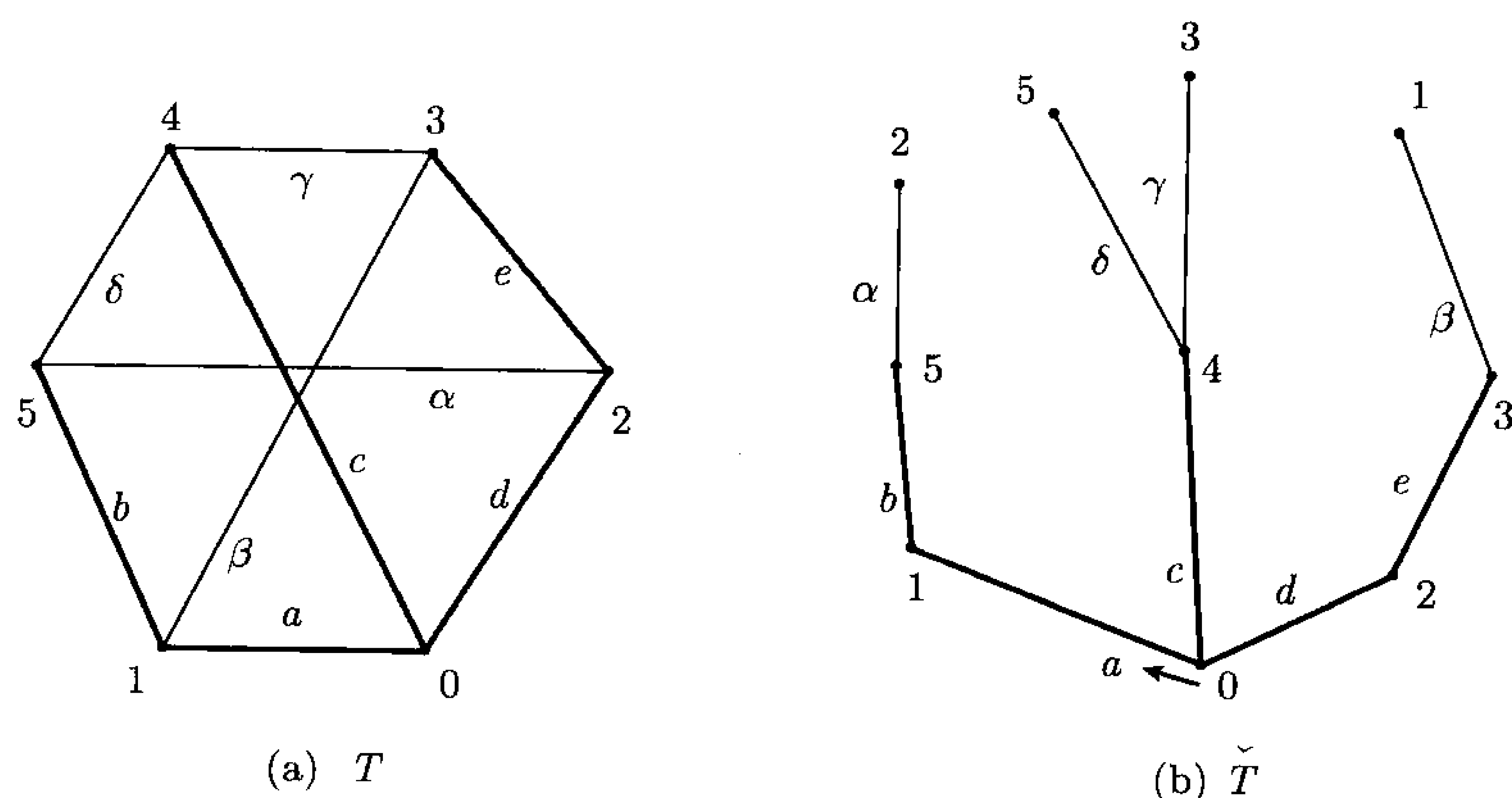
其中在尾端, $v_0 = v_{18}$,

$$P_{0,11} = c4\delta5\delta^{-1}4\gamma3\gamma^{-1}4c^{-1}0d2e3\beta1\beta^{-1}3e^{-1},$$
$$P_{11,15} = d^{-1}0a1b5\alpha, \quad P_{15,0} = \alpha^{-1}5b^{-1}1a^{-1}.$$

因为 $v_{15} = 2$ 为上树边 α 的反射点, $v_{11} = v_{15}$, 则有

$$\varDelta_3 C_0 = 0P_{1;0,11}2P_{1;11,15}2P_{1;15,0}0 \ (= C_1),$$

其中



(a) T (b) $\check{T}$

图 13.1.2

$$P_{1;0,11} = P_{0,11} = c4\delta5\delta^{-1}4\gamma3\gamma^{-1}4c^{-1}0d2e3\beta1\beta^{-1}3e^{-1},$$
$$P_{1;11,15} = P_{11,15}^{-1} = \alpha^{-1}5b^{-1}1a^{-1}0d,$$
$$P_{1;15,0} = P_{15,0} = \alpha^{-1}5b^{-1}1a^{-1}.$$

因为 $G_{\tilde{1}} = K_{3,3} - \alpha$ 是平面的, 从 C_0 有它的平面嵌入

$$\begin{cases} f_1 = [0P_{16,0}0P_{0,2}0]_{\text{eg}} = (b^{-1}a^{-1}c\delta), \\ f_2 = [3P_{4,8}3]_{\text{eg}} = (\gamma^{-1}c^{-1}de), \\ f_3 = [1P_{13,14}5P_{2,4}3P_{8,9}1]_{\text{eg}} = (\delta^{-1}\gamma\beta b), \\ f_4 = [1P_{9,13}1]_{\text{eg}} = (\beta^{-1}e^{-1}d^{-1}a). \end{cases}$$

对 C_0 作一次反段得 C_1. 在此基础上, 即可得 $K_{3,3}$ 在射影平面 (亏格 1 不可定向曲面 $S_{\tilde{1}}$) 上的一个嵌入

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = [5P_{1;16,0}0P_{1;0,2}0]_{\text{eg}} = f_1 = (b^{-1}a^{-1}c\delta), \\ \tilde{f}_2 = [3P_{1;4,8}3]_{\text{eg}} = f_2 = (\gamma^{-1}c^{-1}de), \\ \tilde{f}_3 = [1P_{1;9,11}2P_{1;11,13}1]_{\text{eg}} = (be^{-1}e^{-1}\alpha^{-1}b^{-1}), \\ \tilde{f}_4 = [0P_{1;14,15}2P_{1;15,16}5P_{1;2,4}3P_{1;8,9}1P_{1;13,14}0]_{\text{eg}} = (d\alpha^{-1}\delta^{-1}\gamma\beta a^{-1}). \end{cases}$$

13.2 代数判准

在拓扑学中, 图在曲面上的嵌入, 它的面边界提供了这个图的边集的一个二重覆盖. 容易检验, 不是图的边集的任何一个二重覆盖都提供一个曲面嵌入. 一个最

简单的例子, 两个集合 $(abcc^{-1}b^{-1}a^{-1})$ 和 $\{(abc),(c^{-1}b^{-1}a^{-1})\}$ 都是 3 圈的二重覆盖. 前者不是 3 圈的一个嵌入, 后者才是 3 圈的一个嵌入. 实际上, 上节的树迁, 只要图本身不是树, 虽然提供这个图的一个二重覆盖, 但不是这个图的一个嵌入.

令 $\mathcal{C}$ 为图 $G=(V,E)$ 的一个二重覆盖, 给定一个节点 $v\in V$. 对于以 v 为一端的两边, 如果存在一个迁 $C\in\mathcal{C}$, 使得它们相继, 则称它们在 v 处*共顶*. 用传递律将共顶延拓为一个等价关系, 如果在这个等价关系下所有以 v 为一端的边在同一类, 则称 $\mathcal{C}$ 在 v 处*可迁*.

引理 13.2.1 图的一个二重覆盖是这个图的嵌入当且仅当它在每个节点处可迁.

证 如果二重覆盖 $\mathcal{C}$ 是图 G 的一个嵌入, 则它的支架就是 G. 由于每个节点处的所有边, 在相继关系下形成一个循环序, 故在共顶之下形成一个等价类. 这就是必要性.

反之, 设 $\mathcal{C}$ 在 G 的每个节点处都只有一类, 则同一个节点处的边, 在相继关系下形成一个循环. 因为否则, 即不止一个循环, 必导致在同顶关系下不止一个等价类. 以这些循环为节点处的旋, 根据 2.6 节中所讨论的可知 $\mathcal{C}$ 就是 G 的一个嵌入, 从而充分性得证. ♮

若图 G 上迁的一个二重覆盖, 使得在每个节点处可迁, 则称这个覆盖为*容合*的. 迁的一个二重覆盖被称为*可定向*的是指存在对每个迁的定向, 使得每条边的两次出现具有不同的方向; 否则称为*不可定向*的.

为叙述方便起见, 下面所提到的图均指无环、无悬挂点、不可分离的.

引理 13.2.2 令 $\mathcal{C}$ 为图 G 的可定向二重覆盖且含 $\beta(G)-2p+1$ 个迁, 其中 p 是一个非负整数, 则 $\mathcal{C}$ 是容合的当且仅当由 $\mathcal{C}$ 中所有迁生成的空间的维数是 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-2p$.

证 记 $k=\beta(G)-2p+1$, 则 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=k-1$.

先证充分性. 因为 $\beta(G)=\epsilon(G)-\nu(G)+1$, 则有 $k=\epsilon(G)-\nu(G)-2p+2$. 假若 $\mathcal{C}$ 不是容合的, 则 $\mathcal{C}$ 所表示的多面形 Σ 至少有 $\nu(G)+1$ 个节点. 因为 $\epsilon(\Sigma)=\epsilon(G)$, 于是有

$$\begin{aligned}\dim(\Sigma)&=\beta(\Sigma)-2p=\epsilon(\Sigma)-\nu(\Sigma)+1-2p\\&\leqslant\epsilon(G)-(\nu(G)+1)-2p+1=\dim\langle\mathcal{C}\rangle-1.\end{aligned}$$

与 $\dim(\Sigma)=\dim\langle\mathcal{C}\rangle$ 矛盾, 从而 $\mathcal{C}$ 是容合的.

再证必要性. 因为 $\mathcal{C}$ 在 G 的每个节点处可迁, $\mathcal{C}$ 所表示的多面形是 G 的一个嵌入, 从而 $\mathcal{C}$ 是容合的. ♮

引理 13.2.3 令 $\mathcal{C}$ 表示图 G 在亏格 p 可定向曲面上一个嵌入, 则 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-2p$.

证 因为 $\mathcal{C}$ 为图 G 在亏格 p 可定向曲面上一个嵌入, 由定理 2.6.6, 这个嵌入有 $\phi = |\mathcal{C}| = \beta(G) - 2p + 1$ 个面. 设 $\partial f_i\,(1 \leqslant i \leqslant \phi)$ 为面 f_i 的边缘 (或边界). 因为 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant\phi} \partial f_i = 0$,

$$\dim\langle\mathcal{C}\rangle \leqslant \beta(G) - 2p = \phi - 1.$$

由 G 的连通性, $\mathcal{C}$ 的任何 $\phi - 1$ 个相应向量线性无关 (否则, $\mathcal{C}$ 中这 $\phi - 1$ 个相应迂本身就形成一个多面形. 然而, 它的支架是 G 的一个真子图, 与 G 的连通性矛盾), 从而 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle = \beta(G) - 2p$. ♮

定理 13.2.1 图 G 可嵌入到亏格 p 可定向曲面上当且仅当存在迂的一个可定向二重覆盖 $\mathcal{C}$, 使得含 $\beta(G) - 2p + 1$ 个迂且 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle = \beta(G) - 2p$.

证 必要性. 若 Σ 为 G 在亏格 p 可定向曲面上的一个嵌入, 令 $\mathcal{C}$ 为 Σ 所有面边界的集合. 从定理 2.6.6 知 $|\mathcal{C}| = \beta(G) - 2p + 1$. 由引理 13.2.3, $\dim\langle\mathcal{C}\rangle = \beta(G) - 2p$.

充分性. 设 $\mathcal{C}$ 为 G 的一个二重覆盖, 使得含 $\beta(G) - 2p + 1$ 个迂且 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle = \beta(G) - 2p$, 则由引理 13.2.1 和引理 13.2.2 知 $\mathcal{C}$ 确定 G 在亏格 p 可定向曲面上的一个嵌入. ♮

因为在定理 13.2.1 中, 从 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle = \beta(G) - 2p$ 可以导出 $\mathcal{C}$ 中有 $\beta(G) - 2p + 1$ 个迂, 所以可以只用前者而不用后者.

推论 13.2.1 (Lefschetz [1]) 一个不可分离图 G 是可平面的当且仅当存在圈的一个集合 $\mathcal{C}$, 使得二重覆盖 G.

证 这是定理 13.2.1 中当 $p=0$ 时的情形. 因为 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)$, $|\mathcal{C}|=\beta(G)+1$. ♮

推论 13.2.2 (MacLane [2]) 一个不可分离的图 $G = (V, E)$ 是可平面的当且仅当存在圈的一个集合 $\mathcal{C}$, 使得任何 $e \in E$ 至少在 $\mathcal{C}$ 的一个圈中出现.

证 因为当 $p = 0$ 时, $\dim\langle\mathcal{C}\rangle = \beta(G)$, $\mathcal{C} + C_0$ 为 G 的二重覆盖, 其中

$$C_0 = \sum_{C\in\mathcal{C}} C.$$

从定理 13.2.1, 即得推论的结论. ♮

推论 13.2.3 一个图 $G = (V, E)$ 可嵌入到亏格 $p \geqslant 0$ 可定向曲面当且仅当存在另一个图 $G_p^* = (V^*, E^*)$, 边集 E 和 E^* 间有一个 1-1 映射 τ, 使得 $\dim\langle\tau E_v|\forall v \in V\rangle = \beta(G^*) - 2p$.

证 实际上, 这是定理 13.2.1 的对偶形式. ♮

推论 13.2.4 (Whitney [7]) 一个连通图 $G = (V, E)$ 是可平面的当且仅当存在图 $G_0^* = (V_p^*, E_0^*)$, 使得从 E 到 E_p^* 有一个双射 τ: $\dim\langle\tau E_v|\forall v \in V\rangle = \beta(G^*)$.

证 这是推论 13.2.3 当 $p = 0$ 时的情形. ♮

在推论 13.2.4 中, G_0^* 为 Whitney 代数对偶的等价形式.

引理 13.2.4　令 $\mathcal{C}$ 为图 G 的不可定向二重覆盖且含 $\beta(G)-q+1$ 个迂, 其中 q 是一个正整数. 若由 $\mathcal{C}$ 中所有迂生成的空间的维数是 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-q$, 则 $\mathcal{C}$ 是容合的.

证　记 $k=\beta(G)-q+1$, $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=k-1$. 因为 $\beta(G)=\epsilon(G)-\nu(G)+1$, 则有 $k=\epsilon(G)-\nu(G)-q+2$. 假若 $\mathcal{C}$ 不是容合的, 则 $\mathcal{C}$ 所表示的多面形 Σ 至少有 $\nu(G)+1$ 个节点. 因为 $\epsilon(\Sigma)=\epsilon(G)$, 于是有

$$\begin{aligned}\dim(\Sigma)&=\epsilon(\Sigma)-\nu(\Sigma)+1-q\\&\leqslant\epsilon(G)-(\nu(G)+1)-q+1\\&=\dim\langle\mathcal{C}\rangle-1.\end{aligned}$$

与 $\dim(\Sigma)=\dim\langle\mathcal{C}\rangle$ 矛盾, 从而 $\mathcal{C}$ 是容合的. ♮

引理 13.2.5　令 $\mathcal{C}$ 表示图 G 在亏格 q 不可定向曲面上一个嵌入, 则

$$\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-q.$$

证　因为 $\mathcal{C}$ 为图 G 在亏格 q 不可定向曲面上一个嵌入, 由定理 2.6.6, 这个嵌入有 $\phi=|\mathcal{C}|=\beta(G)-q+1$ 个面. 设 $\partial f_i\,(1\leqslant i\leqslant\phi)$ 为面 f_i 的边缘 (或边界), 因为

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant\phi}\partial f_i=0,$$

于是有

$$\dim\langle\mathcal{C}\rangle\leqslant\beta(G)-2p=\phi-1.$$

由 G 的连通性, $\mathcal{C}$ 的任何 $\phi-1$ 个相应向量线性无关 (否则, $\mathcal{C}$ 中这 $\phi-1$ 个相应迂本身就形成一个多面形. 然而, 它的支架是 G 的一个真子图, 与 G 的连通性矛盾), 从而 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-q$. ♮

定理 13.2.2　图 G 可嵌入到亏格 q 不可定向曲面上当且仅当存在迂的一个不可定向二重覆盖, 使得含 $\beta(G)-q+1$ 个迂且 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-q$.

证　必要性. 若 Σ 为 G 在亏格 q 不可定向曲面上的一个嵌入, 令 $\mathcal{C}$ 为 Σ 所有面边界的集合. 从定理 2.6.6 知 $|\mathcal{C}|=\beta(G)-2p+1$. 由引理 13.2.5 知 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-q$.

充分性. 设 $\mathcal{C}$ 为 G 的一个不可定向二重覆盖, 使得含 $\beta(G)-q+1$ 个迂且 $\dim\langle\mathcal{C}\rangle=\beta(G)-q$, 则由引理 13.2.1 和引理 13.2.4 知, $\mathcal{C}$ 确定 G 在亏格 q 可定向曲面上的一个嵌入. ♮

13.3 组合判准

给定一个曲面 S(即单面形). 将它按如下方式逐层分段: 第 0 层总是 1 段, 即 S 本身. 设将第 0 层的这段分割成 l_1 段, 则第 1 层即 $S=(A_1,A_2,\cdots,A_{l_1})$, 其中 $A_1,A_2,\cdots,A_{l_1}$ 被称为**第一层段**.

设在第 $k-1$ 层中所得的第 $k-1$ 层段为 $A_{\underline{n}_{(k-1)}}$, 其中 $\underline{n}_{(k-1)}$ 为 $k-1$ 维的整向量, 并且满足

$$\underline{1}_{(k-1)}\leqslant(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1})\leqslant\underline{N}_{(k-1)},$$

其中 $\underline{1}_{(k-1)}=(1,1,\cdots,1)$, $\underline{N}_{(k-1)}=(N_1,N_2,\cdots,N_{k-1})$, $N_1=l_1=N_{(1)}$, $N_2=l_{A_{N_{(1)}}}$, $N_3=l_{A_{\underline{N}_{(2)}}}$, $\cdots$, $N_{k-1}=l_{A_{\underline{N}_{(k-2)}}}$, 则从每一个第 $k-1$ 层段出发, 通过分割在第 k 层中可得第 k 层段

$$A_{\underline{n}_{(k-1)},1},A_{\underline{n}_{(k-1)},2},\cdots,A_{\underline{n}_{(k-1)},l_{A_{\underline{n}_{(k-1)}}}},\tag{13.3.1}$$

其中 $\underline{1}_{(k)}=(\underline{n}_{(k-1)},1)\leqslant(\underline{n}_{(k-1)},i)\leqslant\underline{N}_{(k)}=(\underline{N}_{(k-1)},N_k)$, $N_k=l_{A_{\underline{N}_{(k-1)}}}$. (13.3.1) 式给出的层段被称为层段 $A_{\underline{n}_{(k-1)}}$ 的**后继**. 反之, $A_{\underline{n}_{(k-1)}}$ 被称为 (13.3.1) 式中任何一层段的**前承**.

如果一个层段只含一个元素, 则称之为**端段**; 否则, 称为**主段**.

例如, 取 $S=(1,-7,2,-5,3,-1,4,-6,5,-2,6,7,-3,-4)$. 图 13.3.1 提供 S 的一个层分割. 在表 13.3.1 中可以看出各层中的主段.

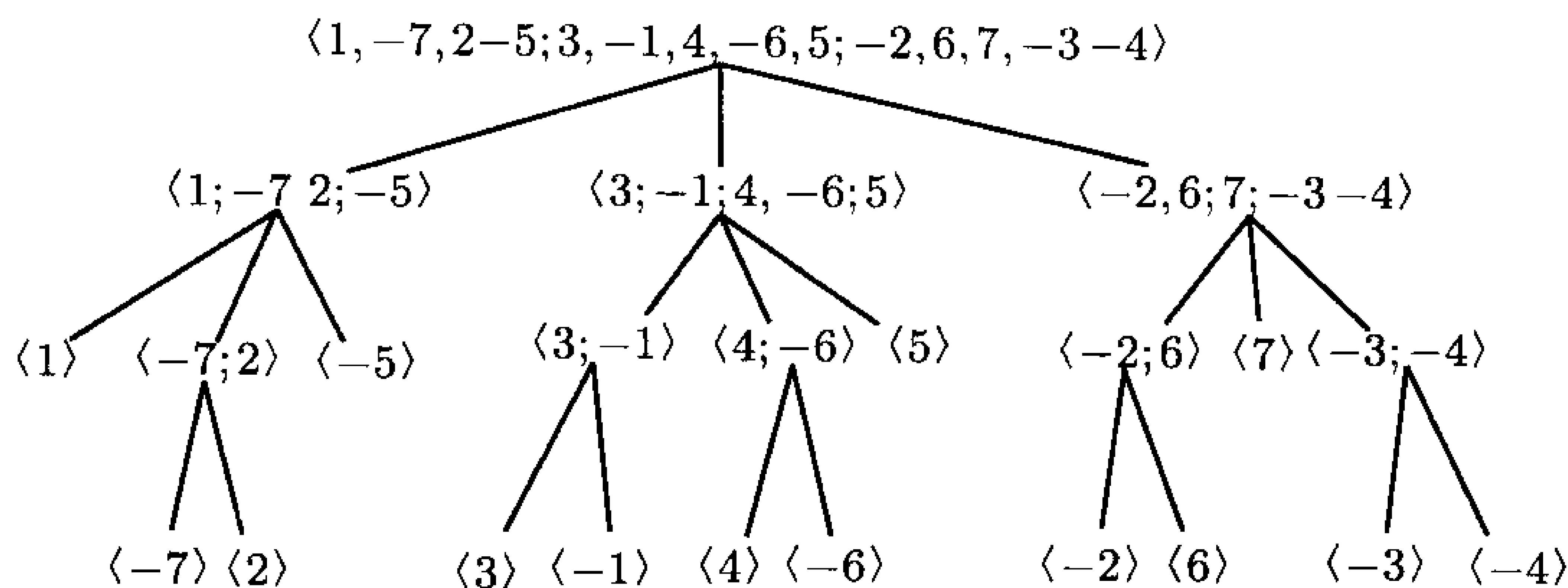


图 13.3.1 曲面 S 的层分割

表 13.3.1 层与主段

层	主段
第 0 层	$A=\langle 1,-7,2-5;3,-1,4,-6,5;-2,6,7,-3-4\rangle$
第 1 层	$B=\langle 1;-7,2;-5\rangle,C=\langle 3,-1;4,-6;5\rangle,D=\langle -2,6;7;-3,-4\rangle$
第 2 层	$E=\langle -7;2\rangle,F=\langle 3;-1\rangle,G=\langle 4;-6\rangle,H=\langle -2;6\rangle,I=\langle -3;-4\rangle$

对于曲面的一个层分割, 若将主段视为节点, 两节点之间的前承与后继关系视为边, 则可得一个树 T. 在 T 上, 再添上与端段关联的边就得一个图 $G=(V,E)$. 例如, 在图 13.3.1 的层分割导出的图中,

$$V=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}, \tag{13.3.2}$$

$$E=\{a,b,c,d,e,f,g,h,1,2,3,4,5,6,7\}, \tag{13.3.3}$$

其中 $a=(A,B)$, $b=(A,C)$, $c=(A,D)$, $d=(B,E)$, $e=(C,F)$, $f=(C,G)$, $g=(D,H)$, $h=(D,I)$, $1=(B,F)$, $2=(E,H)$, $3=(F,I)$, $4=(G,I)$, $5=(B,C)$, $6=(G,H)$, $7=(D,E)$. 注意到, $E_T=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $\bar{E}_T=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\delta_i=0\,(i=1,2,\cdots,7)$, 从层分割中自然导出一个旋 σ, 即得一个联树 $\hat{T}_\sigma^\delta$.

定理 13.3.1 曲面的一个层分割确定一个联树. 反之, 任何一个联树也确定它的关联曲面的一个层分割.

证 若将层分割中每段 (包括主短语端段) 作为节点, 两端之间的相继关系作为边, 则得一个树. 因为这个树在每个非端节点处的边有一个旋且端点成对, 可由一个 2 进制数所决定, 由定理 3.3.1, 它本身就是一个联树.

反之, 如上例所述, 任何一个联树的关联曲面都确定一个层分解. ♮

下面讨论如何通过在层分割上的运算, 从一个关联曲面到另一个关联曲面, 以致访遍所有的关联曲面而不重复.

一个层段连同其后所有的层短, 被称为它的**枝节**. 将两个有相同前承的层段, 交换它们枝节的位置的运算, 被称为**调位**. 自然可知其逆的含义.

引理 13.3.1 图的一个关联曲面的层分割经过一次调位, 所得到的是另一个关联曲面的层分割. 反之, 后一个曲面的层分割, 再经过一次这个调位的逆, 又确定前一个曲面的原来的层分割.

证 由定理 13.3.1, 只需讨论调位引起联树的变化. 因为一次调位就是在联树上, 将在相应枝节的节点处对换两条边. 也就是在联树的一个节点处改变旋, 从而调位就是把一个联树变换到另一个联树, 即有第一个结论. 由调位的过程可知第二个结论的正确性. ♮

因此, 调位也可以看成是一个图的关联曲面间的运算.

引理 13.3.2 在图的关联曲面中, 调位运算满足封闭性.

证 由定理 13.3.1, 这是引理 13.3.1 的一个直接结果. ♮

引理 13.3.3 令 $\mathcal{A}(G)$ 为图 G 的一个关联曲面集. 对于任何两个曲面 S_1 和 S_2, 总存在一个调位的序列, 使得 S_1 通过这些调位后可得 S_2.

证 因为调位相当于在一个节点处旋中两元素对换, 由 1.2 节中的置换原理, 任何两个旋均可通过对换, 从一个变到另一个, 从而由定理 13.3.1 和引理 13.3.1, 即得引理的结论. ♮

若将关联曲面集 $\mathcal{A}(G)$ 中的每个曲面视为节点, 两个节点相邻当且仅当存在一次调位, 使得相应的曲面从一个到另一个, 则将所得的图称为图 G 的关联曲面图, 记作 $\mathcal{H}(G)$. 由定理 13.3.1, 也可称它为图 G 的曲面嵌入图. 引理 13.3.3 意味着关联曲面图是连通的.

定理 13.3.2 在 $\mathcal{H}(G)$ 中, 任意两个节点间都存在一条 Hamilton 路.

证 因为两个不同节点相应的曲面层划分不同, 可以从一个出发, 在端段所在的底层依次相继作调位, 而避开另一个节点所对应的关联曲面且不走回头路. 当不能继续时就到上一层, 如是行之. 由强有限递归原理 (Liu, Y. P. [36]), 从定理 13.3.1 和联树与嵌入 1–1 对应的原理, 即可得定理的结论. ♮

从任何一个曲面起, 通过逐层在主段处一一作调位, 根据定理 13.3.2, 定理 13.3.1 和联树与嵌入 1–1 对应的原理, 总能在 $\mathcal{H}(G)$ 上找到一个 Hamilton 路.

通过选择 $S_1, S_2 \in \mathcal{A}(G) = V(\mathcal{H}(G))$, 通过从 S_1 开始回避 S_2 依次作调位, 由强有限递归原理 (Liu, Y. P. [35 或 36]), 直到 S_2 得一条 Hamilton 路. 这就意味着在 $\mathcal{H}(G)$ 上有一个 Hamilton 圈.

推论 13.3.1 在 $\mathcal{H}(G)$ 中存在一个 Hamilton 圈.

由定理 13.3.2 可以看出, 求图 G 的最小亏格是 $\mathcal{H}(G)$ 上的一个用线性时间算法可以实现的问题.

对于一个图 G, 记 $\mathcal{S}(G)$ 为 G 的所有关联曲面的集合, S_p 与 $S_{\tilde{q}}$ 分别是可定向亏格 $p \geqslant 0$ 与不可定向亏格 $q \geqslant 1$ 的子集, 从而有

$$\mathcal{S}(G) = \sum_{p \geqslant 0} S_p + \sum_{q \geqslant 1} S_{\tilde{q}}.$$

定理 13.3.3 图 G 可嵌入到亏格 p 可定向曲面上当且仅当在 $\mathcal{S}(G)$ 中有一个单面形属于 $S_p (p \geqslant 0)$, 而且从 G 的任一嵌入, 总能通过调位变换到另一个嵌入, 使得其关联曲面属于 S_p.

证 对于 G 在可定向亏格 p 曲面上的嵌入, 由定理 13.3.1 所有关联曲面属于 $S_p (p \geqslant 0)$ 第一个说法的必要性成立.

反之, 从给定属于 $S_p (p \geqslant 0)$ 的关联曲面出发, 由定理 13.3.1, 定理 3.3.1, 引理 3.3.1 和引理 3.3.2, 即导出 G 在可定向亏格 p 曲面上的一个嵌入, 从而第一个说法的充分性成立.

第二个说法的正确性源自定理 13.3.2. ♮

对于图 G 的任何一个可定向嵌入 $\mu(G)$, 记 $\tilde{S}_\mu$ 为由 $\mu(G)$ 产生的所有不可定向嵌入关联曲面的集合.

定理 13.3.4 图 G 可嵌入到亏格 $q(\geqslant 1)$ 可定向曲面上当且仅当在 $\mathcal{S}(G)$ 中有一个单面形属于 $\tilde{S}_q (q \geqslant 1)$, 而且从 G 的任一可定向嵌入嵌入 μ, 总能通过调位

变换到另一个嵌入 μ', 使得其关联曲面 $S_{\mu'} \in S_{\tilde{q}}$.

证　对于 G 在不可定向亏格 q 曲面上的嵌入, 由定理 13.3.1, 所有关联曲面属于 $S_q(q \geqslant 1)$. 第一个说法的必要性成立.

反之, 从给定属于 $\tilde{S}_q(q \geqslant 1)$ 的关联曲面出发, 由定理 13.3.1, 定理 3.3.1, 引理 3.3.1 和引理 3.3.2, 即导出 G 在不可定向亏格 q 曲面上的一个嵌入, 从而第一个说法的充分性成立.

因为所有不可定向嵌入都可由可定向嵌入, 通过在联树上变换指标分配得到, 第二个说法的正确性源自定理 13.3.2. ♮

13.4　构 形 判 准

对于一个亏格为 g 的曲面 (可定向或不可定向) S_g, 若一个图 H 不可嵌入到 S_g 上, 但任意去掉一边就可以嵌入到 S_g 上, 则称 H 对于 S_g 是*简约的*. 一个图 G 中, 任何一个与 H 同胚的子图被称为 G 的一类*简约构形*, 或简称为*简约形*. 在文献 (Robertson, N. -P. Seymour[1])中已经揭示, 所有图对于任一给定亏格的曲面简约形类的数目是有限的.

对于曲面 $S_g(g \geqslant 1)$, 令 $\mathcal{H}_{g-1}$ 为曲面 S_{g-1} 的所有简约形的集合, 对任一给定的 $H \in \mathcal{H}_{g-1}$, 设 H 在 S_g 上的嵌入有 ϕ 个面. 若图 G 有一个含 ϕ 个子图 $H_i(1 \leqslant i \leqslant \phi)$ 的分解满足

$$\bigcup_{i=1}^{\phi} H_i = G, \quad \bigcup_{i \neq j}^{\phi} (H_i \bigcap H_j) = H, \tag{13.4.1}$$

并且所有 H_i 都是可平面的, 使得与 H 的公共边在同一个面边界上, 则称 G 对于 S_g 具有*简约性* 1.

定理 13.4.1　一个图 G 可嵌入到曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上当且仅当 G 具有简约性 1.

证　必要性. 令 $\mu(G)$ 为图 G 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入. 记 $H \in \mathcal{H}_{g-1}$, 则 $\mu(H)$ 也是在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入. 设 $\{f_i|1 \leqslant i \leqslant \phi\}$ 为 $\mu(H)$ 的面集合, 则 $G_i = [\partial f_i + E([f_i]_{\text{in}} f_i)](1 \leqslant i \leqslant \phi)$ 就提供了一个满足 (13.4.1) 式的分解. 容易验证, 所有 $G_i(1 \leqslant i \leqslant \phi)$ 都是平面的, 并且 G_i 与 H 的公共边在同一个面边界上, 从而 G 具有简约性 1.

充分性. 因为 G 具有简约性 1, 令 $H \in \mathcal{H}_{g-1}$, 设 H 在 S_g 上的嵌入 $\mu(H)$ 有 ϕ 个面. 图 G 有 ϕ 个子图 $H_i(1 \leqslant i \leqslant \phi)$ 满足 (13.4.1) 式, 并且所有 H_i 都是可平面的, 使得与 H 的公共边在同一个面边界上.

记 $\mu_i(H_i)(1 \leqslant i \leqslant \phi)$ 为 H_i 的平面嵌入, 使得有一个面边界含在 $\mu(H)$ 的一个面边界中. 将每个 $\mu_i(H_i)$ 恢复到 $\mu(H)$ 上, 即得图 G 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个

嵌入. ♮

令多面形 $\Sigma^* = (G^*; F^*)$ 为 G 在 S_g 嵌入 $\Sigma = (G; F)$ 的对偶. 对于 S_{g-1} 的一个简约形 $H \subseteq G$, 记 $H^* = [e^* | \forall e \in E(H)]$. 自然, $G^* - E(H^*)$ 至多有 $\phi = |F|$ 个连通片. 如果恰有 ϕ 个连通片且每个连通片都是可平面的, 使得边缘节点依次在同一面的边界上, 则称 Σ 具有简约性 2. 如果一个图 G 有一个子图带简约性 2, 则 G 本身也称具有简约性 2.

定理 13.4.2 一个图 G 可嵌入到曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上当且仅当 G 具有简约性 2.

证 必要性. 令 $\mu(G) = \Sigma = (G; F)$ 为 G 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入, $\mu^*(G) = \mu(G^*) = (G^*, F^*)(= \Sigma^*)$ 为它的对偶, 记 $H \subseteq G$ 为一个简约形. 由多面形 $\mu(H)$ 和 $\mu^*(H)$ 之间的对偶性, 在 $\mu(H)$ 的每一个面的内部至少有 G^* 的一个节点, $G^* - E(H^*)$ 恰有 $\phi = |F_{\mu(\mathrm{H})}|$ 个连通片. 因为每一个连通片都在一个平面圆盘上, 而且边缘节点依次在这个圆盘的边界上, 即知 H 具有简约性 2, 从而 G 具有简约性 2.

充分性. 利用 G 的这个具有简约性 2 的简约形 H 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入 $\mu(H)$, 将 $G^* - E(H^*)$ 的每个连通片的这种边缘一致平面嵌入, 对偶地置于 $\mu(H)$ 的相应面内, 即延拓为 G 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入 $\mu(G)$. ♮

一个多面形 $\Sigma = (G; F)$, 它的基准图 $G = (V, E)$ 和面集 F. 令 H 为曲面 S_{p-1} 的一个简约形且 $H \subseteq G$. 记 C 为 H 在 G 中的边界, E_C 为所有 G 与 H 关联, 但不属于 H 的边集合. 将关系 $\sim_C$: $\forall a, b \in E_C$,

$$a \sim_C b \Leftrightarrow \exists f \in F_H,\ a, b \in \partial_2 f \tag{13.4.2}$$

通过传递律扩展为一个等价关系. 自然有 $|E_C / \sim_C| \leqslant \phi_H$. 用 $\{E_i | 1 \leqslant i \leqslant \phi_C\}$ 表示 E_C 中所有等价类的集合. 注意, $E_i = \varnothing$ 可略之不计. 令 $V_i(1 \leqslant i \leqslant \phi_C)$ 为避开边界连 E_i 两边路的所有通过节点的集合. 注意, 当 $E_i = \varnothing$ 时, 也有 $V_i = \varnothing$ 略之不计. 由 G 的连通性可以看出

$$\bigcup_{i=1}^{\phi_C} V_i = V - V_H. \tag{13.4.3}$$

如果对于任何 $1 \leqslant i < j \leqslant \phi_C$, $V_i \cap V_j = \varnothing$, 而且所有 $[V_i]$ 都是平面的, 使得与 E_i 关联的节点在同一个面边界上, 则称 H, 或同样地, 称 G 具有简约性 3.

定理 13.4.3 一个 3 连通图 G 可嵌入到曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上当且仅当 G 具有简约性 3.

证 必要性. 设 $\mu(G) = (G, F)$ 为图 G 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入. 记 $H \subseteq G$ 为曲面 S_{p-1} 的一个简约形. 因为 $H \subseteq G$, $\mu(G)$ 限制在 H 上的部分 $\mu(H)$ 也是 H 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入. 由 G 的 3 连通性, 与 $\mu(H)$ 一个面关联

的只能是 E_C 中的一个等价类, 而且这个等价类所确定的子图是平面的, 使得边缘一致, 也就是说, H 具有简约性 3, 从而 G 具有简约性 3.

充分性. 利用 G 的这个具有简约性 3 的简约形 H 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入 $\mu(H)$, 将每个 $[V_i]$ 的平面嵌入在保持边缘一致的条件下, 置于 $\mu(H)$ 的相应面内, 即延拓为 G 在曲面 $S_g(g \geqslant 1)$ 上的一个嵌入 $\mu(G)$. ◨

定理 13.4.3 中 3 连通的条件不是本质的, 只是为了使叙述简单. 因为不是 3 连通时, 未必 $\mu(H)$ 只关联 E_C 中的一个等价类. 不管怎样, 一般情形总可用文献 (Liu, Y. P. [2, 42]) 中介绍的 mod C 连通片的平行性表述.

在定理 13.4.1~ 定理 13.4.3 的基础上, 可以自然地导出确定图是否可嵌入到小亏格曲面上的判准, 并且能有效地通过算法实现.

例如, S_0 的简约形只有两类, 即 3×3 阶的完全二部图 $K_{3,3}$ 和 5 阶完全图 K_5. 它们在环面上和射影平面上的嵌入已经知道 (Liu, Y. P. [36]的附录). 从上面定理即可导出判定一个图是否可嵌入这些曲面的准则.

13.5　注　　记

(1) 虽然用树迁及其上的运算讨论图在一般曲面上的嵌入, 属首次见诸于文字, 其基本思想源于 1979 年, 参见文献 (Liu, Y. P. [8, 9]). 但那里不是像这里从一般树出发, 而是从一类特殊的树, 即所谓深探树, 或当节点处的旋给定时, 左探树或右探树, 引进二重图和其上的 Euler 迹. 然后在 Euler 迹上建立运算. 在此基础上, 主要研究图的最大亏格和上可嵌入性. 例如, 文献 (Liu, Y. P. [10], Skoviera, M. -R. Nedela [1], Huang, Y. Q. -Y. P. Liu-Y. M. Chu [1]) 等. 从文献 (Liu, Yi. -Y. P. Liu [1~3]) 开始, 用二重图上的 Euler 迹研究图在一般曲面上可嵌入性的判别, 也曾用过二重图上的 Euler 迹讨论图的用圈二重覆盖, 以及图的强嵌入存在性问题, 参见文献 (Liu, Y. P. [48]).

虽然当时也考虑过从一般树出发, 因为遇到困难而未能继续. 在 13.1 节中却避开了困难, 一举完成对图在一般曲面上可嵌入性的识别.

(2) 自 1994 年在文献 (Liu, Y. P. [31]) 以及 1995 年在专著 (Liu, Y. P. [33]) 中, 将图视为无边缘紧 2 流形上的多面形, 在图上引入同调空间和上同调空间, 直接导出 Lefschetz (Lefschetz, S. [1]), MacLane (MacLane, S. [1, 2]) 以及 Whitney (Whitney, H. [6, 7]) 等的平面性判准后, 于 2003 年在文献 (Abrams, L. -D. C. Slilaty [1]) 中讨论射影平面上 Whitney 型的代数对偶.

在文献 (Liu, Y. P. [46]) 中指出他们给的 “反例” 忽略了无边缘的条件, 进一步但仍然是简略地讨论了有关问题. 在 13.2 节中则准确地将有关结果表述为定理的形式. 可以看出, 上面提到的只适于球面 (亏格为 0), 或等价地, 平面的三个经典结

果得以简化, 并且都简单地拓展到一般亏格非 0 可定向与不可定向曲面 (即无边缘紧 2 流形!).

(3) 在 13.3 节中给出的结果, 已经建立了算法并在计算机上实现, 参见 (Wang, T. -Y. P. Liu [1]), 基本思路源于文献 (Liu, Y. P. [35, 36]).

(4) 在 5.2 节中谈到 Jordan 面闭曲线定理的三种多面形形式, 将这一思想拓展到亏格非 0 曲面的第一篇文章当属文献 (Liu, Yi. -Y. P. Liu [2]). 然而, 在 13.4 节中, 除完善那里的结果外, 还纠正了定理条件中忽略了边缘一致性的错误.

(5) 综观本章所有结果, 仍然有继续拓展和改进的空间, 希望读者留心体验, 特别是所有定理有待进一步研究, 以提高它们的有效性.

第 14 章　曲面上的图

14.1　必 要 条 件

在 3.1 节和 3.2 节中曾提到图的曲面嵌入, 并且通过图 G 的码讨论在曲面 (可定向与不可定向的) 上嵌入的存在性. 在这一节, 打算更一般地讨论一个图的曲面嵌入的性质.

首先指出, 不是说任何一个图均可以嵌入到任何给定亏格 (可定向与不可定向) 的曲面上.

引理 14.1.1　对于一个图 $G=(V,E)$(当然, 简单而且连通的), 令 $G(\Sigma)$ 为 G 在一个曲面 S(可定向与不可定向) 上的一个嵌入, 或简记为 $G(\Sigma)\subset S$, 则有

$$\nu-\varepsilon+1\leqslant\chi(S)\leqslant\nu-\left\lceil\frac{\varepsilon}{3}\right\rceil,\tag{14.1.1}$$

其中 $\chi(S)$ 为曲面 S 的 Euler 示性数.

证　因为 $G(\Sigma)$ 有至少一个面, 由 (2.6.1) 式可得(14.1.1) 式中 $\chi(S)$ 的下界. 另一方面, 由 G 的简单性和连通性可知 $3\varphi\leqslant2\varepsilon$ 总成立, 从而 $G(\Sigma)$ 至多有 $\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{3}\right\rfloor$ 个面. 由 (2.6.1) 式又有

$$\chi(S)\leqslant\nu-\varepsilon+\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{3}\right\rfloor=\nu-\left\lceil\frac{\varepsilon}{3}\right\rceil.$$

这就是 (14.1.1) 式中 $\chi(S)$ 的上界.

由引理 14.1.1 和 (2.6.1) 式, 即可得到下面的一些推论.

推论 14.1.1　$\forall G\in\mathcal{G}$,

$$G(\Sigma)\subset P_p\Rightarrow\left\lceil\frac{\beta(G)+1}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right\rceil\leqslant p\leqslant\left\lfloor\frac{\beta(G)}{2}\right\rfloor.\tag{14.1.2}$$

推论 14.1.2　$\forall G\in\mathcal{G}$,

$$G(\Sigma)\subset Q_q\Rightarrow\beta(G)+1-\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{3}\right\rfloor\leqslant q\leqslant\beta(G).\tag{14.1.3}$$

如果一个图可以嵌入到 Euler 示性数为 (14.1.1) 式所示的下界或上界的曲面上, 就分别称它们为下可嵌入的或上可嵌入的. 在 14.2 节和 14.4 节中, 将专门讨论上可嵌入性和下可嵌入性.

对于图 G 的一个嵌入 $G(\Sigma)$, 引进两类运算, 以便将在一个曲面上的嵌入 $G(\Sigma)$ 变换到在另一个亏格与之不同的曲面上的嵌入 $G(\Sigma')$.

设 $G(\Sigma)$ 是在可定向曲面 S 上的一个嵌入, $e=(u,v)$ 是面 f_1 和 f_2 的公共边界上的一条边, 其中 f_1 和 f_2 没有一个的边界覆盖另一个的边界的情形. 不失一般性, 可以与以前一样, 假设 u 和 v 的次均不小于 3. 记

$$f_1=eR,\quad f_2=e^{-1}L,\quad f_3=bDa. \tag{14.1.4}$$

其中 a,b 和 e 具有公共端 v. 令在 v 处的旋为 $eAabB$, A 或 B 允许为空集, 即 A 或 $B=\varnothing$. 则只将 v 处旋从 $eAabB$ 改变为 $AaebB$ 的运算被称为在 $G(\Sigma)$ 上对边 e 作一次**手柄**.

引理 14.1.2 在 $G(\Sigma)\subset S\in \boldsymbol{P}$ 作一次手柄, 将 $G(\Sigma)$ 变换为 $G(\Sigma')\subset S'\in \boldsymbol{P}$, 使得 S' 的亏格比 S 的亏格大 1.

证 因为容易验证, $G(\Sigma)$ 和 $G(\Sigma')$ 的面集之间, 所不同的只是将 $G(\Sigma)$ 中的三个面 f_1,f_2, 和 f_3, 如 (12,1,4) 式所示, 用如下的一个面 f' 所代替:

$$f'=ebDae^{-1}LR. \tag{14.1.5}$$

同时, 也易验证, 曲面的可定性不变, 从而由 Eulre 公式或 (2.6.1) 式, 即得引理的结论. ♮

设 $G(\Sigma)$ 为 G 在不可定向曲面上的一个嵌入. 若 e 是面 f_1 和 f_2 的公共边界上的一条边, 记

$$f_1=eR,\quad f_2=e^{-1}T, \tag{14.1.6}$$

则在 $G(\Sigma)$ 上变换, 如 (14.1.6) 式所示的两面, 成为一个面

$$f'=e\;Re\;T^{-1} \tag{14.1.7}$$

的运算, 被称为在 $G(\Sigma)$ 上对边 e 作一次**叉帽**.

引理 14.1.3 在 $G(\Sigma)\subset S\in \boldsymbol{Q}$ 上作一次叉帽, 将 $G(\Sigma)$ 变换为 $G(\Sigma')\subset S'\in \boldsymbol{Q}$, 使得不可定向性不变且 S' 的不可定向亏格比 S 的大 1.

证 由 S 的不可定向性, 容易验证, S' 也是不可定向的, 而且 $G(\Sigma')$ 是 S' 上的一个嵌入. 因为 $G(\Sigma)$ 与 $G(\Sigma')$ 之间的不同仅在于在 $G(\Sigma')$ 中的面数比在 $G(\Sigma)$ 中的面数少 1, 从而由 Euler 公式或 (2.6.1) 式, 即得引理的结论. ♮

若一个图 G 可以嵌入亏格为 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 的曲面 S(可定向或不可定向) 上, 但不能嵌入到亏格 $g(S')(p(S')$ 或 $q(S'))$ 大于 $g(S)(p(S)$ 或 $q(S))$ 的任何曲面 S'(可定向或不可定向) 上, 则称 $g(S)(p(S)$ 或 $q(S))$ 为 G 在曲面 (可定向或不

可定向) 上的**最大亏格**. 常直接称为**最大可定向亏格**或**最大不可定向亏格**, 分别用 $p_M(G)$ 或 $q_M(G)$ 表示.

相反地, 若一个亏格为 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 的曲面 S, 图 G 可以嵌入在其上, 但任何亏格 $g(S')$ ($p(S')$ 或 $q(S')$) 小于 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 的曲面 S' (可定向或不可定向) 均不能嵌入在其上, 则称亏格 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 为 G 在曲面 (可定向或不可定向) 上的**最小亏格**, 也常直接称为**最小可定向亏格**或**最小不可定向亏格**, 分别用 $p_L(G)$ 或 $q_L(G)$ 表示. 图 G 的最小亏格 (可定向或不可定向), 在文献中也称为 G 的**亏格**(可定向或不可定向).

引理 14.1.4 一个图 G 可嵌入的曲面的亏格 (可定向或不可定向) 是它的最大亏格当且仅当在 S 上不存在这样的一个嵌入, 使得上述两个运算 (手柄或叉帽) 可以在这个嵌入上进行.

证 因为若 G 可嵌入到 S 上, 使得可进行这两个运算 (手柄或叉帽), 则由引理 14.1.2 和引理 14.1.3 可知 S 的亏格不可能是 G 的最大亏格 (可定向或不可定向). 必要性得证.

反之, 要讨论如下两种情形:

情形 1 设曲面是可定向的. 用反证法. 设 $G(\Sigma')$ 为曲面 S' 上的一个嵌入, 并且其亏格 $p(S')$ 大于 S 的亏格 $p(S)$. 由引理 14.1.2, 可以假设 $p(S') = p(S) + 1$ 而不失一般性, 而且通过观察可知, 在 S' 上的任一嵌入都有如 (14.1.4) 式和 (14.1.5) 式所示的结构之一. 然而, 因为 $G(\Sigma')$ 至少有一个面具有 (14.1.5) 式的形式 (否则, $G(\Sigma')$ 的面数将大于 $G(\Sigma)$ 的面数, 这就与 $p(S') > p(S)$ 矛盾). 由引理 14.1.2, 允许在 $G(\Sigma)$ 上作手柄的逆运算, 而得到 S 上的一个嵌入, 从而在 S 上有一个嵌入, 使得可以作一次手柄. 与给定的条件矛盾.

情形 2 设曲面是不可定向的. 因为在曲面上嵌入的条件意味着这些嵌入全都没有一边在两个面的公共边界上. 由此可知它们全只有一个面. 根据引理 14.1.1 可知它们全在不可定向曲面上, 并使得其亏格为最大.

综合以上两种情形, 引理得证. □

由引理 14.1.4 证明中的情形 2 还知道, 所有图对于不可定向的情况皆为上可嵌入的, 只要将亏格为 0 的曲面同时视为可定向与不可定向 (特殊情形), 这又得到了定理 2.2.4.

为方便起见, 对于一个图 G, 记

$$g_M(G) = \begin{cases} p_M(G), & \text{可定向}, \\ q_M(G), & \text{不可定向} \end{cases} \tag{14.1.8}$$

和

$$g_L(G)=\begin{cases} p_L(G), & \text{可定向}, \\ q_L(G), & \text{不可定向}. \end{cases} \tag{14.1.9}$$

若图 G 的一个嵌入是在亏格为 $g_M(G)$(或 $g_L(G)$) 的曲面上, 则称它为 G 的**最大(或最小) 亏格嵌入**, 或更准确地, 对于可定向和不可定向情形, 分别称之为 G 的**最大可定向(或最小可定向) 亏格嵌入**和**最大不可定向(或最小不可定向) 亏格嵌入**. 从 Euler 公式, 最大 (或最小) 亏格嵌入也可称为**最小(或最大) 面嵌入**.

定理 14.1.1 对于一个图 G 和一个整数 $k\,(g_L(G)\leqslant k\leqslant g_M(G))$, 存在亏格为 k 的曲面 S(可定向或不可定向) 上的一个嵌入 $G(\Sigma)$, 对于 G 在曲面 S 上的任何嵌入 $G(\Sigma)$, 存在 G 的一个最小 (或最大) 亏格嵌入 $G(\Sigma_1)$, 使得从 $G(\Sigma_1)$ 出发可以通过作 $k-g_L(G)+1$ $(g_M(G)-k)$ 次运算 (手柄或叉帽) 而得到 $G(\Sigma)$.

证 因为对任一图 G, 总有一个最小 (或最大) 亏格嵌入 $G(\Sigma_1)$. 由引理 14.1.2~ 引理 14.1.4, 从 $G(\Sigma_1)$ 出发经过作 $k-g_L(G)+1$ $(g_M(G)-k)$ 次运算 (手柄或叉帽), 即可得 G 在亏格为 k 的曲面 S(可定向或不可定向) 上的一个嵌入 $G(\Sigma)$. 定理的前一个结论得证.

进而, 对于亏格为 k 的曲面 S(可定向或不可定向) 上的一个给定的嵌入 $G(\Sigma)$, 由引理 14.1.2~ 引理 14.1.4, 也可以从 $G(\Sigma)$ 出发通过作 $k-g_L(G)+1$ $(g_M(G)-k)$ 次运算 (手柄的逆或叉帽的逆) 求得图 G 的一个最小 (或最大) 亏格嵌入 $G(\Sigma_1)$, 则用前一结论证明中的方法, 即可得到定理的后一个结论. ♮

根据定理 14.1.1 可以看出, 图 G 可嵌入的曲面亏格的集合为由所有整数组成的全序集中的一段. 对于可定向和不可定向情形, 这个段被分别称为 G 的**手柄段**和**叉帽段**, 统称为 G 的**亏格段**, 从而手柄段和叉帽段也分别称为**可定向亏格段**和**不可定向亏格段**. 手柄段和叉帽段的基数分别称为**手柄数**和**叉帽数**. 当然, 这两种数均为图的组合不变量.

14.2 上可嵌入性

因为对于不可定向曲面, 一个图 G 的上可嵌入性已经由定理 3.2.4 解决. 在这一节只集中讨论可定向的情形. 如果图 $G=(V,E)$ 的一个在曲面上的嵌入有一个或两个面, 则分别称它为 G 的一个**单面**或**二面嵌入**.

引理 14.2.1 一个图 G 是上可嵌入的当且仅当 G 有一个单面嵌入, 若曲面是不可定向的; 根据 Betti 数 $\beta(G)$ 为 0 或 1(mod 2), 分别有单面或二面嵌入, 若曲面为可定向的.

证 这是一般多面形 Euler 公式, 即 (2.6.1) 式的一个直接结果. ♮

事实上, 定理 3.2.4 表明任何一个图在不可定向曲面上均有一个单面嵌入. 然而, 对于一个图在可定向曲面上的单面可嵌入性或二面可嵌入性, 则远非如此. 在可定向曲面上, 既无单面也无二面嵌入的图的最简单的情形, 如图 14.2.1 所示. 若不然, 由引理 14.2.1, 这个图只可能在环面上有一个单面嵌入. 不管怎样, 通过考虑所有可能的情形可知这是不可能的.

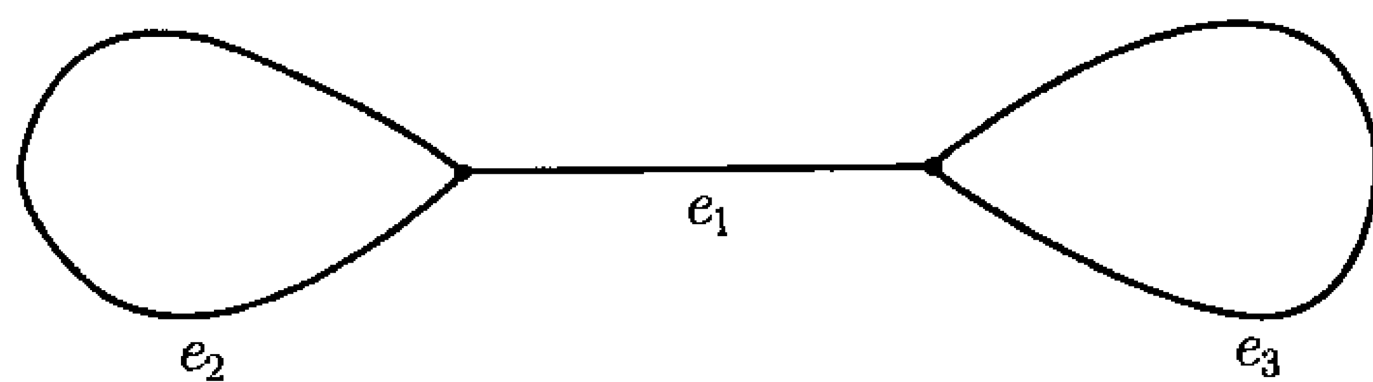


图 14.2.1

对于图 $G=(V,E)$ 的一个支撑树 T, 如果 a 和 b 是两个相邻的上树边, 则称图 $G'=G-\{a,b\}$ 为 G 的一个简单 T 约化图, 也可以说, G 为简单 T 可约化到 G'.

引理 14.2.2 令 G' 为图 $G=(V,E)$ 的一个简单 T 约化图, 则只要 G' 有一个单面嵌入, G 就有一个单面嵌入.

证 设 $G'=G-\{a,b\}$, 其中 $a=(u,v)$ 和 $b=(v,w)$ 为对 T 的两条相邻的上树边. 令 $\mu(G')$ 为 G' 的一个单面嵌入记

$$\mu(G')=(RSX), \tag{14.2.1}$$

其中 u,v 和 w 以如下形式中的次序出现:

$$RvSwXu. \tag{14.2.2}$$

自然, 这是不失一般性的. 于是可以将 $\mu(G')$ 延拓为一个二面嵌入 $\mu(\tilde{G})$ 如下:

$$\mu(\tilde{G})=(Ra,a^{-1}SX), \tag{14.2.3}$$

其中 $\tilde{G}=G'+a$. 由 (14.2.3) 式, $\mu(\tilde{G})$ 又可以延拓为 $G=\tilde{G}+b$ 的一个单面嵌入

$$\mu(G)=(Rb\ Xa\ Sb^{-1}a^{-1}). \tag{14.2.4}$$

容易看出, $\mu(G)$ 是可定向的. 因此, G 与 G' 一样也有一个单面嵌入.

引理 14.2.2 使得可以引进一种运算, 称为**单柄加**, 即在 G 的一个选定的支撑树 T 的基础上, 将形式 (14.2.2) 变到 (14.2.4) 式的运算.

对于图 G 的一个支撑树 T, 将 T 视为在球面上的一个嵌入. 若在 T 的基础上通过作一系列的单柄加得到 G 的一个单面嵌入 $\mu(G)$, 则称 G 是**单面 T 可扩张的**.

引理 14.2.3 对于图 $G=(V,E)$ 的一个支撑树 T, G 是单面 T 可扩张的当且仅当其上树边的集合可以划分为相邻的边对.

证 由 Euler 公式, 要在 G 上作$\dfrac{\beta(G)}{2}$ 次单柄加才能得到 G 的一个单面嵌入, 并且每次运算取两个相邻的上树边, 从而可得上树边集的相邻边对划分. 这就有必要性.

反之, 由上树边集的相邻边对的划分, 可以在 T 作为球面嵌入的基础上, 逐个对边的相邻对作单柄加. 最后, 即可得 G 在亏格为$\dfrac{\beta(G)}{2}$ 的曲面上的一个单面嵌入, 从而充分性得证. ♮

如果 $\beta(G)=1(\bmod 2)$, 由引理 14.2.1 知 G 不会有单面嵌入. 对于 G 的一个单圈支撑子图, 用 $T+e$ 表示, 其中 T 为 G 的一个支撑树, e 为一个上树边. 这时, 总能将 $T+e$ 嵌入到球面上, 使得有两个面. 在 G 的一个嵌入中, 那个由 $T+e$ 中圈为边界的面, 被称为*固定面*, 而其他的面均称为*活动面*. 对于一个相邻的上树边对 $\{a,b\}$, a 和 b 均非 e, 图 $G'=G-\{a,b\}$ 被称为 G 的*简单*$(T+e)$*约化图*, 或 G 被称为*简单*$(T+e)$*可约化到* G'.

引理 14.2.4 令 G' 为 $G=(V,E)$ 的一个简单 $(T+e)$ 约化图, 则只要 G' 有一个二面嵌入, G 就有一个二面嵌入.

证 对于 G' 的二面嵌入中的活动面, 利用与引理 14.2.2 的证明中类似的过程, 也可得引理的结论. ♮

对于 G 的一个单圈支撑子图 $T+e$, 若 G 的一个二面嵌入可以在 $T+e$ 作为球面上的二面嵌入的基础上, 对于活动面作一系列的单柄加而得到, 则称 G 是*二面*$(T+e)$*可扩张的*.

引理 14.2.5 对于 $G=(V,E)$ 的一个单圈支撑子图 $T+e$, G 是二面 $(T+e)$ 可扩张的当且仅当除 e 外的所有上树边的集合可以划分为相邻边对.

证 因为 G 是二面 $(T+e)$ 可扩张的. 由 Euler 公式, G 的一个二面嵌入可以在 $T+e$ 的球面上的二面嵌入的基础上, 通过作 $\dfrac{\beta(G)-1}{2}$ 次单柄加而得到. 因为每作一次单柄加用到 G 的一对不含 e 的相邻上树边, 从而将除 e 外 G 的所有上树边划分为 $\dfrac{\beta(G)-1}{2}$ 个相邻对. 这就得到了必要性.

反之, 由那个相邻边对的划分可以在 $T+e$ 作为球面上的一个二面嵌入的基础上, 逐对作单柄加. 最后, 即可得 G 的一个在亏格为 $\dfrac{\beta(G)-1}{2}$ 的曲面上的一个二面嵌入, 从而充分性得证. ♮

对于图 $G=(V,E)$ 在一个可定向曲面上的一个嵌入 $\mu(G)$, 若两条边 $a=(u,v)$ 和 $b=(v.w)$ 在同一个面的边界上, 按以下次序出现:

$$Ra\,Sb\,Xa^{-1}Yb^{-1}, \tag{14.2.5}$$

由在 G 上去掉此两边, 并将 (14.2.5) 式的形式变为

$$RYXS \tag{14.2.6}$$

的运算, 被称为在 $\mu(G)$ 上作一次单柄减. 因为容易看出, 在 $\mu(G)$ 上作一次单柄减所得的图, 实际上是图 $G' = G - \{a, b\}$ 在亏格比 $\mu(G)$ 所在的可定向曲面的亏格小 1 的可定向曲面上的一个嵌入 $\mu(G')$. 这时, $\mu(G')$ 被称为 $\mu(G)$ 的一个简单约化嵌入, 或者说, G' 是 G 的一个简单约化图.

一个可以通过在 $\mu(G)$ 上作一系列的单柄减而得到的嵌入被称为 $\mu(G)$ 的约化嵌入. 如果 $\mu(G)$ 的一个约化嵌入, 不再进一步简单地被约化, 则称它为 G 的一个极小约化嵌入.

引理 14.2.6　一个图 G 的一个单面嵌入的所有极小约化嵌入皆为球面上的树.

证　若 G 本身不是树, 由 G 的单面可嵌入性, $\beta(G) = 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, 则 G 至少有两条上树边. 由 G 的连通性, G 至少有一个节的次不小于 3. 进而, 由单面可嵌入性和 G 不是树, $\mu(G)$ 有一个节点的次不小于 3, 并且有两条边 a 和 b 在形式 (14.2.5) 中. 对 a 和 b 作一次单柄减得 $\mu(G')(G' = G - \{a, b\})$ 仍为可定向曲面上的一个单面嵌入. 若 G' 仍非树, 可继续作单柄减. 由 G 度的有限性, 最终必得到一个树, 不再可简单地被约化. ♮

引理 14.2.7　一个图 G 的一个二面嵌入 $\mu(G)$ 的极小约化嵌入全是球面上的单圈图.

证　设 G 本身不是一个单圈图. 由二面可嵌入性, G 至少有三条上树边. 进而, 由 G 的连通性和非单圈性, $\mu(G)$ 必有一个面, 它的边界, 如形式 (14.2.5) 表示, 使得 a 和 b 是相邻的, 从而可以在 $\mu(G)$ 上作一次单柄减, 得到 $\mu(G')(G' = G - \{a, b\})$ 仍为可定向曲面上的一个二面嵌入. 用与引理 14.2.6 的证明类似的过程, 即可导出引理结论. ♮

基于引理 14.2.7, 可以提供一个图在可定向曲面上的上可嵌入性, 或者说, 单面与二面可嵌入性的表征.

定理 14.2.1　对于连通图 $G = (V, E)$, 下面的三个说法是等价的:

(1) G 在可定向曲面上是上可嵌入的, 或由引理 14.2.1, G 在可定向曲面上有一个单面或二面嵌入;

(2) 在 G 上有一个支撑树 T, 使得 G 是可约化到 T 或 $T + e$ 的, 其中 e 为 E 中对 T 的某上树边;

(3) 在 G 上有一个支撑树 T, 使得其上树至多有一个奇度的连通片.

证　(1) ⇒ (2). 这是引理 14.2.6 和引理 14.2.7 的一个直接结果.

(2) ⇒ (3). 由 (2), 所有上树边 (或只有 e 例外) 的集合, 可以划分为相邻边对, 从而上树的连通片 (或仅除 e 所在的片为奇度的外) 全是偶度的, 这就得到了 (3).

(3) ⇒ (1). 由引理 14.2.4 和引理 14.2.5, 即可得到. ♮

从上述结果自然要引进一个拓扑不变量, 并称之为图 G 的**亏数**, 即

$$\xi(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} \xi(G;T), \tag{14.2.7}$$

其中 $\xi(G;T)$ 为上树 $\bar{T}$ 的奇度连通片数, $\mathcal{T}$ 为 G 的所有支撑树的集合. 由定理 14.2.1, 即可得如下推论:

推论 14.2.1 一个连通图是上可嵌入的当且仅当它的亏数 $\xi(G) \leqslant 1$.

进而, 利用上述类似的方法, 还可发现图的最大亏格与图的亏数之间的关系.

推论 14.2.2 对于连通图 $G = (V, E)$ 有

$$g_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2}. \tag{14.2.8}$$

通过在图中找到一个支撑树, 使得其上树是连通的, 即可发现所有诸如 n 阶完全图 $K_n (n \geqslant 2)$, 完全 l 部图 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_l} (l \geqslant 2, n_1, n_2, \cdots, n_l \geqslant 1)$ 及 n 立方体图 $Q_n (n \geqslant 2)$, 甚至 4 边连通图等, 在可定向曲面上皆为上可嵌入的.

这里的全部讨论均可应用到不可定向的情形. 对此, 只需研究图的单面嵌入就足以确定其上可嵌入性.

14.3 商 嵌 入

令图 $G = (V, E)$ 和 $\mathrm{Aut}(G)$ 为 G 的自同构群. 设 Λ 为 $\mathrm{Aut}(G)$ 的一个非平凡的子群, 则可以构造另一个图, 称为 G 的**商图**, 并用 G/Λ 表示如下:

$$G/\Lambda = (V/\Lambda, E/\Lambda), \tag{14.3.1}$$

其中, V/Λ 和 E/Λ 分别有形式

$$\begin{cases} V/\Lambda = \{V_\Lambda(v) | \forall v \in V\}, \\ E/\Lambda = \{E_\Lambda(b) | \forall b \in E\}, \end{cases}$$

而且 $V_\Lambda(v)$ 与 $E_\Lambda(b)$ 分别为在 Λ 作用下 $v \in V$ 与 $b \in E$ 的轨道, 即

$$\begin{cases} V_\Lambda(v) = \{u | \forall u \in V, \ \exists \lambda \in \Lambda \ni u = \lambda v\}, \\ E_\Lambda(b) = \{e | \forall e \in E, \ \exists \lambda \in \Lambda \ni e = \lambda b\}. \end{cases}$$

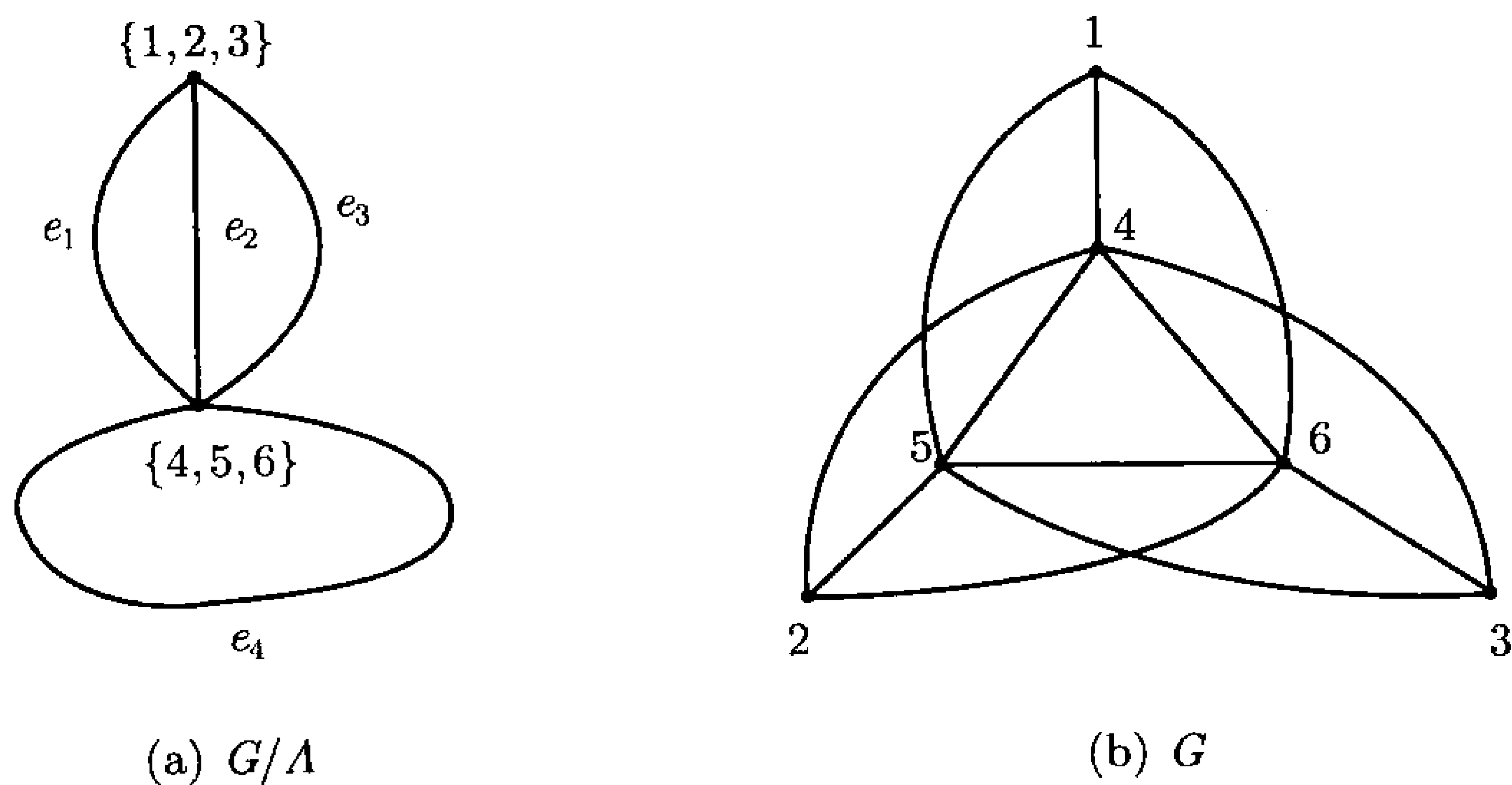
图 14.3.1(a) 所示的就是图 14.3.1(b) 所示的图对于

$$\Lambda = \{1, (123)(456), (132)(465)\}$$

的商图. 当然, Λ 是一个三阶的循环群. 在如图 14.3.1(a) 所示的 G/Λ 中,

$$e_1 = \{(1,5),(2,6),(3,4)\}, \quad e_2 = \{(1,4),(2,5),(3,6)\},$$

$$e_3 = \{(1,6),(2,4),(3,5)\}, \quad e_4 = \{(4,5),(5,6),(6,4)\}.$$



(a) G/Λ　　(b) G

图 14.3.1

对于 $G=(V,E)$ 的节点集 V 上的一个群 Γ, 若没有 $v \in V$, 使得 $\exists \gamma \in \Gamma - \{1\}$, $\gamma v = v$, 而且也没有 $e \in E$, 使得 $\exists \gamma \in \Gamma - \{1\}$, $\gamma e = e$, 则 Γ 被称为**自由地作用在** V 上. 在如图 14.3.1 所示的例子中, Λ 为自由地作用在 V 上. 若一个函数 quot_Λ: $G \to G/_\Lambda$, 使得

$$\begin{cases} \forall v \in V, \ \mathrm{quot}_\Lambda(v) = V_\Lambda(v), \\ \forall e \in E, \ \mathrm{quot}_\Lambda(e) = E_\Lambda(v), \end{cases} \tag{14.3.2}$$

则称之为对 Λ 的**商映射**. 对于两个图 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ 和 $G(V,E)$, 若一个映射 cop : $\tilde{G} \to G$ 与对于一个群 Λ 的商映射等价, 则称 cop 为一个**覆盖投影**, $\tilde{G}$ 为 G 的**覆盖图**或**覆盖空间**. 同时, G 被称为 $\tilde{G}$ 的**基础图**. 事实上, 如下的形式为可交换的:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \xrightarrow{\mathrm{cop}} & G \\ {\scriptstyle \mathrm{quot}_\Lambda}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{iso}} \\ \widetilde{G}/\Lambda & = & \widetilde{G}/\Lambda \end{array}$$

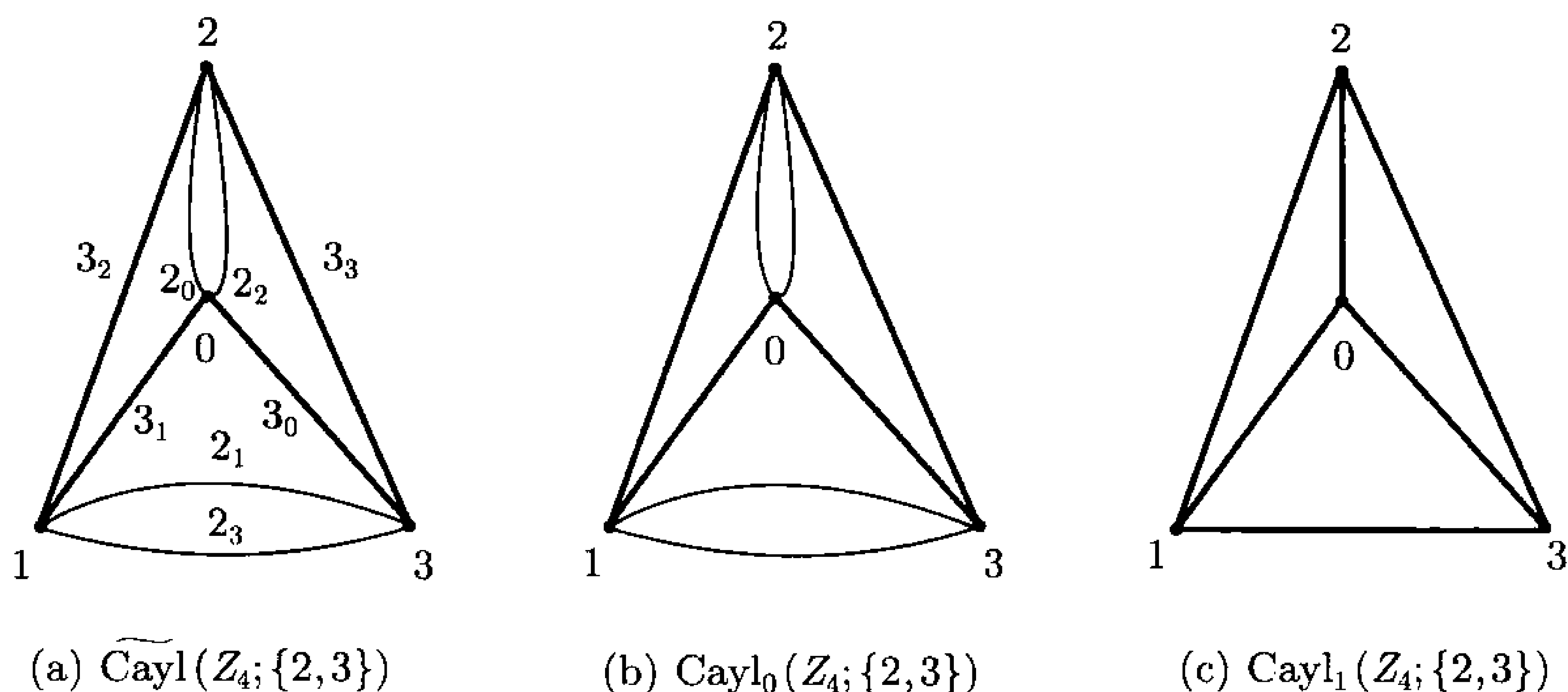
其中 iso 表示一个同构.

令 Γ 是一个非平凡的群, 即 $\Gamma \neq 1$, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 Γ 的一个生成元的集合. 所谓对于 Γ 和 X 的 Cayley 色图, 用 $\widetilde{\text{Cayl}}\,(\Gamma; X) = (\tilde{V}(\Gamma, x), \tilde{E}(\Gamma; X))$ 表示, 即这样一个在边上带色的图, 使得

$$\begin{cases} \tilde{V}(\Gamma; X) = \Gamma, \\ \tilde{E}(\Gamma; X) = \{\prec \alpha, \alpha x \succ \mid \forall \alpha \in \Gamma,\ \forall x \in X\}, \end{cases} \tag{14.3.3}$$

其中 x 表示边 $\prec \alpha, \alpha x \succ$ 的色. 通常用 x_α 表示边 $\prec \alpha, \alpha x \succ$.

如果在 Cayley 色图中不考虑边的方向和色, 则称之为第 0 类 Cayley 图, 用 $\text{Cayl}_0(\Gamma; X)$ 表示. 进而, 如果在 X 中有一个二阶的生成元 x, 则对于所有二阶生成元 x, 把 x_α 和 $x_{\alpha x}$ 合而为一, 这样所得的称为第 1 类 Cayley 图, 用 $\text{Cayl}_1(\Gamma; X)$ 表示, 并且将 $\text{Cayl}_0(\Gamma; X)$ 和 $\text{Cayl}_1(\Gamma; X)$ 统称为 Cayley 图. 图 14.3.2 中, (a), (b) 和 (c) 分别表示 Cayley 色图、第 0 类 Cayley 图和第 1 类 Cayley 图, 其中这个群 Γ 为 4 阶循环群 $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, 生成元的集合 $X = \{2, 3\}$.



(a) $\widetilde{\text{Cayl}}(Z_4; \{2,3\})$ (b) $\text{Cayl}_0(Z_4; \{2,3\})$ (c) $\text{Cayl}_1(Z_4; \{2,3\})$

图 14.3.2

可以验证, $\widetilde{\text{Cayl}}(\Gamma; X)$ 和 $\text{Cayl}_0(\Gamma; X)$ 皆为 $2n$ 正则的, 而 $\text{Cayl}_1(\Gamma; X)$ 则是 $(2n-k)$ 正则的, 其中 k 为 X 中二阶生成元的数目, $|X| = n$. 进而, 还可看出, $\text{Cayl}_0(\Gamma; X)$ 具有一类总体对称性: $\forall u, v \in V(\Gamma; X)$,

$$\exists \alpha \in \text{Aut}(\text{Cayl}_0(\Gamma; X)) \ni u = \alpha v,$$

并称之为节点可迁性.

引理 14.3.1 令 Γ 为一个群, X 为其生成元的集合且

$$\Lambda \subseteq \text{Aut}(\text{Cayl}_0(\Gamma; X))$$

与 Γ 的一个子群同构, 则 Λ 自由地作用在 Cayley 图 $\text{Cayl}_0(\Gamma; X)$ 上.

证　设 τ: $\Lambda \to \Gamma$ 是一个双射. 令 $\alpha_a \in \Lambda$ 为一个自同构且使得 $\tau(\alpha_a) = a \in \Gamma$, 则可以看出

$$\forall v \in V_0(\Gamma; X), \quad \alpha_a v = av \tag{14.3.4}$$

和 $av = v$ 当且仅当 $a = 1$, 即 Γ 中的幺元;

$$\forall x_v \in E_0(\Gamma; X), \quad \alpha_a x_v = x_{av} \tag{14.3.5}$$

和 $x_{av} = x_v$ 当且仅当 $a = 1$, 其中 $x \in X$. $V_0(\Gamma; X)$ 和 $E_0(\Gamma; X)$ 分别为 $\mathrm{Cayl}_0(\Gamma; X)$ 的节点集和边集. 由此, 即得引理的结论. ♮

对于一个多面形 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$, 或记为 $\Sigma(G) = (F)$, 其中 $G = (V, E)$, V, E 和 F 分别为 Σ 的节点集、边集和面集. 如果 Λ 是 Aut (Σ) 的一个子群, Aut (Σ) 为 Σ 的自同构群, 则 Σ 对于 Λ 的*商多面形*, 用 Σ/Λ 表示, 被定义为

$$\Sigma/\Lambda = (V/\Lambda, E/\Lambda, F/\Lambda), \tag{14.3.6}$$

其中 V/Λ 和 E/Λ 如 (14.3.1) 式中所确定, 而且

$$\begin{cases} F/\Lambda = \{F_\Lambda(h) | \forall h \in F\}, \\ F_\Lambda(h) = \{f | \forall f \in F, \exists \lambda \in \Lambda \ni f = \lambda h\}. \end{cases}$$

进而, 对于一个图 $G = (V, E)$ 在曲面上的嵌入 $\mu(G)$, 还可以定义*商嵌入*, 用 $\mu(G)/\Lambda$ 表示如下, 其中 $\Lambda \subseteq$ Aut (μG):

$$\mu(G)/\Lambda = (G/\Lambda, F/\Lambda), \tag{14.3.7}$$

其中 F 为 $\mu(G)$ 的面集. 例如, 若将图 14.3.1(b) 给出的图 G 的嵌入取为

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \Sigma(G) \\ &= (abc, b^{-1}gh^{-1}fe^{-1}kl^{-1}a^{-1}ed^{-1}lj^{-1}hi^{-1}c^{-1}jk^{-1}ig^{-1}df^{-1}) \\ &\subset P_3, \end{aligned}$$

其中 $a = (5,4)$, $b = (4,6)$, $c = (6,5)$, $d = (1,4)$, $e = (5,1)$, $f = (6,1)$, $g = (4,3)$, $h = (3,6)$, $i = (5,3)$, $j = (6,2)$, $k = (5,2)$, $l = (4,2)$, 则 G 对于那里的 Λ 的商嵌入为

$$\mu(G)/\Lambda = \Sigma(G/\Lambda) = (A, A^{-1}BC^{-1}DB^{-1}CD^{-1}) \subset P_1,$$

其中 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{j, e, g\}$, $C = \{k, d, h\}$, $D = \{l, f, i\}$. 这就提供了求一个图的嵌入对于一个群 Λ 的商嵌入的一种简单过程.

然而, 更为重要的则是其逆问题, 即从对于某群 Λ 的商图 G/Λ 的一个嵌入, 求图 G 的一个嵌入.

所谓**群权图**, 用 $G(\Gamma)=(V,E;\Gamma)$ 表示, 即指这样的一个有向图 $G=(V,E)$, 使得它的边用一个群 Γ 中的一个元素作为权. 当然, 如果一条边的权为 $a\in\Gamma$, 则此边的逆方向就有权 a^{-1}, 即 a 在 Γ 中的逆. 这里, Γ 被称为 $G(\Gamma)$ 的**权群**. 图 $\hat{G}=(V\times\Gamma,E\times\Gamma)$ 被称为 G 对于 Γ 的 (右) **扩充图**. 如果群中元素作为权分配到 $G=(V,E)$ 上, 则对于任何 $v\in V$,

$$\hat{v}=\{v_a|\forall a\in\Gamma\}\in\hat{V},$$

$\hat{V}=V\times\Gamma$ 为扩充图 $\hat{G}$ 节点集, 被称为 v 上的**纤维**. 类似地, 对于 $e=(u,v)\in E$,

$$\hat{e}=\{e_a|\forall a\in\Gamma,e_a=(u_a,v_{ab})\},$$

其中 b 为 e 上的权, 被称为 e 上的**纤维**. 将 $v\in V$ 上纤维中的节点映到 v, 同时将 $e\in E$ 上纤维中的边映到 e 的映射 nalp: $\hat{G}\to G$ 称为**自然投影**. 一个径

$$W=e_1^{\delta_1}e_2^{\delta_2}\cdots e_s^{\delta-s} \tag{14.3.8}$$

的**网权**被定义为其上边的权的积

$$a(e_1^{\delta_1})a(e_2^{\delta_2})\cdots a(e_s^{\delta_s}),$$

其中 $\delta_i=+1$(常被略之) 或 -1 分别表示沿 e_i 向前或向后的方向. 在基础图中, 一条径 W, 如 (14.3.8) 式所示的一个**提升**是指在其扩充图 $\tilde{G}$ 的一条径

$$\hat{W}=\tilde{e}_1^{\delta_1}\tilde{e}_2^{\delta_2}\cdots\tilde{e}_s^{\delta_s}, \tag{14.3.9}$$

使得边 $\tilde{e}_i$ 为 e_i 上的纤维 $\hat{e}_i$ 中的边, $i=1,2,\cdots,s$.

引理 14.3.2 令 W 为一群 Γ 的群权图 $G(\Gamma)$ 中的一条径. 它的始端为 u, 则对 u 上纤维中的每一个节点 $u_a,a\in\Gamma$, W 有唯一的提升以 u_a 为始端.

证 首先, 考察 W 的以 u 为始端的第一边 e_1. 设 $e_1=(u,v)$ 且它的权为 b, 则在 W 的提升中, 以 u_a 为始端的边只有 (u_a,v_{ab}). 另一方面, 若 $e_1=(v,u)$ 带权 b^{-1}, 则在 W 的提升中只有 $(v_a,u_{ab})^{-1}=(u_a,v_{ab^{-1}})$, 即 $(v_a,u_{ab^{-1}})^{-1}=(u_a,v_{ab})$. 然后, 由第一边的唯一性, W 的提升中第二边也是唯一的. 如此下去, 由 W 长度的有限性, 即得引理的结论. ▯

当 W 是一个圈 C 时, 可以看出若这个群为 Abel 群时, 则 C 上的网权与始节点的选择无关. 若它不是 Abel 的, 则相应于始端的不同选择的 C 上不同的网权全

是共轭的, 从而在群中有相同的阶. 当然, C 的在逆方向上的网权为 C 的网权的逆. 基于引理 14.3.2, 进一步有如下引理:

引理 14.3.3 令 C 为一群 Γ 的一个群权图 G 中的一个 k 圈, 使得 C 上的网权在 Γ 中为 m 阶的, 则用 $\mathrm{nalp}^{-1}(C^{-1})$ 所表示的 C 的所有提升的并的每个连通片均为 km 圈, 并且有 $|\Gamma|/m$ 个这样的连通片.

证 令 C 为一个回 (或闭径) W, 以 u 为起端. 记 b 为 W 上的网权, u_a 为 u 上纤维中的一个节点, 则 $\mathrm{nalp}^{-1}(C)$ 含 u_a 的连通片, 由回 W_a(由引理 14.3.2 知它为 W 的唯一提升), $W_{ab}, W_{ab^2}, \cdots, W_{ab^{m-1}}$ 中的边形成. 这些回皆为一端接一端相连, 从而为一个 km 圈.

对于由网权 b 产生的循环群的 $|\Gamma|/m$ 个左陪集的每一个都有 $\mathrm{nalp}^{-1}(C)$ 的唯一个连通片, 即得引理的结论. ♮

令 $G(\Gamma)$ 为一个群权图. 对每个 $a \in \Gamma$, 即权群, 令

$$\tau_a : \hat{G} \to \hat{G}, \tag{14.3.10}$$

使得 $\tau_a(v_b) = v_{ab}$(在节点上), $\tau_a(e_b) = e_{ab}$(在边上). 容易验证, τ_a 是 $G(\Gamma)$ 的扩充图 $\hat{G}$ 上的一个自同构, 而且也易看出, τ_1 是幺元, $\tau_a\tau_b$ 也是 $\hat{G}$ 上的自同构. 进而还知没有 $\tau_a\,(a \neq 1)$ 带不动节点或不动边. 换言之, $\tau_a\,(a \in \Gamma)$ 是自由地作用到 $\hat{G}$ 上. 这样, Γ 同构于 $\mathrm{Aut}(\hat{G})$ 的一个子群.

定理 14.3.1 令 $G(\Gamma)$ 为一群 Γ 的某群权图, $\hat{G}$ 为它的扩充图, 则有

$$G(\Gamma) = \hat{G}/\Gamma. \tag{14.3.11}$$

证 因为 Γ 同构于 Aut $(\hat{G})$ 的一个子群, 由 (14.3.1) 式, 即得定理的结论. ♮

定理 14.3.1 使得对于图 G 的权群不必将扩充图 $\hat{G}$ 和覆盖图 $\tilde{G}$ 加以区别.

一个群权图 $G(\Gamma)$, 若所有在 $G(\Gamma)$ 中圈的网权均为 Γ 的幺元, 或者说, 满足 Kirchhoff 电压定律 (KVL), 则称之为*电压图*.

当一个电压图嵌入到曲面上, 其在此曲面上对偶嵌入的基准图, 被称为*电流图*.

不管电压图还是电流图, 均曾用来求完全图在曲面上的三角剖分. 事实上, 它们在研究 Cayley 图或者它的推广和 Schreier 图的曲面嵌入时, 引人注意.

已经知道, 大多数的正则图均为 Schreier 图. 所谓 Schreier *色图*, 用 $\widetilde{\mathrm{Sch}}(\Gamma : \Lambda; X)$ 表示, 其中 Λ 为 Γ 的一个子群, X 为 Γ 的生成元的集合, 是这样的图, 使得节点集为在 Γ 中 Λ 的 (右) 陪集 (当 Λ 非正规时) 的集合, 用 $\Gamma : \Lambda$ 表示, 由 $a \in \Gamma$: Λ 带色 $x \in X$ 指向 ax, 即 $\prec a, ax \succ$ 或与 Cayley 色图情形类似, 也简记为 x_a 作为边.

同样地, 还可定义第 0 类 Schreier 图, 用 $\mathrm{Sch}_0(\Gamma : \Lambda; X)$ 表示, 第 1 类 Schreier 图用 $\mathrm{Sch}_1(\Gamma : \Lambda; X)_\xi$ 表示, 但这时一个 2 有向圈上的色不一定在 Γ 中为 2 阶的.

这个圈在 $\mathrm{Sch}_1(\Gamma:\Lambda;X)$ 中也变为一条边. 将 $\mathrm{Sch}_0(\Gamma:\Lambda;X)$ 和 $\mathrm{Sch}_1(\Gamma:\Lambda;X)$ 也统称为 Schreier 图, 并记为 $\mathrm{Sch}(\Gamma:\Lambda;X)$.

例如, 在图 14.3.3 中, (a), (b) 和 (c) 分别为 Schreier 色图、第 0 类 Schreier 图和第 1 类 Schreier 图, 其中 $\Gamma=\{0,1,2,3\}=Z_4$, $\Lambda=\{0,2\}$ 和 $X=\{2,3\}$. 这时, 自然 Λ 是正规的, 它的陪集用 Λ 和 $\Lambda_1=\{1,3\}$ 表示.

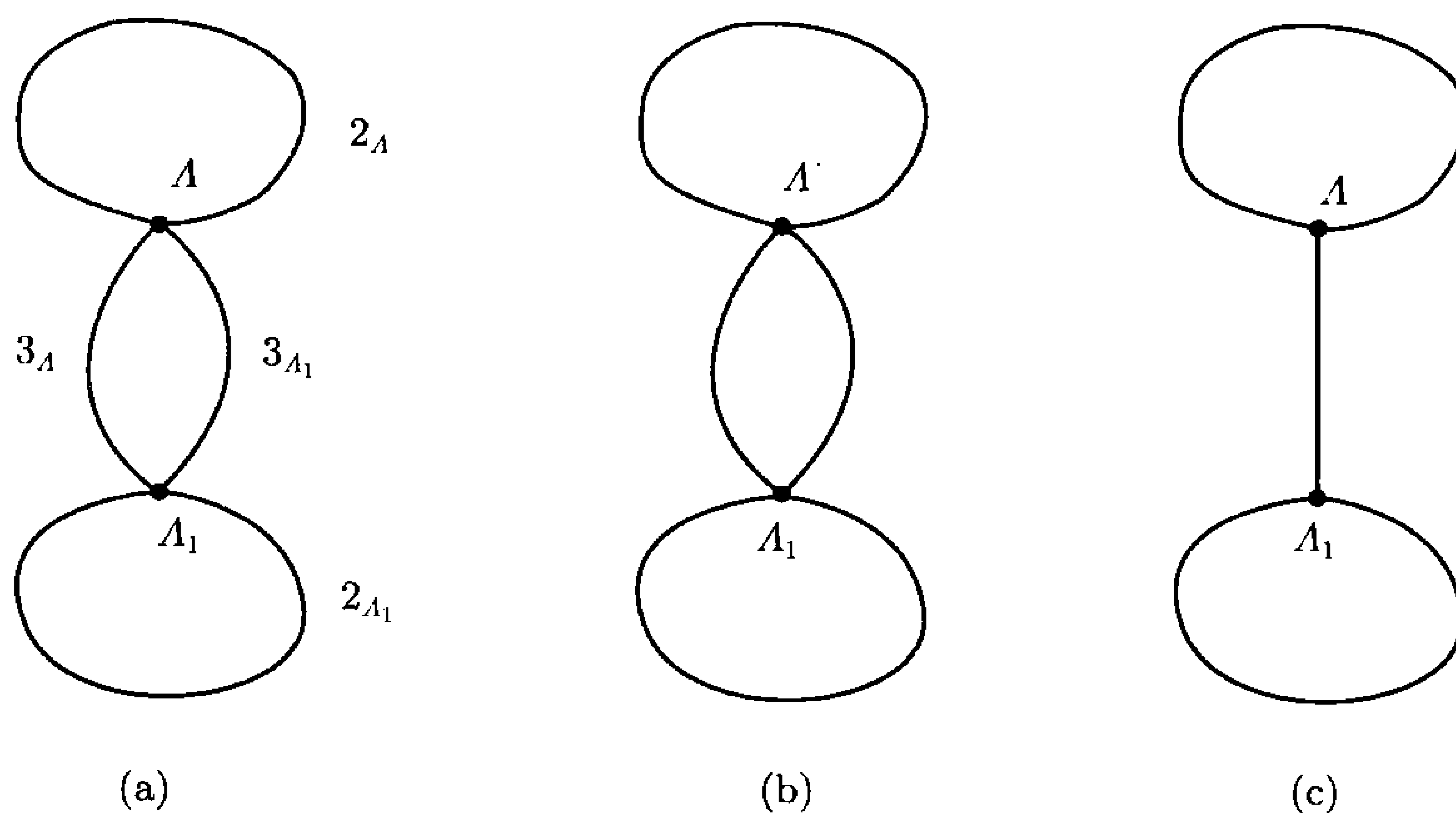


图 14.3.3

定理 14.3.2 令 Γ 是一个群, X 为 Γ 的生成元集合, 则 Cayley 图 $\mathrm{Cayl}_0(\Gamma,X)$ 是环束 B_n 的一个覆盖, 其中 B_n 为由一个节点和 n 个环组成的图.

证 设 u 为 B_n 的那个节点, $e_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为 B_n 中的 n 个环. 如果生成元 $x_i\in X\,(i=1,2,\cdots,n)$ 被分配到 e_i 上作为权, 则可以看出覆盖图 $\tilde{B}_n$ 与此 Cayley 色图 $\widetilde{\mathrm{Cayl}}(\Gamma,X)$ 同构. 因为 τ: $\tilde{B}_n\to\widetilde{\mathrm{Cayl}}(\Gamma,X)$, 使得

$$\begin{cases}\tau(u_a)=a, & a\in\Gamma,\\ \tau(e_i,a)=(a,ax_i), & x_i\in X,a\in\Gamma\end{cases}$$

就是一个同构. 定理得证. ▯

另外, 由定理 14.3.1, 若 G 是 B_n 的一个覆盖图, 并且这个关联群 Γ 为自由地作用在 G 上, 则有 Γ 中元素作为权到 B_n 上的一个分配, 使得分配的权生成 Γ, 并且覆盖图 $\tilde{B}_n$ 与 G 同构.

14.4 下可嵌入性

设一个图有一个*三角剖分*, 即曲面上的这样一个嵌入, 使得所有的面皆为三角形. 一个图的*三角剖分性*, 即指确定这个图在曲面上是否有三角剖分. 它对于研究

图在曲面上的下可嵌入性曾起过重要作用. 事实上, n 阶完全图 K_n 的下可嵌入性就是所谓引线问题, 它是由 Hilbert 和 Cohn-Vossen 在文献 (Hilbert, D. -S. Cohn-Vossen [1]) 中提到的. 特别是它被用来证明 Heawood 地图着色定理的主要的, 而且是最困难的部分. 这方面的详情可参见文献 (Ringel, G [3], Liu, Y. P. [13~17]). 本节只论证 K_n 的下可嵌入性的核心思想. 这就是利用商嵌入, 以电压图 (或对偶地, 电流图) 的形式, 相应地构造图的下嵌入.

引理 14.4.1　图 $G=(V,E)$ 在曲面 P_p (或 Q_q) 上的嵌入 $\mu(G)$, F 为它的面集, 为一个三角剖分当且仅当在 F 中有 $2|V|-4+4p$ (或 $2|V|-4+2q$) 个面, 或者等价地, E 中有 $3|V|-6+6p$ (或 $3|V|-6+3p$) 条边.

证　因为 $\mu(G)$ 为 P_p (或 Q_q) 上的一个嵌入且每个面皆为三角形, 则有 $3|F|=2|E|$. 由 Euler 公式, 即 (2.6.1) 式有

$$|F|=2|V|-4+4p(\text{或 } 2|V|-4+2q).$$

这就得到了必要性.

反之, 若面的数目为 $2|V|-4+4p$ (或 $2|V|-4+2q$), 由于 $\mu(G)$ 是一个嵌入, 使得可以由 Euler 公式, 即 (2.6.1) 式知 $3|F|=2|E|$. 这就意味着 $\mu(G)$ 的所有面必皆为三角形, 即得充分性. ◻

事实上, 任何一个 n 阶图 $G=(V,E)$, 即 $|V|=n$, 总可视为 K_n 的子图. 若用 t 表示 K_n 中不属于 E 的边的数目, 并用 $K_n-\{t\}$ 表示在 K_n 中去掉 t 条边后所得的图, 则 G 自然属于这种类型的图. 这就允许在研究一般图 (当然, 简单且连通的) 的三角剖分性时只就 $K_n-\{t\}$ 而论.

引理 14.4.2　若 $K_n-\{t\}$ 在曲面 $P_p(p\geqslant 0)$ 上有一个三角剖分, 则必有

$$p=\frac{(n-3)(n-4)-2t}{12} \tag{14.4.1}$$

且 n 为下面 4 种情形之一:

$$n=\begin{cases}0,3,4\text{ 或 }7\ (\mathrm{mod}\ 12), & t=0\ (\mathrm{mod}\ 6),\\ 2\text{ 或 }5\ (\mathrm{mod}\ 12), & t=1\ (\mathrm{mod}\ 6),\\ 1,6,9\text{ 或 }10\ (\mathrm{mod}\ 12), & t=3\ (\mathrm{mod}\ 6),\\ 8\text{ 或 }11\ (\mathrm{mod}\ 12), & t=4\ (\mathrm{mod}\ 6),\end{cases} \tag{14.4.2}$$

其中 $t=2$ 或 $5(\mathrm{mod}\ 6)$ 是不会出现的.

证　由引理 14.4.1 有

$$\frac{n(n-1)}{2}-t=3n+6p-6,$$

这就意味着

$$p=\frac{(n-3)(n-4)-2t}{12},$$

即得关系 (14.4.1). 由 p 的整数性有

$$(n-3)(n-4)-2t=0 \pmod{12}. \tag{14.4.3}$$

因为只需对 $0\leqslant n\leqslant 11$ 和 $0\leqslant t\leqslant 5$ 讨论关系 (14.4.3). 通过枚举可知当 $t=2$ 或 5 时, 不存在 n 满足 (14.4.3) 式, 对 $t=0,1,3$ 或 4 允许关系 (14.4.3), 从而进一步可得 (14.4.2) 式. ♮

引理 14.4.3 若 $K_n-\{t\}$ 在曲面 $Q_q(q\geqslant 1)$ 上有一个三角剖分, 则必有

$$q=\frac{(n-3)(n-4)-2t}{6}, \tag{14.4.4}$$

n 为如下两种情形之一:

$$n=\begin{cases}0,1,3 \text{ 或 } 4 \pmod 6, & t=0 \pmod 3,\\ 2 \text{ 或 } 5 \pmod 6, & t=1 \pmod 3.\end{cases} \tag{14.4.5}$$

同时, $t=2 (\text{mod } 3)$ 是不会出现的.

证 由引理 14.4.1 有

$$\frac{n(n-1)}{2}-t=3n-6+3q,$$

这就意味着

$$q=\frac{(n-3)(n-4)-2t}{6},$$

即得 (14.4.4) 式. 由 q 为整数有

$$(n-3)(n-4)-2t=0 \pmod 6. \tag{14.4.6}$$

因为只需对 $0\leqslant n\leqslant 5$ 和 $0\leqslant t\leqslant 2$ 讨论 (14.4.6) 式. 通过枚举, 即知情形 $t=2 \pmod 3$ 不可能出现, 当 $t=0$ 或 $1 (\text{mod } 3)$ 时, 即导致 (14.4.5) 式. 引理即可得证. ♮

由于 K_n 为 $K_n-\{t\}t=0$ 的情形, 从引理 14.4.2 和引理 14.4.3, 即得下面的推论.

推论 14.4.1 若 K_n 在曲面 P_p (或 Q_q) 上有三角剖分, 则必有

$$p=\frac{(n-3)(n-4)}{12}\left(\text{或 } q=\frac{(n-3)(n-4)}{6}\right), \tag{14.4.7}$$

n 只能为如下的情形之一:

$$n=0,3,4 \text{ 或 } 7 \pmod{12} \ (\text{或 } 0,1,3 \text{ 或 } 4 (\text{mod } 6)). \tag{14.4.8}$$

更重要, 也更困难的部分是考察 (14.4.7) 式和 (14.4.8) 式对于 K_n 具有三角剖分是否充分.

为完成这部分, 要构造 K_n 在亏格如 (14.4.7) 式给出的曲面上的三角剖分, 其中 n 满足条件 (12.4.8).

这一任务可以通过利用商嵌入, 或更准确地电流图 (或对偶地, 电压图) 的嵌入来完成. 这里, 典型且较容易的情形为 $n = 7 \pmod{12}$. 当然, 在可定向的情形下. 若记 $n = 12s + 7 (s \geqslant 0)$, 则这时 K_n 有 $12s + 7$ 个节点和 $(12s + 7)(6s + 3)$ 条边.

目标是构造 K_n 的一个嵌入具有 $(12s + 7)(4s + 2)$ 个面, 节点数、边数和面数的最大公约数为 $12s+7$. 由此, 一个可能的途径是考察一个有 $4s+2$ 个节点、$6s+3$ 条边和一个面的嵌入, 作为 K_n 嵌入的对偶的候选商嵌入.

事实上, 这个商嵌入的对偶为一个含 $6s + 3$ 个环的环束在曲面 P_{s+1} 上的一个嵌入. 只要这个候选者被找到, 剩下的问题就是如何找到这个群, 使得对于它, 这个候选者, 确为一个商嵌入.

由于它有 $6s + 3$ 条边, 这就建议我们要找一个 $12s + 7$ 阶的群, 以便将它的 $6s + 3$ 个元素, 其中任何两个均互不为逆, 分配给这 $6s + 3$ 条边, 同时在每个 3 节点处满足 Kirchhoff 电流定律 (mod $(12s + 7)$).

假若取 Z_{12s+7}, 即模 $12s + 7$ 的整数群为这个群, 则总可以找到满足所述条件的权分配, 对 $s \geqslant 1$, 这个一般的电流图, 在图 14.4.1 中给出, 其中实圆点所表示的节点处的旋为逆时针方向. 自然, 那些以小圆圈表示的节点处的旋为顺时针方向, 未标示出权的边上的权可依照 Kirchhoff 电流定律从给出的权, 沿 Hamilton 圈 $(v_0, v_1, \cdots, v_{4s+1})$ 依次导出.

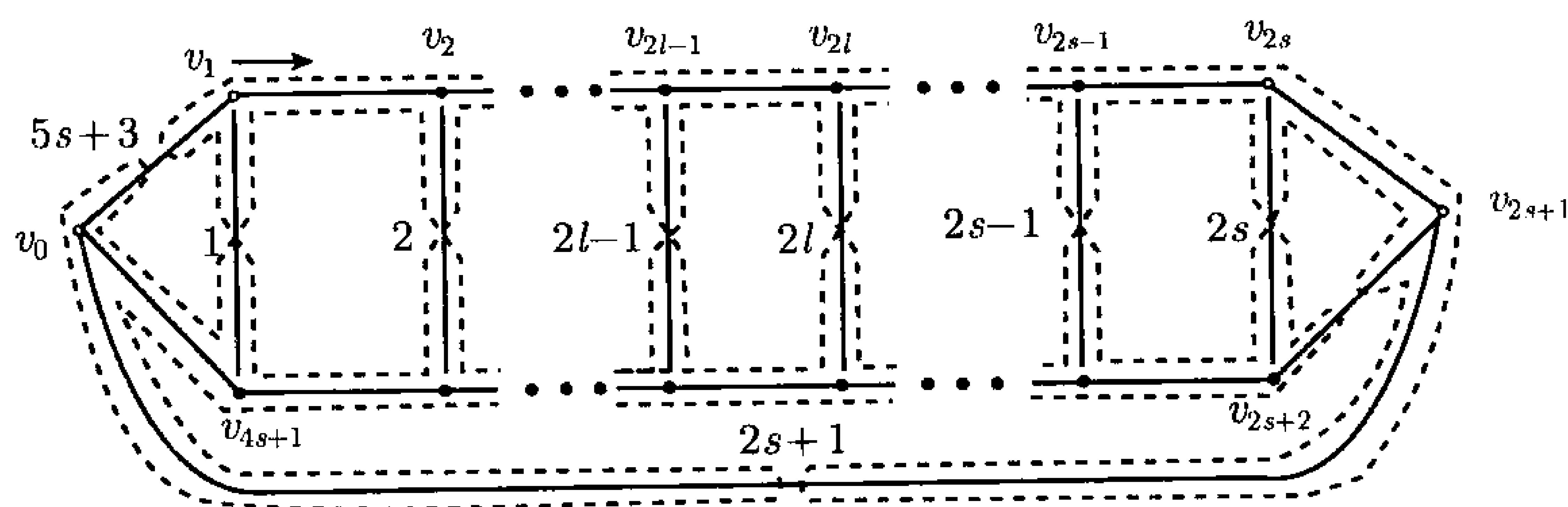


图 14.4.1

在每一条边两侧的细虚线是依所示的方向, 根据旅行规则 (见 2.1 节) 所得的那个面的边界. 由 Euler 公式可知它是在曲面 P_{s+1} 上的一个嵌入.

现在可以容易地从电流图在 P_{s+1} 上的嵌入, 即商嵌入, 产生它的覆盖嵌入. 事实上, 只要将电流图嵌入的那个面边界所确定的权的循环序列, 对这个群每一个元作群的运算即可得到. 因为共有 $12s + 7$ 个元可产生 $12s + 7$ 个面. 这个覆盖嵌入

的对偶就是 $K_n(n=12s+7, s\geqslant 1)$, 在亏格为

$$12s^2+7s+1$$

(由 (14.4.7) 式所确定) 的可定向曲面上的一个三角剖分.

因为商嵌入不含 $s=0$ 的情形, 还要看是否 K_7 可以在亏格为 1 的可定向曲面上 (即环面) 有三角剖分, 在图 14.4.2 中就给出了这个三角剖分.

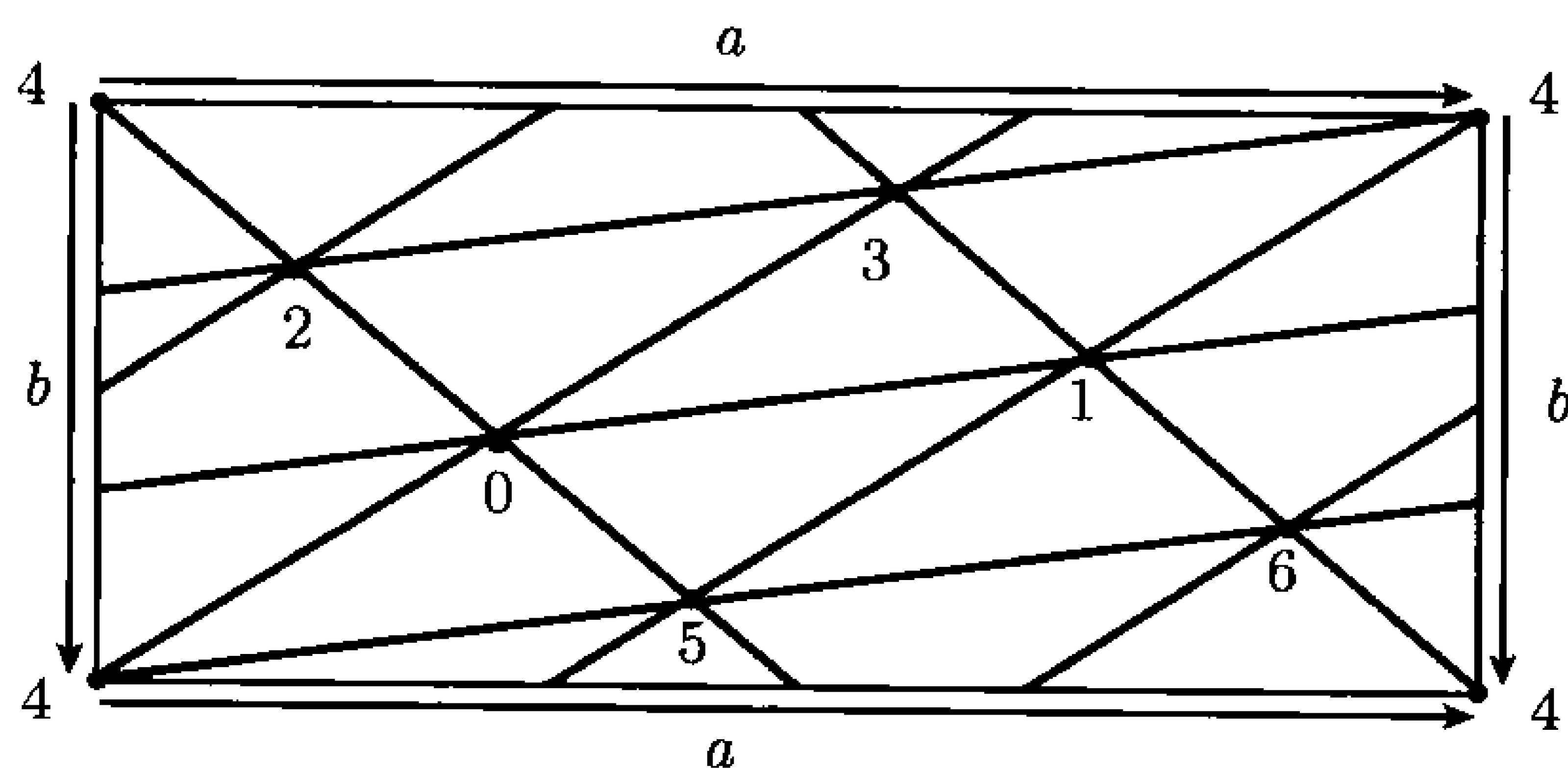


图 14.4.2

与情形 $s=7\pmod{12}$ 类似地, 也可以为构造出 $K_n(n=0,3$ 和 $4\pmod{12})$, 在相应的可定向曲面上的三角剖分, 先找出一个相应的商嵌入. 不过, 对这些情形, 均需引入一些各有特色的技巧, 才能利用这个一般的方法. 这就是说, 可以得到如下的引理:

引理 14.4.4　对于 $n=0,3,4$ 或 $7\pmod{12}$, K_n 在亏格为如 (14.4.7) 式所示的 p 的可定向曲面上有一个三角剖分. ♮

对于不可定向曲面, 这里也仅分析一个典型且较简单的情形. 这就是 $n=0\pmod{12}$.

首先, 从图 14.4.3(a) 可以看出, K_{11} 对 Z_{11} 为权群 (电压) 的商图 (电压图) 的一个在 Q_2, 即 Klein 瓶上的嵌入. 通过此, 先构造 K_{11} 在不可定向曲面 Q_{12} 上的一个嵌入, 它有 11 个节点、55 条边和 34 个面. 在面中有 33 个三角形的一个边界长为 11 的面. 然后, 再由这个嵌入, 求 K_{12} 在 Q_{12} 上的一个三角剖分.

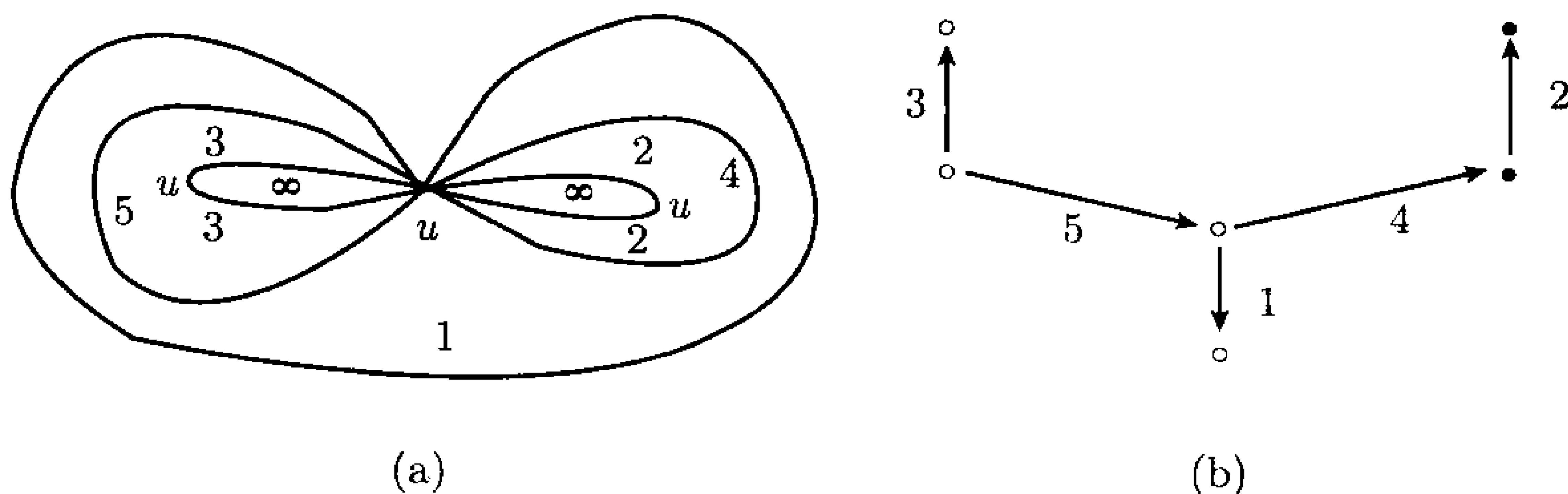


图 14.4.3

事实上, 只要在那个边界长为 11 的面内引进一个节点, 并与边界上 11 个节点都连上边即得. 在图 14.4.3(a) 中, 带阴影的部分表示在相应的区域中有一个叉帽. 也就是说, 那两个分别带权 2 和 3 的边皆为环. 图 14.4.3(b) 给出了图 14.4.3(a) 的对偶情形, 即相应电流图在 Q_2 中的嵌入.

一般地, 即对于 $s \geqslant 2$, $n = 12n$, 利用群 Z_{12s-1} 上的电流图如图 14.4.4 所示的嵌入, 求得 K_{n-1} 的嵌入的对偶, 其中只一个面边界长为 $n-1$, 即 K_{n-1} 的一个 Hamilton 圈, 其他所有面皆为三角形.

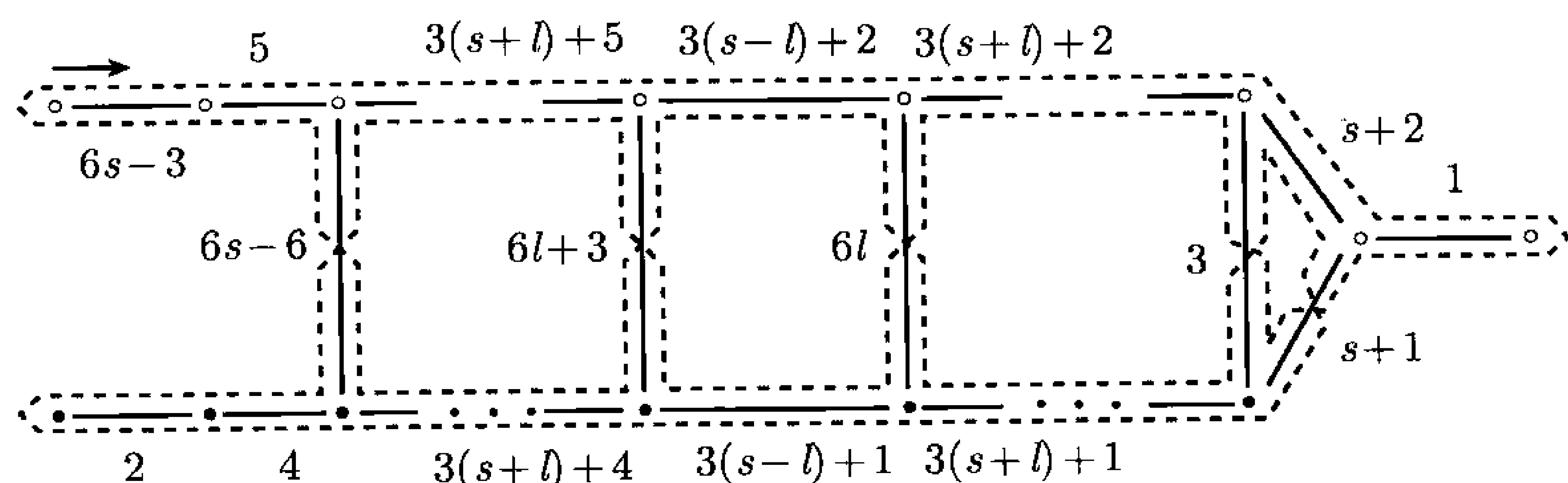


图 14.4.4

自然, 它所在的不可定向曲面的亏格为由 (14.4.7) 式给出. 最后, 在这个例外面中引进一个新的节点, 并与这个 Hamilton 圈上每一节点连一边, 即可得所要求的 K_n 三角剖分.

用类似的方法, 但必须对每种情形都作具体分析, 并作一些巧妙的处理, 也可对 $n = 0, 1$ 和 $7(n \neq 7)$, 3 和 9, 或 4 和 10(mod 12) 求出 K_n 在亏格由 (14.4.7) 式确定的不可定向曲面上的三角剖分, 从而有如下的引理:

引理 14.4.5　对于 $n = 0, 1(n \neq 7$, 因为可以证明 K_7 不可能在 Klein 瓶上有三角剖分), 3 或 4(mod 6), K_n 均在亏格如 (14.4.7) 式所确定的不可定向曲面上有三角剖分. ♮

由引理 14.4.4 和引理 14.4.5 可见, 条件 (14.4.8) 对于 K_n, 除去 $n = 7$ 的不可定向情形这个仅有的例外, 具有三角剖分是充分的, 而且还可以看出, 对于 $n = 0, 3, 4$ 或 7(mod 12) ($n = 0, 1(n \neq 7)$, 3 或 4(mod 6)), K_n 在可定向 (不可定向) 曲面上全是下可嵌入的. 进而, 通过讨论 $K_n - K_2(n = 5(\text{mod } 12))$, $K_n - K_3(n = 1, 6$ 或 $10(\text{mod } 12))$, $K_n - K_5(n = 11(\text{mod } 12))$ 以及 $K_{n+1}(n = 2, 8$ 或 $9(\text{mod } 12))$ 的一些子图的三角剖分性, 同时用一些巧妙的变换, 可以表明 n 阶完全图 K_n 是可以嵌入到亏格为 $\left\lceil \dfrac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ 的可定向曲面上的. 在上面的叙述中, $K_n - K_r(r = 2, 3, 5)$ 是指在 K_n 中去掉它的一个完全子图 K_r 的所有边而得到的图. 这就使得有如下的定理:

定理 14.4.1　完全图 $K_n(n \geqslant 3)$ 在可定向曲面上全是下可嵌入的.

证 由引理 14.4.4 和上面所讨论的可以看出 $K_n(n \geqslant 3)$ 总可嵌入到 $P_p\left(p = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil\right)$ 上, 而且

$$\left\lceil \frac{\beta(K_n)}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(n-1)-6n+12}{12} \right\rceil = p.$$

由推论 14.1.1, 即得定理的结论. ♮

对于不可定向曲面, 剩下的情形为 $n = 2, 5, 8$ 和 $11 (\mathrm{mod}\ 12)$. 通过讨论 $K_n - K_2(n = 5$ 或 $11(\mathrm{mod}\ 12))$, $K_n(n = 2(\mathrm{mod}\ 12))$, 带上两条附加边, 以及 $K_{n+1}(n = 8(\mathrm{mod}\ 12))$ 的一个子图的三角剖分性, 伴之一些适当的变换, 即可表明 K_n 可以嵌入到 Q_q 上, 其中 $q = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil$, 从而也有如下的定理:

定理 14.4.2 完全图 $K_n(n \geqslant 3,\ n \neq 7)$ 在不可定向曲面上全是下可嵌入的.

证 由引理 14.4.5 和上面所讨论的可以看出, $K_n(n \geqslant 3,\ n \neq 7)$, 总可嵌入到不可定向曲面 $Q_q\left(q = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil\right)$ 上, 而且

$$\beta(K_n) + 1 - \left\lfloor \frac{2\varepsilon}{2} \right\rfloor = \frac{n(n-1)}{2} - n + 2 - \frac{n(n-1)}{3} = q.$$

由推论 14.1.2, 即得定理的结论. ♮

最后还要指出, 对于无三角形 (即 3 圈) 的图, 推论 14.1.1 和推论 14.1.2 中的下界可以分别改进为

$$\left\lceil \frac{\beta(G) - \nu + 3}{4} \right\rceil$$

(当可定向时) 和

$$\left\lceil \frac{\beta(G) - \nu + 3}{2} \right\rceil$$

(当不可定向时). 这时的下嵌入自然指在亏格为

$$\left\lceil \frac{\beta(G) - \nu + 3}{4} \right\rceil$$

(可定向时) 或

$$\left\lceil \frac{\beta(G) - \nu + 3}{2} \right\rceil$$

(不可定向时) 的曲面上的嵌入, 其中 ν 和 ε 分别为图 G 的阶与度. 这里的方法也可用于确定 $K_{m,n}$, $K_{n_1,n_2,\cdots,n_s}(s \geqslant 3)$, Q_n 以及其他一些有 4 圈的图的下可嵌入性.

14.5 注　　记

(1) 图的曲面可嵌入性导源于进攻 Heawood 地图着色猜想. Heawood 于 1890 年提出了这个猜想, 参见文献 (Heawood, P. J. [1]). Hilbert 和 Cohn-Vossen 将它的解决归结为引线问题 (Hilbert, D. -S. Cohn-Vossen [1]). 一直到 1968 年, 这个猜想才变成了定理, 其完备的证明可参见文献 (Ringel, G. [3]). 在文献 (Liu, Y. P. [13~17]) 中还可以看到对于这个证明的简化与对一些概念的澄清. 同时, 也可以看到直到 20 世纪 70 年代末, 有关图的曲面嵌入的文献. 这一专题的研究近况在文献 (Gross, J. L. -T. W. Tucker [1]) 中有所介绍.

(2) 从一个图的支撑树嵌入到球面上开始, 以算法的形式确定这个图的最大亏格 (可定向或不可定向的) 的方法, 出自 1979 年的文献 (Liu, Y. P. [8, 9]). 同时, 在这一年里也出现了用图的亏数表征它的可定向最大亏格 (Xuong, N. H. [1]).

(3) 虽然已经证明很多类的图在可定向曲面上是上可嵌入的 (Liu, Y. P. [10]). 一般地, 3 正则的图在什么样的明显条件下是上可嵌入的, 似乎仍然是现在尚不清楚的一个核心问题.

(4) 电流图是由 Gustin 于 1963 年首先引进的 (Gustin, W. [1]). 之后, 由 Youngs 提出了重要改进 (Youngs, J. W. T. [1]). 其对偶形式, 即电压图是于 20 世纪 70 年代由 Gross 首先利用. 接着, 又由 Tucker 作出了改进, 参见文献 (Gross, J. L. -T. W. Tucker [1]). 不管怎样, 在一个给定图上分配权 (电流或电压) 是一类组合设计问题. 这个问题距完满解决仍很遥远.

(5) 通过改进推论 14.1.1 和推论 14.1.2 中的下界, 很多类的下可嵌入性问题可以相应地提出. 然而, 即使是确定一个图具有三角剖分的表征, 仍距完满解决很远. 现在仅知道一些部分的解答. 例如, $K - K_2$, $K - K_3$, $K - K_5$ 等 (Liu, Y. P. [13~17]).

(6) 如何用禁用构形表征一个图是否在给定亏格的曲面上有一个嵌入, 至今仍是很活跃的. 然而, 已被证明对于给定亏格的曲面, 图在其上的可嵌入性可以用有限个禁用构形表征 (Robertson, N. -P. Seymour [1~3]). 不管怎样, 除了熟知的 Kuratowski 定理用两个图 K_5 和 $K_{3,3}$ 组成了对图的平面性, 或者说, 对于在 P_0 上的可嵌入性的禁用构形的完备集 (Kuratowski, K. [1]), 还知道对于图在射影平面 Q_1 上的可嵌入性的禁用构形的完备集, 至少由 103 个元素组成 (Glover, H. -J. Huneke-C. S. Wang [1]), 对于图在任何不可定向的曲面上的可嵌入性的禁用构形, 包含有限个 3 正则图 (Archdeacon, D. -P. Huneke [2]). 关于这一专题还可参见文献 (Archdeacon, D. [1], Archdeacon, D. -P. Huneke [1], Glover, H. -J. Huneke [1, 2]) 等.

(7) 将禁用构形作为次形, 近年来有了很大的发展, 参见文献 (Robertson, N. -P. Seymour [1~3]). 所谓一个图 G 的*次形* M 是指这样的图 M, 使得与将 G 的某个连

通子图收缩一些边所得的图同构. Robertson 和 Seymour 证明对于图上的任何一个性质 P, 只要 P 在子形上是闭的, 则必存在图的一个有限集 L, 使得任何一个图 G 具有 P 当且仅当不存在一个次形与 L 中的某个图同构. 常称这一事实为图的*次形定理*. L 中的元素均视为对于 P 的禁用构形, 即极小的不具有性质 P 的图. 作为次形定理的一个重要结果, 已经知道对上述性质的识别是可以在算法上多项式地实现的. 当然, L 是依赖于 P 的. 对于一个给定的 P, 将 L 求出来仍然是一个不可避免的问题. 例如, 若 P 表示平面性, L 就由 K_5 和 $K_{3,3}$ 这两个图组成.

(8) 另一个应该在这里提到的关于图的次形的专题就是所谓 Wagner 猜想: 对于图的任何一个无限序列 $\{G_\alpha|\alpha \in C\}$($C$ 为一个数的无限集), 总存在指标 i 和 $j(i < j)$, 使得 G_i 与 G_j 中的一个次形同构. 虽然, 一般来说, 这个猜想已被证明不成立, 但对于 C 为可数集时仍然是一个公开问题.

(9) 进而, 在第 16 章中, 还将会看到对于拟阵的次形也可作类似的研究.

(10) 因为对于图上的性质 P 的禁用构形一般来说可以不是次形, 如何估计这种禁用构形的完备集的基数, 仍然是尚未解决的问题. 例如, 在可平面图上的 4 可着色性对于次形是闭的, 但无次形为这种性质的禁用构形. 当然, 这是与图的次形定理是一致的. 然而, 至今仍不知道对此是否有由小于 1000 个禁用构形组成的一个完备集 (Appel, K. -W. Haken [1~3], Appel, K. -W. Haken-J. Kock [1], Heesch, H.[1, 2], Liu, Y. P. [13~17]).

(11) 在上可嵌入性以及图的最大亏格方面, 自第一版以来, 已经出现了一批新结果. 例如, 文献 (Huang, Y. Q. -Y. P. Liu [1~8], Huang, Y. Q. -Y. P. Liu -Y. M. Chu [1], Hang, Y. Q. -Y. P. Liu -L. Tang [1], Li, D. M. -Y. P. Liu [1~6], Wei, E. L. [2], Wei, E. L. -Y. P. Liu [1, 5, 6], He, W. L. -Y. P. Liu [1], He, W. L. -Y. P. Liu-X. Ren [1], Chen, Y. C. -Y. P. Liu [1, 2], Dong, G. H. -Y. P. Liu [1, 2], Wang, H. Y. -Y. P. Liu [1], Chai, Z. -Y. P. Liu [1]) 等.

(12) 在图的嵌入依曲面亏格的分布方面, 可参见文献 (Chen, J. E. -J. L. Gross-R. G. Rieper [1], Hao, R. X. -W. L. He-Y. P. Liu [1], Hao, R. X. -Y. P. Liu [2, 3], Wan, L. X. -Y. P. Liu [1~3], Yang, Y-Y. P. Liu [1], Shao, Z. L. -Y. P. Liu [1, 2], Zhao, X. M. -Y. P. Liu[1, 2], Li, L. F -Y, P, Liu [1], Zhu, Z. L. -Y. P. Liu [1]) 等.

(13) 关于 Cayley 图的新研究, 可参见文献 (Feng, Y. Q. -Y. P. Liu-M. Y. Xu[1]).

第 15 章　极嵌入问题

15.1　最优凸嵌入

从 5.4 节中所讨论的已经知道, 如果一个图以 f_0 为无限面在平面上有一个凸嵌入, 则对于平面上的任一凸多边形选定为 f_0 的边界, 这个图都有平面上的凸嵌入. 这里, 总是假设以一个给定的凸多边形为无限面的边界, 所讨论的图是凸可嵌入的.

令 $G=(V,E)$ 是一个图且以 B_0 作为无限面边界是凸可嵌入的. 设在每一节点 $v\in V$ 处有一个权 $w_v>0$, B_0 为平面上的一个凸多边形. 对于 G 的一个凸嵌入 $\mu(G)$ 并带有边界条件: 无限面的边界就是给定的凸多边形 B_0. 其节点集为 $V(B_0)=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 3)$. 记

$$f(\mu G)=\sum_{u\in V}w_u\sum_{\substack{(u,v)\in E\setminus E(B_0)\\ v\in V_u}}w_v l_\mu(u,v),\tag{15.1.1}$$

其中 $l_\mu(u,v)$ 为边 (u,v) 在 $\mu(G)$ 上的长度, $E(B_0)$ 为 B_0 上边的集合. 这里所关心的问题就是求出不在 B_0 上的节点的坐标. 自然, 它们都在 B_0 的内部区域中, 使得可以求出 G 的一个凸嵌入 $\mu_0(G)$ 具有性质

$$f(\mu_0 G)=\min_{\mu}f(\mu G),\tag{15.1.2}$$

其中 μ 取遍满足边界条件的所有可能凸嵌入. μ_0 被称为**最优解**, 或者说, G 的**最小凸嵌入**.

因为总是假设 G 为简单的, 当然不会有重边, 所有最小凸嵌入必定是平面上的直线嵌入. 这就允许将在 $\mu(G)$ 中边的长度视为欧氏距离. 对于 $v\in V$, 令 x_v 和 y_v 为 v 在平面上的坐标, 则对于 G 的一个平面嵌入 μ, 函数

$$g(\mu G)=\sum_{u\in V}w_u\sum_{(u,v)\in E\setminus E(B_0)}w_v l_\mu^2(u,v)\tag{15.1.3}$$

与函数 $f(\mu(G)$ 有相同的最优解, 其中

$$l_\mu(u,v)=\sqrt{(x_u-x_v)^2+(y_u-y_v)^2}.\tag{15.1.4}$$

人们也许会想到这样一个最简单的情形, 即在一平面嵌入 $\mu(G)$ 中只有一个内点, 换句话说, $G = W_{s+1}$ 为一个阶为 $s+1$ 的轮图. 下面看一下这时问题的最优解是怎样的.

设 v 是这个内节点, $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 为其他节点, 即在无限面边界上的节点. 这时, 只有两个变量 x_v 和 y_v 是未知的, 即 v 的两个坐标. 因为

$$\begin{aligned} g(\mu W_{s+1}) &= \sum_{i=1}^{s} w_v w_{a_i} + \sum_{i=1}^{s} w_{a_i} w_v l_\mu^2(a_i, v) \\ &= 2\sum_{i=1}^{s} w_v w_{a_i} l_\mu^2(v, a_i) \end{aligned}$$

在平面上是一个凸函数, 它有唯一的最小值且由如下的方程所确定:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_v} = 4\sum_{i=1}^{s} w_v w_{a_i}(x_v - p_i) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_v} = 4\sum_{i=1}^{s} w_a w_{a_i}(y_v - q_i) = 0. \end{cases} \tag{15.1.5}$$

方程 (15.1.5) 又与下面的方程等价:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} w_{a_i}(x_v - p_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{s} w_{a_i}(y_v - q_i) = 0, \end{cases} \tag{15.1.6}$$

并称之为这个问题的*临界方程*, 其中 $p_i = x_{a_i}, q_i = y_{a_i} (i = 1, 2, \cdots, s)$ 全是已知的.

容易看出, 由 (15.1.6) 式所给出的临界方程对于确有些 $i\,(i = 1, 2, \cdots, s)$, $w_{a_i} > 0$ 是适定的, 而且这个解为

$$\begin{cases} x_v = \left(\sum_{i=1}^{s} w_{a_i} p_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{s} w_{a_i}, \\ y_v = \left(\sum_{i=1}^{s} w_{a_i} q_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{s} w_{a_i}. \end{cases} \tag{15.1.7}$$

这说明它为 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的重心. 也容易看出, 由 (15.1.17) 式所确定的 W_{s+1} 在平面上的直线嵌入为凸的当且仅当无限面的边界是一个凸多边形.

而且, 这样一种较简单的想法只要稍加注意多个内节点时所引起的差异, 即可引申到一般的情形.

为简便起见, 记

$$v = (x_v, y_v), \quad v \in V - V(B_0). \tag{15.1.8a}$$

同样地, 也记

$$a = (x_a, y_a), \quad a \in V(B_0). \tag{15.1.8b}$$

进而, 令

$$\begin{cases} W_u = \displaystyle\sum_{\substack{(u,v)\in E\setminus E(B_0) \\ v\in V\setminus V(B_0)}} w_v + \sum_{\substack{(u,a)\in E\setminus E(B_0) \\ a\in V(B_0)}} w_a, \\ d_u = \displaystyle\sum_{\substack{(u,a)\in E\setminus E(B_0) \\ a\in V(B_0)}} w_a a, \end{cases} \tag{15.1.9}$$

其中 $u \in V - V(B_0)$.

至此, 可以对任何给定的平面嵌入 $\mu(G)$, 引进下面的方程组: $\forall u \in V - V(B_0)$,

$$W_u u - \sum_{\substack{v\in V\setminus V(B_0) \\ (u,v)\in E}} w_v v = d_u. \tag{15.1.10}$$

引理 15.1.1　对于一个给定的图 $G = (V, E)$, 节点的权 $w_v (v \in V)$ 为正且选定了无限面的边界, 方程组 (15.1.10) 是适定的.

证　因为由 (15.1.9) 式总有对任何 $u \in V\setminus V(B_0)$,

$$W_u - \sum_{\substack{v\in V\setminus V(B_0) \\ (u,v)\in E}} w_v = \sum_{\substack{a\in V(B_0) \\ (u,a)\in E\setminus E(B_0)}} w_a \geqslant 0,$$

方程 (15.1.10) 的系数矩阵没有一个特征值为 0, 从而它是适定的. ♮

由于根据第 5 章提供的理论, 判定一个图的平面性, 并使得无限面边界为给定的圈, 可以在这里只讨论一个图, 带有一个圈作为下面提及的边界总是可平面的, 带这样的边界条件, 使得给定的圈为其平面嵌入的无限面边界. 如果已经得到了方程 (15.1.10) 的一组解, 则只要将每对相邻的节点的坐标点用一条直线段连接, 即可唯一地构造一个直线嵌入. 称这个嵌入为 G 的一个临界嵌入, 并且以 B_0 作为无限面的边界.

引理 15.1.2　由方程 (15.1.10) 的解所确定的临界嵌入, 使由 (15.1.1) 式表示的 $f(\mu, G)$ 在所有可能的以 B_0 为无限面边界的嵌入 $\mu(G)$ 中取最小值.

证　由于 $f(\mu, G)$ 与 $g(\mu, G)$ 有相同的最小解, 可以只讨论 $g(\mu, G)$. 由 $g(\mu G)$ 的凸性, 这一点可以容易地由 $g(\mu G)$ 的 Jacobi 行列式的正定性验证 $g(\mu, G)$ 有唯一最小值, 而且这个值在以 B_0 为边界的方程 (15.1.10) 的那个解上达到, 从而引理得证. ♮

显见, 临界嵌入不总是凸的. 因为假若将 B_0 取平面上的非凸多边形时, 则这时的临界嵌入自然也是非凸的. 然而, 确有如下引理:

引理 15.1.3 一个图 $G=(V,E)$ 以 B_0 为边界的临界嵌入是凸的当且仅当 B_0 为平面上的一个凸多边形.

证 由上面的讨论可知必要性是直接的. 为证充分性, 要先证两个断言.

断言 1 在临界嵌入中, 每一个内节点均在其所有相邻节点的凸包的内部区域中.

证 令 v 为临界嵌入的外边界内的一个节点. 记 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 为所有与 v 相邻的节点. 因所有内节点均满足方程 (15.1.10), 由上面对于轮的情形的讨论, 即可发现 v 必处在 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 分别带权 $w_1 = w_{v_1}, w_2 = w_{v_2}, \cdots, w_l = w_{v_l}$ 的重心, 从而 v 在 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 的凸包的内部, 即得断言的结论. ♮

断言 2 若一个面 f 在一个平面嵌入中不是一个凸多边形, 则在 f 的边界上必有一个节点不在其所有相邻节点的凸包的内部.

证 由于 f 不是一个凸多边形, 则在 f 的边界上必有一个节点 v. 设在 f 边界上的两个与 v 相邻的节点为 u 和 w, 则它们在 G 中不相邻且连它们的直线段与 f 的内部没有公共点. 然而, 这时 v 本身不可能在它的所有邻节点的凸包的内部区域中. 这就得到了断言的结论. ♮

用反证法. 若临界嵌入不是凸的, 则它必有一个面 f 不是凸多边形. 由断言 2 在 f 的边界上有一个节点 v, 使得它不在其所有邻节点的凸包的内部区域中. 然而, 这又与断言 1 矛盾, 从而充分性得证. ♮

定理 15.1.1 对于图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 以给定的 B_0 为无限面边界, 由 (15.1.1) 式所定义的 $f(\mu, G)$ 在一个凸嵌入 $\mu_0(G)$ 上取最小值当且仅当 B_0 形成一个凸多边形, 而且这个凸嵌入 $\mu_0(G)$ 就是由方程 (15.1.10) 所确定的那个临界嵌入.

证 引理 15.1.1～引理 15.1.3 的一个直接结果. ♮

由定理 15.1.1, 可以称方程 (15.1.10) 为对于一般的图, 而不限于轮的*临界方程*.

若将所有节点的权均取为常数, 特别是 1, 则方程 (15.1.10) 变为

$$\rho_G(u)u - \sum_{\substack{v \in V \setminus V(B_0) \\ (u,v) \in E}} v = \sum_{\substack{a \in V(B_0) \\ (u,a) \in E}} a, \tag{15.1.11}$$

其中 $u \in V \setminus V(B_0)$.

推论 15.1.1 对于限制无限面边界为 B_0 的图 $G_1 = (V,E)$ 的一个平面嵌入, 当 B_0 是一个凸多边形时, 只要以 B_0 为无限面边界 G 就是凸可嵌入的, 则那个由方程 (15.1.11) 的解所确定的直线嵌入必为一个凸嵌入.

证 这是定理 15.1.1 对所有 $v \in V, w_v = 1$ 时的直接结果. ♮

推论 15.1.1 就是由 Tutte 首先发现的一个定理, 参见文献 (Tutte, W. T. [15]).

假若将边界条件减弱为 B_0 的至少三个节点在平面上不共线, 则对于这样一类相应边界问题, 也可以用以上所述的类似的方法解决.

事实上, 上面所讨论的确定 $f(\mu G)$ 的最小值的问题组合上与如下的问题等价: 对于图 $G=(V,E)$, 求它的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 使得

$$h(\mu G)=\sum_{e\in E\backslash E(B_0)} w(e)l_\mu(e)$$

取得最小值, 其中 $w(e)>0(e=(u,v),\ u,v\in V)$, 为在 $E\backslash E(B_0)$ 上定义的权函数, B_0 为给定的边界.

15.2　最短三角剖分

设图 $G=(V,E)$ 在平面上的一个直线嵌入 $\mu(G)$ 已经给出. 当然, 可以假设 $\mu(G)$ 是最小嵌入. 如上节所讨论的, 无限面的边界是给定的, 而且所有节点上的权皆取为 1. 在这里, 不必假设这个嵌入是凸的.

若 $\mu(G)$ 的一个*内面*, 即有限面, 不是三角形, 则可以将它的边界上的一些不相邻的节点, 对连边而划分为三角形面的并, 这样的一种划分称为*砌合方案*. 这个过程被称为*砌合*这个面. 将面砌合之后所得的结构被称为此面的*三角剖分*, 或者也称为它的*砌合*. 若一个平面嵌入的所有有限面均被砌合了, 则所得的结构也被称为这个嵌入的*三角剖分*或*砌合*.

一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的三角剖分, 使得其中所有三角形面周长的总和在所有可能的它的三角剖分中达到最小, 则称之为*最短的*. 如何有效地求出一个平面嵌入 $\mu(G)$, 或进而图 $G=(V,E)$ 的最短砌合是在这一节所讨论的中心问题.

从数学上来说, 因为平面嵌入 $\mu(G)$ 已知, 由 15.1 节所讨论的, 在这里只要研究求一个多边形的最短砌合就够了. 当然, 这个多边形不必限定为凸的. 只是为了叙述上的方便才假定它是凸的. 由此, 不难导出一般的情形.

设 $P_{\rm ol}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个凸多边形, $T_1(P_{\rm ol})$ 为 $P_{\rm ol}$ 的一个给定的砌合. 令 (a_i,a_j,a_k) 和 (a_j,a_k,a_l) 为带有一个单边 (a_j,a_k) 为公共边界的两个三角形. 由 $P_{\rm ol}$ 的凸性, 四边形 (a_i,a_j,a_k,a_l) 也为凸的.

这样就可以从中去掉这条公共边 (a_j,a_k), 添上 (a_i,a_l), 将 $T_1(P_{\rm ol})$ 变为 $T_2(P_{\rm ol})$. 将这种从 $T_1(P_{\rm ol})$ 到 $T_2(P_{\rm ol})$ 的变换称为在 $T_1(P_{\rm ol})$ 上作*对角置换*.

一个从多面形 $P_{\rm ol}$ 任选一个节点为 a_1 且连所有边 $(a_i,a_1)(i=3,4,\cdots,n-2)$ 而得到的砌合, 被称为*标准砌合*, 其中节点 a_1 称为它的*基点*. 当然, 任何一个凸多边形, 对任何一个节点为基点均有一个标准砌合. 用 $T_{\rm st}(P_{\rm ol})$ 表示 $P_{\rm ol}$ 的标准砌合.

引理 15.2.1 任何一个凸多边形 P_{ol} 的任何一个砌合 $T(P_{\text{ol}})$ 均可经过一系列的对角置换, 变为以任一选定节点为基点的标准砌合.

证 令 $P_{\text{ol}}=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$, v_1 选定为基点. 当然, 这是不失一般性的. 如果在砌合 $T(P_{\text{ol}})$ 中, v_1 的次为 $s-1$, 则它本身就是所要求的标准砌合; 否则, 必有一个三角形面 $(v_1,v_k,v_l)(2\leqslant k<l-1\leqslant s-2)$ 在 $T(P_{\text{ol}})$ 中.

因为 (v_k,v_l) 并不是 P_{ol} 上的边, 则在 $T(P_{\text{ol}})$ 中必还有另一个三角形 (v_k,v_t,v_l) $(k<t<l)$. 由 P_{ol} 的凸性, 四边形 (v_1,v_k,v_t,v_l) 也是凸的.

经过对角置换 (a_k,v_l) 和 (v_1,v_t) 得 $T_1(P_{\text{ol}})$. 这时, 在 $T_1(P_{\text{ol}})$ 中, v_1 的次比在 $T(P_{\text{ol}})$ 中的次大 1.

由在 $T(P_{\text{ol}})$ 中 v_1 的次的有限性, 若 $T_1(P_{\text{ol}})$ 还不是标准的, 继续此过程, 直到得 P_{ol} 的一个标准砌合. ♮

由引理 15.2.1 可以进一步看出, 以 v_1 为基点的标准砌合可以从 $T(P_{\text{ol}})$ 经过 $s-1-\rho(T;v_1)$ 次对角置换而得到, 其中 $\rho(T;v_1)$ 为 $T(P_{\text{ol}})$ 中节点 v_1 的次, P_{ol} 为一个 s 边形.

因为对角置换的逆也是对角置换, P_{ol} 的任何一个砌合 $T(P_{\text{ol}})$ 均可由一个以 b 为基点的标准砌合 $T_{\text{st}}(P_{\text{ol}})$ 出发, 经过 $s-1-\rho\ (T;b)$ 次对角置换而得到, 其中 P_{ol} 同样为一个 s 边形.

引理 15.2.2 令 $T_1(P_{\text{ol}})$ 和 $T_2(P_{\text{ol}})$ 为一个 s 边形 P_{ol} 的两个砌合, 则 $T_1(P_{\text{ol}})$ 可以从 $T_2(P_{\text{ol}})$ 出发, 经过至多

$$2s-2-\max_{1\leqslant i\leqslant s}(\rho(T_1,v_i)+\rho(T_2;v_i))$$

次对角转换得到.

证 由引理 15.2.1, $T_1(P_{\text{ol}})$ 可以从一个标准砌合 $T_{\text{st}}(P_{\text{ol}})$, 经过 $s-1-\rho(T_1,v)$ 次对角转换而得到, 其中 v 为基点. 同样地, $T_2(P_{\text{ol}})$ 可以从这个标准砌合, 经 $s-1-\rho(T_2;v)$ 次对角置换而得到. 由于 v 的选择的任意性, 总可取 v 为使得 $\rho(T_1,v_i)+\rho(T_2;v_i)$ 达到最大的那个 v_i, 从而即得引理的结论. ♮

现在再引进两个引理, 以便能基于对角变换求得平面上一个凸多边形的最短砌合.

引理 15.2.3 对于凸多边形 $P_{\text{ol}}=(v_1,v_2,\cdots,v_s)(s\geqslant 4)$, 存在一个节点 $v_i(1\leqslant i\leqslant s)$, 使得长度 $l(v_{i-1},v_{i+1})$ 不大于 $l(v_i,v_{i-2})$ 和 $l(v_i,v_{i+2})$ 中的最小者.

证 设 $i\neq 1$. 不失一般性, 由对称性可以假设 $l(v_1,v_3)<l(v_s,v_2)$. 如果 $l(v_2,v_4)\geqslant l(v_1,v_3)$, 则 $i=2$, 否则有 $l(v_2,v_4)<l(v_1,v_3)$. 用 v_2 代替 v_1, 重复上述过程. 由 s 的有限性以及对 P_{ol} 的假设和凸性, 即可得到所要求的 v_i. ♮

一个节点, 若在凸多边形上具有引理 15.2.3 中所述的性质, 则称它为*可切的*.

引理 15.2.4　在一个凸多边形 $P_{\rm ol}=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$ 上, 一个节点 v_i 是可切的当且仅当

$$l(v_{i-1},v_{i+1})\leqslant l(v_i,v_j), \tag{15.2.1}$$

其中 $j=i-2,i-3,\cdots,i+2$ 依在 $P_{\rm ol}$ 上的循环序.

证　由于一个节点 v_i 的可切性仅是 (15.2.1) 式中 $j=i-2$ 和 $i+2$ 的情形. 充分性显然.

反之, 令 $P_{\rm ol}\langle v_i\rangle$ 为从 $P_{\rm ol}$ 中去掉节点 v_{i-1},v_i 和 v_{i+1}, 然后加直线段 (v_{i-2},v_{i+2}) 而得到的多边形, 由 $P_{\rm ol}$ 的凸性可知 $P_{\rm ol}\langle v_i\rangle$ 也为凸的.

这样, 除 v_{i-1},v_i 和 v_{i+1} 之外的所有节点均在由两个射线 (v_i,v_{i-2}) 和 (v_i,v_{i+2}) 与线 (v_{i-2},v_{i+2}) 的非 v_i 所在的侧围的区域之内. 这就意味着 (15.2.1) 式. 必要性得证. ♮

根据引理 15.2.3 和引理 15.2.4, 可以设计一个过程, 以求一个给定凸多边形的砌合. 为简便起见, 假设在凸多面形 $P_{\rm ol}=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$ 中, 任何两条直线段 $(v_{i-1},v_{i+1})(i=1,2,\cdots,s$ 依循环序) 和 (v_i,v_{i+2}) 均不等长. 自然, 这是不失一般性的, 并且称之为*非退化*.

Ta 过程　在 $P_{\rm ol}$ 上选择一个可切节点 v, 去掉 v, 并且将 v 在 $P_{\rm ol}$ 上的两个邻节点连一直线段得 $P_{\rm ol}[v]$. 若 $P_{\rm ol}[v]$ 本身已经是一个三角形, 则终止; 否则, 以 $P_{\rm ol}[v]$ 代 $P_{\rm ol}$, 继续上述过程.

由 $P_{\rm ol}$ 的凸性, 在上述过程中, 每次得到的 $P_{\rm ol}[v]$ 也为凸多边形. 这一过程结束, 由最后的三角形和所有去掉的边, 即导出 $P_{\rm ol}$ 的一个砌合. 一个砌合 $T(P_{\rm ol})$, 若在它上不能通过对角置换而得到更短的砌合, 则称之为*极小砌合*.

定理 15.2.1　用 Ta 过程从一个凸多边形 $P_{\rm ol}$ 所得的它的砌合是一个极小砌合.

证　由引理 15.2.1～ 引理 15.2.4 和 Ta 过程的定义, 即可导出定理的结论. ♮

而且, 用 Ta 过程的变种, 即如下的 Tb 过程同样可以得到极小砌合:

Tb 过程　取一个可切的节点 v_i, 使得 (v_{i-1},v_{i+1}) 在预先确定的序中为最小者, 并求得 $P_{\rm ol}[v_i]$. 若 $P_{\rm ol}[v_i]$ 是三角形, 则终止; 否则, 以 $P_{\rm ol}[v_i]$ 代 $P_{\rm ol}$, 重复上述过程.

事实上, Tb 过程是一类贪婪形的算法. 这时, 不必约定非退化.

如果 $P_{\rm ol}$ 是平面上的一个正多边形, 可以看出, 用如上过程所得的砌合为最短的. 但在一般情形, 即使讨论几何上的距离也不一定成立. 最简单的例子就是凸五边形 $P_5=ABCDE$, 使得 $l(AC)=l(AD)=5$, $l(CE)=l(BD)=5$, $l(BE)=4$. P_5 的最短砌合为 (A,C) 和 (A,B) 连同 P_5 的边界. 然而, 用上述过程所得的 P_5 的砌合的长度比最短长度大 1.

下面提供一种求一个多边形的在组合上为最短的砌合的方法. 也就是说, 所有的长度均用非负的权所代替.

令 $\mathrm{Tri}(P_{\mathrm{ol}})$ 为给定的多边形之上所有可能的三角形的集合. 引进一个图, 用 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 表示, 其节点集即 $\mathrm{Tri}(P_{\mathrm{ol}})$. 两个节点相邻当且仅当它们所代表的三角形有一条公共边.

一个节点, 若它所代表的三角形有两条边在 P_{ol} 的边界上, 则称之为终端. 用 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 的所有终端组成的集合, 称为其节点集的终端子集, 或称为 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 的终端集.

对于一个 s 边形 P_{ol}, 在 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 中的一个有 $s-3$ 条边的树. 若此树上所有节点的次均不超过 3 且它的所有显节点皆终端, 则称之为可行的. 令 $\mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})$ 为 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 中所有可行的树组成的集合.

引理 15.2.5 令 $\mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})$ 为 P_{ol} 的所有砌合的集合, $\mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})$ 为 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 中所有可行树的集合, 则总有

$$|\mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})| = |\mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})|. \tag{15.2.2}$$

证 首先, 由可行树的定义容易看出, 对任何 $T_i \in \mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})$, 有唯一的可行树 $T_r \in \mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})$, 其上的边与 T_i 中三角形面的公共边相应.

反之, 从 $T_r \in \mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})$, 由它的每一边相应 P_{ol} 内部的一条直线段, 所有这些直线段与 P_{ol} 即可唯一地构成 P_{ol} 的一个砌合 $T_i \in \mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})$.

从而, 在 $\mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})$ 与 $\mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})$ 之间存在一个 $1-1$ 对应, 即得引理的结论. ♮

根据 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 的定义, 可以局限于相应 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 的节点的三角形全在 P_{ol} 的内部区域, 以适应于 P_{ol} 本身非凸的情形. 在这种一般的情形, 引理 15.2.5 仍保持成立.

定理 15.2.2 对于多边形 P_{ol} (不一定是凸的), 在 $\mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})$ 中求最短砌合的最小化问题与在 $\mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})$ 中求一个最短可行树的问题等价, 即

$$\min_{T_i \in \mathrm{Til}(P_{\mathrm{ol}})} W(T_i) = \min_{T_r \in \mathrm{Ftr}(P_{\mathrm{ol}})} W(T_r), \tag{15.2.3}$$

其中 $W(T_i)$ 和 $W(T_r)$ 分别表示在 T_i 和 T_r 中所有边的权之和.

证 这是引理 15.2.5 的一个直接结果. ♮

虽然, 在一个图中求具有给定度的最小树 (最短树), 从算法复杂性的角度绝非容易. 不过, 在这里的情形, 通过观察 $G(P_{\mathrm{ol}})$ 的特殊性质, 确能设计一个求最短可行树的有效算法. 由于要占用过多的篇幅, 在这里不允许详细讨论.

至此已经看到, 求一个图的直线嵌入的最短砌合问题, 不管是几何上还是组合上, 均为多项式可解的, 即有有效的算法, 因为只要逐面求最短砌合就可以了. 又面的数目是图的阶的线性函数. 从求一个面最短砌合的有效性, 即可达到本节开始提出的目标.

15.3　极少折数嵌入

这一节所关心的问题是所谓**折数最小化**, 即求一个图 G 的纵横嵌入 $\gamma(G)$, 使得所有边上折数的总和为最小. 根据 9.1 节中所讨论的, 这里只考察图 G 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的纵横扩张的折数最小化. 自然, 一般来说, $\mu(G)$ 的最小折数扩张本身是 G 的一个极小折数嵌入. 所谓 $\mu(G)$ 的**最小折数扩张**是它的这样一个纵横扩张 $\gamma_0(G)$, 使得其上边的折数的总和为最小.

引理 15.3.1　不存在任何平面嵌入 $\mu(G)$ 的最小扩张, 使得其中有一边含有之形结构 (图 9.3.5(a)).

证　若引理不成立, 设 $\gamma_0(G)$ 为 G 的某平面嵌入 $\mu(G)$ 的最小折数扩张, 并且有一边 e 含一个之形结构, 则用 9.2 节中的处理办法, 总可得一个纵横扩张 $\gamma_1(G)$, 使得除 e 的折数少 2 外, 其他边上的折数与在 $\gamma_0(G)$ 中相同. 这就与 $\gamma_0(G)$ 为最小折数扩张矛盾. ♮

由引理 15.3.1 可知, 在最少折数扩张中, 如果有边带两个或更多的折, 则只能含工形结构, 如图 9.3.5(b) 所示.

对于一条边上的一个工形结构, 其上两个折均与两个角关联: 一个为 $\frac{\pi}{2}$, 另一个为 $\frac{3\pi}{2}$. 由于两个与同一工形关联的 $\frac{\pi}{2}$ 角必落在同一个与此边关联的面中. 同样地, 两个 $\frac{3\pi}{2}$ 的角落在另一个面中. 这就允许定义一个工形的方向为由 $\frac{\pi}{2}$ 角所在的面指向 $\frac{3\pi}{2}$ 角所在的面.

容易看出, 若一边 e 没有之形结构且含有两个或以上的工形, 则这些工形的方向均必为相同的. 这样就可以对于一个不含之形结构的纵横嵌入 $\gamma(G)$ 引进一个关联的图, 称之为**广均衡图**, 并用 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\gamma)$ 表示.

令 V, E 和 F 分别为 $\gamma(G)$ 的节点集、边集和面集, 则 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\gamma)$ 的节点集 $\tilde{V}$ 和边集 $\tilde{E}$ 依如下方式确定:

$$\begin{cases} \tilde{V} = V_+ + F, \\ \tilde{E} = \tilde{E}(V_+, F) + \tilde{E}(F), \end{cases} \tag{15.3.1}$$

其中

$$\begin{cases} V_+ = \{v \mid \mathrm{def}\,(v) > 0,\ v \in V\}, \\ \tilde{E}(V_+, F) = \{\prec v, f \succ \mid v \in V_+ \bigcap V(f), f \in F\}, \\ \tilde{E}(F) = \{(g, f) \mid E(f) \bigcap E(g) \neq \varnothing, f, g \in F\}. \end{cases} \tag{15.3.2}$$

在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\gamma)$ 上, 进而选择子集 S 和 $T \subseteq \tilde{V}$,

$$\begin{cases} S = V_+ + F_-, \\ T = F_+, \end{cases} \tag{15.3.3}$$

其中

$$\begin{cases} F_- = \{f |\ \mathrm{res}\ (f) < 0,\ f \in F\}, \\ F_+ = \{f |\ \mathrm{res}\ (f) > 0,\ f \in F\}, \end{cases} \tag{15.3.4}$$

并在 S 和 T 上赋以权

$$\begin{cases} \forall s \in S, a(s) = \begin{cases} \mathrm{def}\ (s), & s \in V_+, \\ -\mathrm{res}\ (f), & s \in F_-, \end{cases} \\ \forall t \in T, d(t) = \mathrm{res}_0(f). \end{cases} \tag{15.3.5}$$

引理 15.3.2 在广均衡图 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\gamma)$ 上, 对于 (15.3.3) 式所确定的 S 和 T, 以及 (15.3.5) 式所赋之权 $a(s)(s \in S)$ 和 $d(t)(t \in T)$, 总有

$$\sum_{s \in S} a(s) = \sum_{t \in T} d(t). \tag{15.3.6}$$

证 这是引理 9.3.2 的一个直接结果. ▮

看上去, 广均衡图和 10.3 节中的均衡图一样, 但在广均衡图 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\gamma)$ 上, 在 $\tilde{E}(V+,F)$ 中的所有边均为有向的, 而且有些节点与嵌入 γ 中的面有关. 令 $b(e)$ 为边 $e \in E$ 上折的数目, $b(A)$ 为 $A(A \subseteq E)$ 中所有边在嵌入 γ 中折数的总和, 则可以赋 $\widetilde{\mathrm{Qui}}$ 的边 $e \in \tilde{E}$ 的权为

$$\lambda(e) = \begin{cases} \theta(A_e), & e = \prec v, f \succ \in \tilde{E}(V_+, F), \\ b(e_{f,g}), & e = (f,g) \in \tilde{E}(f), \end{cases} \tag{15.3.7}$$

其中 θ 为由 (10.3.6) 式所定义的角上的分配, $A_e(e = \prec v, f \succ)$ 为 f 中在 v 处的角. $e = (f,g) \in E(f) \cap E(g)$ 即在 γ 中面 f 和 g 的公共边界上.

由 9.3 节中所讨论的容易看出如下的关系式:

$$\sum_{e \in \tilde{E}(v)} \lambda(e) = a(v), \quad v \in S, \tag{15.3.8}$$

其中 $\tilde{E}(v)$ 为 $\widetilde{\mathrm{Qui}}$ 中与 v 关联的边的集合,

$$\sum_{e \in \tilde{E}(v)} \lambda(e) = d(v), \quad v \in T, \tag{15.3.9}$$

其中 $\lambda(e)>0$, $e=(f,g)\in\tilde{E}$ 被确定为在 f 和 g 的公共边界边上每一折处的方向为从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$, $-\lambda(e)$ 为在相反方向上的权. 进而, 还可论证

$$\sum_{e\in\tilde{E}(v)}\lambda(e)=0,\quad v\in\tilde{V}\setminus(S+T)=F_0, \tag{15.3.10}$$

其中 $F_0=\{f|\ \mathrm{res}\ (f)=0,\ f\in F\}$. 事实上, (15.3.10) 式即可由多边形的内角和的关系得到.

与 10.3 节中所描述的类似, 也知道对于任何 $e\in\tilde{E}$, $\lambda(e)=0,1$ 或 2 且满足 (15.3.8) 式, (15.3.9) 式, 总可求得一个纵横嵌入没有之形结构, 并且使得 $\lambda(e)$ 即为对此嵌入由 (15.3.7) 式所确定者.

因为对于一个节点次不大于 4 的图的任一平面嵌入, 总可以构造它的广均衡图 $\widetilde{\mathrm{Qui}}$. 若引进未知量 $x_e(e\in\tilde{E})$, 则如下的方程:

$$\sum_{e\in\tilde{E}(v)}x_e=\begin{cases}a(v), & v\in S,\\ d(v), & v\in T,\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{15.3.11}$$

必有一组非负解, 并且由引理 15.3.2 知满足条件

$$\forall e\in\tilde{E}(V_+,F),\quad x_e=0,1\ \text{或}\ 2. \tag{15.3.12}$$

引理 15.3.3　一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的最少折数扩张可由其广均衡图 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上的方程 (15.3.11) 满足条件 (15.3.12) 式, 使得

$$\sum_{e\in\tilde{E}(F)}x_e=\min! \tag{15.3.13}$$

的非负解构造出来.

证　由上面所讨论的可知, 对于 $\mu(G)$ 的任何无之形结构的纵横扩张, 方程 (15.3.11) 有一组非负解满足条件 (15.3.12) 式. 由此可以构造出这个扩张. 必要性得证.

反之, 对于 $\mu(G)$ 的方程 (15.3.11) 的任何一组满足 (15.3.12) 式的非负解, 也可以构造出一个无之形结构的纵横扩张. 这就是说, 由引理 15.3.1, 从方程 (15.3.11) 满足 (15.3.12) 式的非负解可以得到最少折数的纵横扩张, 而且由 (15.3.7) 式可以看出, (15.3.13) 式所示的最小值就是 $\mu(G)$ 的最少折数扩张中的总折数, 从而充分性得证. □

虽然, 方程 (15.3.11) 在约束 (15.3.12) 式之下的相容性已经知道, 而且其每个非负解均可根据无之形结构的纵横扩张而得到. 由 8.1 节中所讨论的, 对于任一图

G 的平面嵌入 $\mu(G)$, 以 (15.3.7) 式确定 $\tilde{E}$ 上的 $\lambda(e)$ 的方式总可得到一个无之形结构的纵横扩张. 然而, 这里提供一种直接的方法, 求在限制 (15.3.12) 式之下, 方程 (15.3.11) 的非负解.

首先, 在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上选一个支撑树 T, 使得 $v \in V_+$, $a(v) = 1$ 的节点为显节点. 容易证明这样的支撑树对于连通的图总存在. 然后, 限制在树 T 上求解方程. 事实上, 从 V_+ 中的显节点开始, 即可导致全树上方程的解. 由于 T 相应 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 中循环空间上的一组基, 据引理 15.3.2, 在 T 上方程的解就是在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上方程的解.

对于由上述过程所得的 $\tilde{E}$ 上的方程 (15.3.11) 在 (15.3.12) 式约束之下的一组非负解 $x_e = \tau_e (e \in \tilde{E})$, 定义 $\tau_e(e = (u, v))$ 的**正方向**为从 u 到 v (或从 v 到 u) 根据 τ_e 是从在 u (或 v) 处的方程求出的. 当然, 若 $\tau_{(u,v)}$ 的正方向为从 u 到 v, 则 $\tau_e = \tau_{\prec u,v \succ} > 0$. 同时, $\tau_{(v,u)} = -\tau_{\prec u,v \succ} < 0$. 根据 (15.3.13) 式可以在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 的边集 $\tilde{E}$ 上定义**特征函数** ch 如下: $\forall e \in \tilde{E}$,

$$\mathrm{ch}(e) = \begin{cases} 1, & e \in \tilde{E}(F), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{15.3.14}$$

对于 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上的一个圈 C, 令 $\tilde{E}_+(C, \tau)$ 和 $\tilde{E}_-(C, \tau)$ 分别为 C 上变量的值的方向为沿顺时针方向和逆时针方向的边的子集. 自然有 $\tilde{E}_+(C, \tau) \cap \tilde{E}_-(C, \tau) = \varnothing$, 其理由是 C 中的每一边, 其相应变量的值至多有一个方向. 如果

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{e \in \tilde{E}_+(C;\tau) \\ \tau_l > 0}} \mathrm{ch}(e) \left(\text{或} \displaystyle\sum_{\substack{e \in \tilde{E}_-(C;\tau) \\ \tau_l > 0}} \mathrm{ch}(e) \right) > \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{e \in \tilde{E}(C)} \mathrm{ch}(e), \\ \{e \in \tilde{E}(C) - \tilde{E}_+(C;\tau) (\text{或 } \tilde{E}_-(C;\tau)) | \tau_e = 0\} \bigcap \tilde{E}(V_+; R) = \varnothing, \end{cases} \tag{15.3.15}$$

则称 C 是**可调的**.

引理 15.3.4 对于一个平面嵌入 $\mu(G)$, 在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上的方程 (15.3.11) 在约束 (15.3.12) 式之下的非负解是最优的, 或者说, 达到了 (15.3.13) 式所示的最小当且仅当在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上, 对于这组解无可调圈.

证 用反证法证必要性. 假若对于 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上的一个最优解 $x_e = \tau_e (e \in \tilde{E})$ 有一个圈 C 是可调的, 则可以求出方程 (15.3.11) 的另一个满足 (15.3.2) 式的非负解 $x_e = \hat{\tau}_e (e \in \tilde{E})$, 如下:

$$\hat{\tau}_e = \begin{cases} \tau_e - \delta, & e \in \tilde{E}_+(C, \tau), \\ \tau_e + \delta, & e \in \tilde{E}(C) \setminus \tilde{E}_+(C, \tau), \\ \tau_e, & e \notin \tilde{E}(C), \end{cases} \tag{15.3.16}$$

其中

$$0 < \delta \leqslant \min\{\tau_e |\ e \in \tilde{E}_+(C,\tau)\}. \tag{15.3.17}$$

不管怎样, 对于这组解有

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\tilde{E}(F)} \hat{\tau}_e &= \sum_{e\in\tilde{E}} \mathrm{ch}(e)\hat{\tau}_e \\ &= \sum_{e\in\tilde{E}} \mathrm{ch}(e)\tau_e - \delta\Big(2\sum_{e\in\tilde{E}_+(C,\tau)} \mathrm{ch}(e) - \sum_{e\in\tilde{E}(C)} \mathrm{ch}(e)\Big) \\ &< \sum_{e\in\tilde{E}} \mathrm{ch}(e)\tau_e = \sum_{e\in\tilde{E}(F)} \tau_e.\end{aligned}$$

这就与 $\tau_e(e\in\tilde{E})$, 的最优性矛盾.

用线性规划的原则 (Dantzig, G. B. [1]) 证明充分性. 因为这里所讨论的问题与线性规划问题等价, 而且圈的不可调整恰相应线性规划中的最优准则, 从而充分性得证. ♮

事实上, 可以如上所述, 在任意选定的 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 的一个支撑树 $\tilde{T}$ 上, 求方程 (15.3.11) 式, (15.3.12) 式的非负解. 可以证明这一个解就是相应的线性规划的一个基础可行解, 而且用 (15.3.16) 式的方法调整得到的解 $\hat{\tau}_e(e\in\tilde{E})$ 也是这个线性规划问题的一个基础可行解. 这是因为可以只在对于 $\tilde{T}$ 的基本圈上进行调整. 由于线性规划的最优解总是可以在基础可行解上达到, 即可得如下的引理:

引理 15.3.5　对于 ν 阶图 G 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上方程 (15.3.11), (15.3.12) 式的非负最优解总可从 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上的一个树, 用上述过程得的一个非负解至多通过 $O(\nu)$ 次在可调圈上的调整而求得.

证　因为如 4.2 节中所讨论的, 任何一个圈在循环空间中总可表示对于某支撑树的基本圈之和, 并且在两个圈 C_1 和 C_2 的公共边的子集中, 任何一条边 e 对于一组解 $x_e=\tau_e(e\in\tilde{E})$, 若 $e\in\tilde{E}_+(C_1,\tau)$, 则 $e\in\tilde{E}_-(C_2,\tau)$, 或反之. 按照通常的推算, 即可知在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上有一个可调圈当且仅当它有一个基本圈是可调的. 当然, 这里不依赖那个支撑树的选择, 从而为得到最优解, 需要调整可调圈的数目至多为基本圈数. 由 G 的平面性和 (15.3.1) 式可知基本圈数为 $O(\nu)$, 即得引理的结论. ♮

令 $C^*=(e_1,e_2,\cdots,e_l)$ 为一个无之形结构的纵横嵌入 $\gamma(G)$ 上的一个上圈, $C=(f_1,f_2,\cdots,f_l)$ 为在 $\gamma(G)$ 的对偶中与 C^* 相应的圈. 当然, $f_1,f_2,\cdots,f_l$ 可视为 $\gamma(G)$ 的面, 并且有关系

$$e_i\in E(f_i)\bigcap E(f_{i+1}),\quad i=1,2,\cdots,l, f_{l+1}=f_1. \tag{15.3.18}$$

如果一条边 $e_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 有一个端点处在 f_i 中的角不是 $\dfrac{\pi}{2}$, 则称之为从的; 否则,

称为**主的**. 如果一条边 $e_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ 不一定是主的, 有一折处在 f_i 中的角为 $\frac{3\pi}{2}$, 则称它对于 C^* 为**主向的**. 一个上圈, 若它的主向边的数目大于其主边与主向从边数目之半, 则称它为**超载上圈**. 容易验证, 任何最少折数嵌入均不会有超载上圈.

定理 15.3.1 一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的无之形结构的纵横扩张 $\gamma(G)$, 若无超载上圈, 则它不是最少折数扩张当且仅当在 $\gamma(G)$ 中存在一个上圈 C^*, 使得其中对于折, 同向的边的数目大于 C^* 的边数的一半.

证 事实上, 这是将引理 15.3.4, 从对于 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 换为对于 $\gamma(G)$ 的说法. ♮

从相应引理 15.3.5 的结果, 可以设计一个求平面嵌入 $\mu(G)$ 的最少折数扩张的更为有效算法. 其要旨是在 $\mu(G)$ 的一个无之形结构的纵横扩张上对于上圈, 而不是在 $\widetilde{\mathrm{Qui}}(\mu)$ 上对圈, 作调整.

15.4 极小面积嵌入

一个图 $G=(V,E)$ 的纵横嵌入 $\gamma(G)$ 所占的**面积**, 在这里定义为在平面上覆盖 $\gamma(G)$ 的矩形面积的最小值. 这就建议我们, 求 $\gamma(G)$ 的水平和竖直直径以确定 $\gamma(G)$ 的面积.

对于一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 令 $V(H_{\mathrm{or}})$ 为 $\gamma(G)$ 中所有极大水平线段的集合, $E(H_{\mathrm{or}})$ 为 $V(H_{\mathrm{or}})$ 中的元素, 对 (u,v), 使得在 $\gamma(G)$ 上存在一个面, 其边界与代表 u 和 v 的每条水平线段都有一公共点. 由此, 可以引进一个图, 记为

$$\mathrm{Hor}(\gamma)=(V(H_{\mathrm{or}}),E(H_{\mathrm{or}})), \tag{15.4.1}$$

并称之为 $\gamma(G)$ 的**横图**.

引理 15.4.1 若将 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 中边的方向定义为从它的端点所表示的水平线段, 由低水平到高水平 (即 y 坐标由小到大), 则有向图 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 为一个无有向圈的图.

证 用反证法. 设 $(v_1,v_2,\cdots,v_s)$ 是 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 上的一个有向圈, 则 v_i 的 y 坐标 $y(v_i)(i=1,\cdots,s)$ 必满足

$$y(v_1)<y(v_2)<\cdots<y(v_s)<y(v_1),$$

这就与 y 坐标的传递性矛盾. ♮

如果引进一个新的节点 s, 使得它的坐标小于 $V(H_{\mathrm{or}})$ 中所有节点的 y 坐标, 并将 s 与 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 的每一个源连一条边. 同时, 引进一个新节点 t, 使得它的 y 坐标大于 $V(H_{\mathrm{or}})$ 中所有节点的 y 坐标, 并将 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 的所有的汇均与 t 连有边. 这样所得的图, 记为 $\widetilde{\mathrm{Hor}}(\gamma)$. 可见, 它确定一个格, 并且任何一条在 $\widetilde{\mathrm{Hor}}(\gamma)$ 上的最长的连 s 和 t 的路, 在 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 上也是一条最长路. 因为在 $\widetilde{\mathrm{Hor}}(\gamma)$ 上求最长路有有效的算法,

从而求 $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 的最长路也有有效算法. $\mathrm{Hor}(\gamma)$ 的最长路的长度被称为 $\gamma(G)$ 的纵直径, 用 $d_{\mathrm{ver}}(\gamma G)$ 表示.

类似地, 对于一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 还可以构造一个关联和图, 用

$$\mathrm{Ver}(\gamma) = \big(V(V_{\mathrm{er}}), E(V_{\mathrm{er}})\big) \tag{15.4.2}$$

表示, 其中 $V(V_{\mathrm{er}})$ 为 $\gamma(G)$ 中所有极大竖直线段组成的集合, $E(V_{\mathrm{er}})$ 为 $V(V_{\mathrm{er}})$ 中这样的节点对的集合, 使得其两个端点所代表的竖直线段同与 $\gamma(G)$ 中的某个面的边界具有公共点. 这时, 称 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 为 $\gamma(G)$ 的纵图.

同样, 边 $(u,v) \in E(V_{\mathrm{er}})$ 可以定义其方向为 u, v 所代表的竖直线段, 从较小 x 坐标到较大的 x 坐标, 从而 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 也为一个有向图.

引理 15.4.2 一个纵横嵌入 $\gamma(G)$ 的纵图 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 是一个无有向圈的有向图.

证 在引理 15.4.1 的证明中, 只要将那里的 y 坐标用这里的 x 坐标代替, 即得引理的结论. ♮

因为 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 也是一个无有向圈的图, 和横图一样, 也可以引进一个新的源 s 和一个新的汇 t, 而得到图 $\widetilde{\mathrm{Ver}}(\gamma)$. 当然, $\widetilde{\mathrm{Ver}}(\gamma)$ 也表示一个格, 且 $\widetilde{\mathrm{Ver}}(\gamma)$ 上的任何一条最长路在 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 上的部分, 也是 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 上的最长路, 在 $\mathrm{Ver}(\gamma)$ 上最长路的长度被称为 $\gamma(G)$ 的横直径, 并用 $d_{\mathrm{hor}}(\gamma G)$ 表示.

至此, 已经知道 $\gamma(G)$ 的面积为

$$\mathrm{Ar}(\gamma G) = d_{\mathrm{hor}}(\gamma G) d_{\mathrm{ver}}(\gamma G). \tag{15.4.3}$$

下面讨论如何从一个纵横嵌入 $\gamma(G)$ 出发, 经过在 $\gamma(G)$ 中的上圈上作调整以求得 $\gamma(G)$ 的一个极小面积嵌入.

因为从 15.3 节中知道求一个平面嵌入的最少折数扩张, 可以有效地通过算法实现. 求一个平面嵌入的极小面积扩张, 可以只限制在这个嵌入的所有的最少折数扩张中进行.

这里的关键步骤在于求一个上圈, 使得从它经过一类运算可导出一个新的扩张具有较小的面积.

令 $C^* = (e_1, e_2, \cdots, e_s)$ 为 $\gamma(G)$ 中的一个上圈, 记

$$C = (f_1, f_2, \cdots, f_s)$$

为 $\gamma(G)$ 的平面对偶中与 C^* 相应的圈. 当然, $f_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 相应 $\gamma(G)$ 的面且 f_i 和 f_{i+1} 的边界上的边的集合 $E(f_i)$ 和 $E(f_{i+1})$, 满足

$$e_i \in E(f_i) \bigcap E(f_{i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, s, f_{s+1} = f_1. \tag{15.4.4}$$

如果 C^* 上主向边的数目等于主边的数目与主向非主边的数目的和的一半, 如 15.3 节中所述, 或者沿 C^* 两个方向上折的数目的最大者为 C^* 中总边数的一半, 则称 C^* 为**折平衡的**.

图 15.4.1(a) 给出了一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 其中虚点线表示上圈 $C^* = (UW, RS, QL, NM, OM)$. 因为 UW, SR, QL, NM 全为从边, 仅 OM 是主的, UM 为主向的. 可以验证 C^* 就是折平衡的. 图 15.4.1(b) 给出了 $\gamma(G)$ 的横图 $\mathrm{Hor}(\gamma)$, 其中最长路的长度为 6, 从而 $\gamma(G)$ 的纵直径为 6.

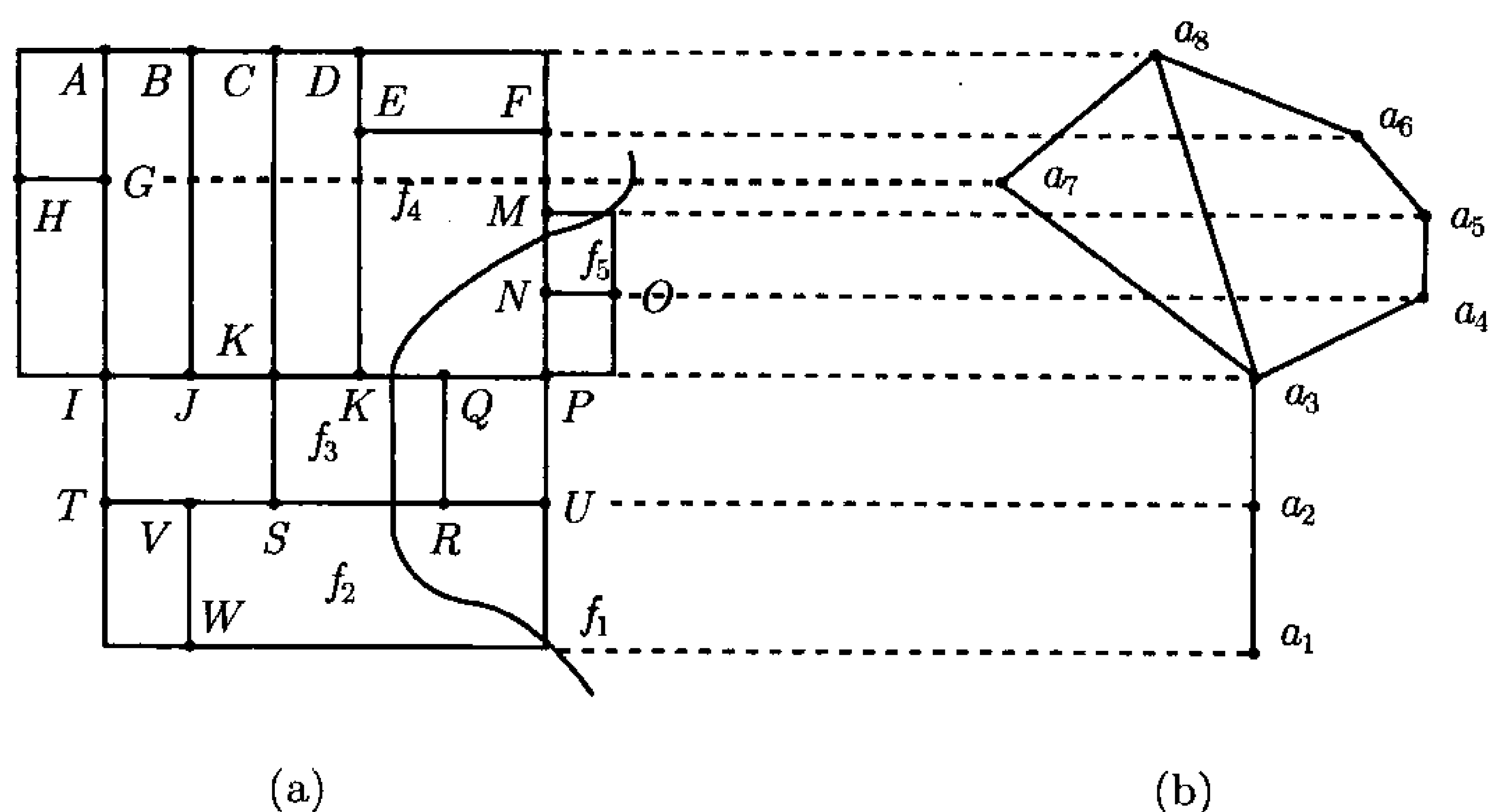


图 15.4.1

为了描述在一个纵横嵌入的一个上圈上的变换, 要观察纵横嵌入与平面直线嵌入所关联角系统的关系.

令 $\mu(G)$ 为一个平面嵌入, 其上有些边上有附加的 2 节点, 令 $\mathcal{A}(\mu G)$ 为与通常节点关联角的集合, $\mathcal{B}(\mu G)$ 为同附加节点 (2 节点) 关联角的集合, 则一个图 G 的任何一个直线嵌入 $\mu(G)$ 在某些边上带附加 2 节点均确定了一个角的系统 $\{\mathcal{A}(\mu G), \mathcal{B}(\mu G)\}$. 然而, 反之, 一般自不成立.

引理 15.4.3 一个图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 带有附加 2 节点在某些边上且不含显节点, 其角系统 $\{\mathcal{A}(\mu G), \mathcal{B}(\mu G)\}$ 确定一个纵横嵌入当且仅当它满足如下条件:

角性 1 $\{\mathcal{A}(\mu G), \mathcal{B}(\mu G)\}$ 的每个角只可能取值 $\frac{\pi}{2}\pi$ 或 $\frac{3\pi}{2}$.

角性 2 在每个节点 v(包括附加节点) 处有

$$\sum_{A\in\tilde{A}_v(\mu G)} A = 2\pi, \tag{15.4.5}$$

其中 $\tilde{A}_v(\mu G)$ 为 v 处所有 $\mathcal{A}(\mu G)$ 和 $\mathcal{B}(\mu G)$ 中角的集合.

角性 3　在每一个面 f 内有

$$\sum_{A \in \tilde{A}_f(\mu G)} A = \left(\rho^*(f) - 2\right)\pi, \tag{15.4.6}$$

其中 $\tilde{A}_f(\mu G)$ 为面 f 内 $\mathcal{A}(\mu G) \cup \mathcal{B}(\mu G)$ 中角的集合, $\rho^*(f)$ 为考虑附加节点在内的 f 的次.

证　通过验证, 一个图 G 的纵横嵌入是否满足角性 1~ 角性 3, 必要性是显而易见的.

充分性可由定理 10.3.1 导出. 其理由是只要把折视为附加的 2 节点, 一个图 G 的纵横嵌入就是图 G 加附加 2 节点之后的网格嵌入. ♮

对于一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 令 $\tilde{A}(\gamma G)$ 为 $\gamma(G)$ 上所有包括折处在内的角的集合, 即

$$\tilde{A}(\gamma G) = \mathcal{A}(\gamma G) + \mathcal{B}(\gamma G). \tag{15.4.7}$$

若 $C^* = (e_1, e_2, \cdots, e_s)$ 为 $\gamma(G)$ 的一上圈, $C = (f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 为在 $\gamma(G)$ 的平面对偶中与 C^* 相应的圈, 则若在 $\tilde{A}(\gamma G)$ 上作如下运算 $(i = 1, 2, \cdots, s)$:

运算 A　对于 e_i 是一个从边 (S) 但非主向边, 将这个与 e_i 关联的 f_i 内大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角 $A_{f_i}(e_i, S)$ 改变为 $A_{f_i}(e_i, S) - \dfrac{\pi}{2}$.

运算 B　若 e_i 为主向边, 则将 e_i 中相应的折去掉.

运算 C　若 e_i 为主的但非主向的, 则在 e_i 上引进一个折, 使得在 f_{i+1} 内为 $\dfrac{3\pi}{2}$ 角, 就称之为对 C^* 作*单侧旋*.

引理 15.4.4　若 $\tilde{A}'$ 为在纵横嵌入 $\gamma(G)$ 上对上圈 C^* 作单侧旋所得的角系统, 则 $\tilde{A}'$ 必为另一个纵横嵌入 $\gamma'(G)$ 的角系统, 而且 $\gamma'(G)$ 的总折数与 $\gamma(G)$ 的相同当且仅当 C^* 是折平衡的.

证　通过验证 $\tilde{A}'$ 满足引理 15.4.3 中的角性 1~ 角性 3 即得第一个说法. 由于若 C^* 不是折平衡的, 则从 15.3 节中所讨论的, $\gamma'(G)$ 不可能与 $\gamma(G)$ 有相同的折数, 即可得后一说法的必要性.

反之, 由 C^* 的折平衡性, 通过单侧旋的运算, 在 $\gamma'(G)$ 引进的折数与在 $\gamma(G)$ 上去掉的折数相同, 从而可得充分性. ♮

图 15.4.2(a) 给出了纵横嵌入 $\gamma'(G)$. 它是由对图 15.4.1(a) 中虚点线所示的上圈 C^*, 在 $\gamma(G)$ 上作单侧旋得到的. 图 15.4.2(b) 显示了 $\gamma'(G)$ 的横图 $\mathrm{Hor}(\gamma)$. 由于 C^* 是折平衡的, 在 $\gamma'(G)$ 上的总折数与在 $\gamma(G)$ 上的相同. 然而, 这时 $\gamma'(G)$ 的纵直径比 $\gamma(G)$ 的少 1.

若一条边 (u, v), 它的两个关联面为 f_1 和 f_2, 在纵横嵌入 $\gamma(G)$ 中有 $A_{u,f_1} \geqslant \pi$ 和 $A_{v,f_2} \geqslant \pi$, 或者反之, 则称 e 为*可转的*. 在 $\tilde{A}(\gamma g)$ 中的运算使得

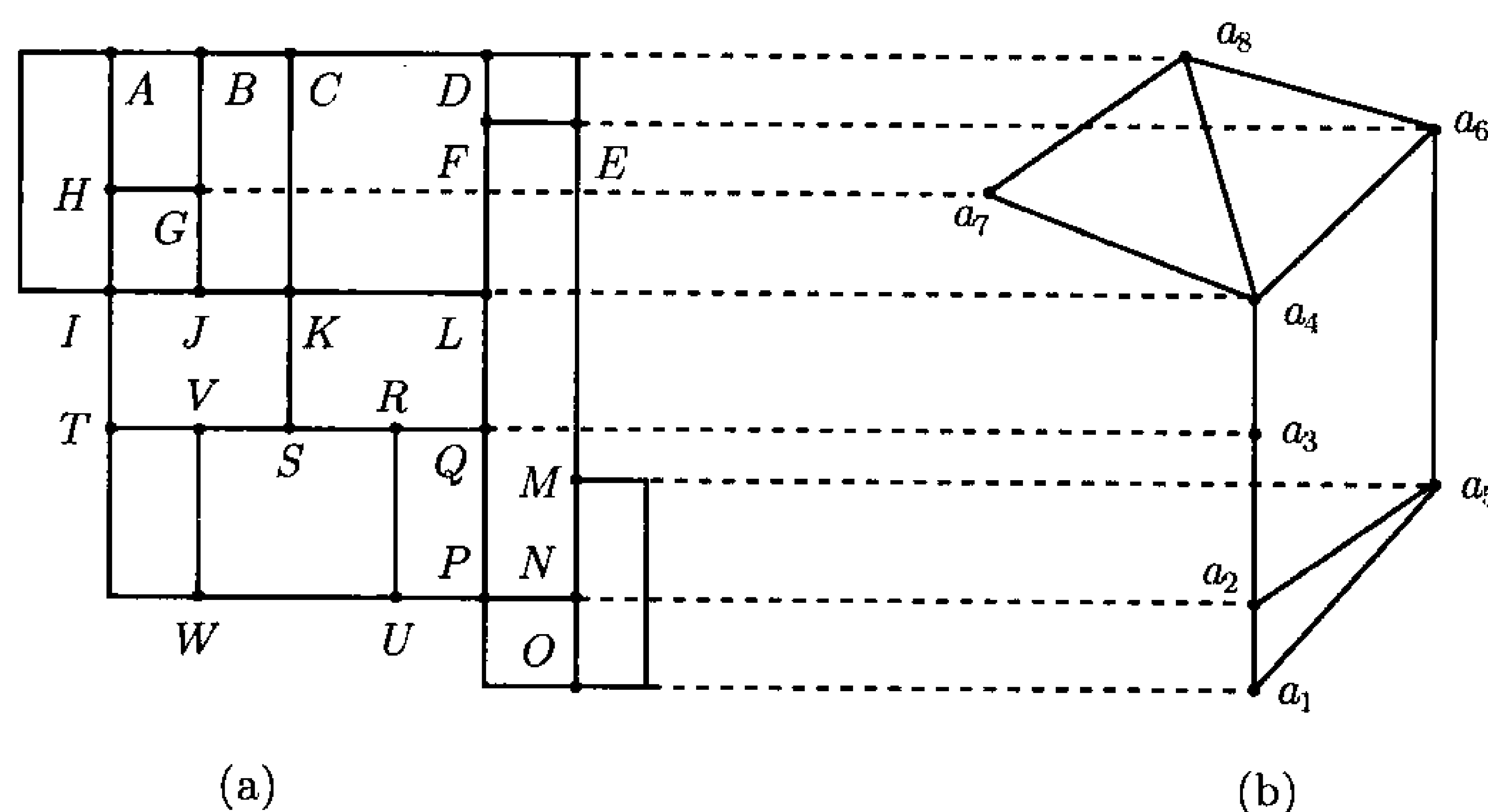


图 15.4.2

$$\begin{cases} A'_{v,f_2} = A_{v,f_2} - \dfrac{\pi}{2}, \\ A'_{u,f_2} = A_{u,f_2} + \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{15.4.8a}$$

$$\begin{cases} A'_{v,f_1} = A_{v,f_1} + \dfrac{\pi}{2}, \\ A'_{u,f_1} = A_{u,f_1} - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{15.4.8b}$$

和所有其他的角不变, 被称为对于可转边 $e=(u,v)$ 作*旋转*. 容易看出, 旋转运算将一个纵横嵌入变换为另一个纵横嵌入, 使总折数不变, 但可能改变它们的面积.

若一个上圈 C^*, 它在 $\gamma(G)$ 上是折平衡的, 使对它作单侧旋而得到的 $\gamma'(G)$ 比 $\gamma(G)$ 面积小, 则称 C^* 为*面积可调的*.

当然, 可以借助纵图与横图, 用 $\gamma(G)$ 的结构性质刻画一个上圈是面积可调的表征. 一个可转的边, 若对它作旋转运算之后所得的纵横嵌入的面积比原来的小, 也被称为*面积可调的*. 这就建议我们在一个纵横嵌入上, 通过对于可调的上圈和边作上面的二类运算, 以便在保持总折数不变之下, 求得一个纵横嵌入的极小面积扩张.

进而, 也可以通过推广对于折平衡上圈的可调性到非折平衡的情形, 以便求得允许增加约定限制的总折数之条件下的极小面积扩张, 甚至最小面积扩张.

15.5 注 记

(1) 在 15.1 节中所述的求一个图的最优凸嵌入的方法, 可以看成文献 (Tutte, W. T. [15]) 用于所有权皆取为 1 情形的推广. 然而, 在 Tutte 的文章中并未提及任何最优性的问题. 那时, 他的目的在于表明凸嵌入的存在性.

(2) 对于平面上的一些给定的点, 求以它们作为节点的最短三角剖分, 不管是在几何上, 即两节点之间的长度为欧氏距离, 还是在组合上, 即两节点间的长度为任何非负的权, 都是很难的. 直到现在, 即使在几何的情形, 一般来说, 比组合情形会容易些, 但也没有发现有效的算法. 当平面上的这些节点形成一个凸多边形时, 不管是几何上还是组合上, 均是多项式可解的. 事实上, Dantzig, Hoffman 和胡德强, 参见文献 (Dantzig, G. B. -A. J. Hoffman -T. C. Hu [1]), 对此用线性规划, 提供了一个有效算法. 然而, 在 15.2 节中, 不仅对此也提供了另一个有效算法, 而且还多项式地解决了更广一些的问题.

(3) 与 15.2 节中所讨论的问题类似地, 还可以对于曲面或高维空间提出相应的问题. 然而, 在文献中尚未见到进一步的结果.

(4) 关于折数的最小化或者从超大规模集成电路设计的角度, 通道最少化. 近年来, 许多文章讨论各种模型, 其中 Tamassia 将求最少折数扩张的问题转化为网络流的问题, 参见文献 (Tamassia, R. [1]). 然而, 在 15.3 节中所讨论的, 可以看成是我国于 20 世纪 50 年代在解运输问题时发现的图上作业法的一种发展, 参见文献 (Liu, Y. P. [30]). 相关的一些问题还可参见文献 (Basden, A. -K. G. Nichols [1], Becker, B. -G. Hotz [1], Chen, R. W. -Y. Kajitani -S. P. Chan [1], van Cleemput, W. M. [1], Krentel, M. W. [1], Larson, R. C. -V. O. Li [1], Liu, Y. P. [28], de Rezende, P. J. -D. T. Lee -Y. F. Wu [1]) 等.

(5) 虽然一种与 15.3 节中所用的类似的方法也可以来求一个平面嵌入的极小面积扩张, 但这时并不像那里有效, 其最小性和有效性尚待进一步研究. 当然, 求一个图的最小面积嵌入与最少折数嵌入一样, 至少在计算复杂性方面是更为困难的. 很多文章致力于估计最小面积嵌入所占的面积的上界, 如文献 (Bhatt, S. N. -F. T. Leighton [1], Liu, Y. P. [29]). 方法是用分离子定理, 参见文献 (Lipton, R. J. -R. E. Tarjan [1, 2]). 然而, 对于一些类型的图, 最少折数嵌入中总折数的最小上界, 则是用另外的方法得到的 (Liu, Y. P. -P. Marchioro-R. Petreschi[1], Liu, Y. P. -P. Marchioro-R. Petreschi [1, 2], Liu, Y. P. -A. Morgana-B. Simeone [1, 2]). 这种方法用于估计一些类型图的最小面积嵌入所占面积的上界, 甚至最小上界, 也可以想象是很有希望的. 在文献 (Liu, Y. P. [29]) 中曾提出过这种想法.

(6) 在有关网络优化方面, 自第一版以来的新结果, 可参见文献 (Fu, C. -Y. P. Liu [1, 2], Wan, L. X. -Y. P. Liu [4], Xue, C. L. -Y. P. Liu[1, 2], Yu, Z. W. -Y. P. Liu [1], He, D. -Y. P. Liu [1, 2], Lan, P. T. -Y. P. Liu [1], Zhao, L. M. -Y, P, Liu [1], Yu, Q. -Y. P. Liu-Y. Yang [1], Wang, L. D. -Y. P. Liu [1]) 等.

第16章　图和上图拟阵

16.1　二分拟阵

在文献中, 拟阵的等价定义屡见不鲜. 这里把**拟阵**视为在一个有限集 E 上的一个子集族 $\mathcal{Z}$, 使得满足如下的两条公理:

公理 1　在 $\mathcal{Z}$ 中, 任何一个成员均非另一个成员的一个真子集.

公理 2　令 a 和 b 为 E 中两个不同的元素. 记 X 和 Y 为 $\mathcal{Z}$ 的两个成员, 使得 $a \in X \cap Y$, $b \in X \backslash Y$, 则存在 $Z \in \mathcal{Z}$, 使得 $b \in Z \subseteq (X \cup Y) - a$, 其中 E 被称为**基础集**, 其元素称为**胞腔**, E 的基数称为**阶**. $\mathcal{Z}$ 中的成员称为**圈**, $\mathcal{Z}$ 的基数称为**度**.

一个拟阵, 常用 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 表示. 当无须特别指出基础集时, 简记为 M. 两个拟阵 $M_1 = (\mathcal{Z}_1, E_1)$ 和 $M_2 = (\mathcal{Z}_2, E_2)$, 如果存在一个双射 τ: $E_1 \to E_2$, 使得 $\forall C_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_s\} \in \mathcal{Z}_1$,

$$\tau(C_1) = \{\tau(e_1), \tau(e_2), \cdots, \tau(e_s)\} \in \mathcal{Z}_2, \tag{16.1.1}$$

则称 M_1 与 M_2 是**同构的**, 并用 $M_1 \cong M_2$ 表示. 虽然, 只有一个元素的子集允许作为一个圈, 这时称之为**环**. 在这里, 不讨论带有环的拟阵. 因为环对于本章是无关紧要的.

令 $\mathcal{E}$ 为由集合 $\{e|\forall e \in E\}$ 在域 F 上生成的空间, 用 $\langle e|\forall e \in E\rangle$ 表示. 对于每个向量 $f \in \mathcal{E}$, 令 $E(f)$ 为 E 中相应 f 的非 0 分量元素的子集. 有时, 如不引起混淆, 可用 f 本身代表 $E(f)$, 称 $E(f)$ 为 f 的**支柱**. 一个**整向量**指在整数环上的向量群 $\mathcal{N}$ 中的向量. 自然, 一个整向量的所有分量皆为整数. 一个整向量, 如果它的支柱对于 $\mathcal{N}$ 是极小的, 即在 $\mathcal{N}$ 中不存在整向量 $g \neq f$, 使得 $E(g)$ 为 $E(f)$ 的真子集, 则称之为**初等的**.

若 $\mathcal{E}$ 是二分的, 即在 $F = \mathrm{GF}(2)$ 上, 自然, 这时 $\mathcal{E}$ 是一个空间, 则容易验证, 子集族 $\mathcal{Z}(\mathcal{N}, 2)$, 即 $\mathcal{N}$ 中所有初等向量的集合, 形成一个拟阵, 用 $M(\mathcal{N}; 2)$ 表示. 任何一个拟阵, 若它与对于某个群 $\mathcal{N}$ 的 $M(\mathcal{N}; 2)$ 同构且 $\mathcal{N}$ 为二分空间 $\mathcal{E}$ 的一个子空间, 则也称之为**二分的**. 一般地, 取 F 为有理域或实域. 若一个初等向量对于整数环上的一个向量群 $\mathcal{N}$, 其所有的非 0 分量只取 $+1$ 或 -1, 则称它为**本原的**. 也容易论证, 由 $\mathcal{N}$ 中的所有本原向量组成的集合, 或者说, E 的子集族, 同样形成一个拟阵, 用 $M(\mathcal{N})$ 表示. 如果一个拟阵与对于某正则群 $\mathcal{N}$, 即对于每一个初等向量, 均存在一个本原向量与它有相同支柱的拟阵 $M(\mathcal{N})$ 同构, 则也称之为**正则的**. 因

为对每一个本原向量, 存在一个初等向量与之有相同的支柱, 即可看出, 凡正则拟阵均为二分的.

引理 16.1.1　若 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 为一个二分拟阵, 则 $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{Z}$,

$$\exists C_3 \in \mathcal{Z}, \quad C_3 \subseteq C_1 \oplus C_2, \tag{16.1.2}$$

其中

$$C_1 \oplus C_2 = (C_1 \bigcup C_2) \backslash (C_1 \bigcap C_2)$$

被称为 C_1 与 C_2 之间的对称差.

证　因为 M 是二分的, 则在二分空间 $\mathcal{E}$ 中存在一个子群 $\mathcal{N}$, 使得 M 与 $M(\mathcal{N}; 2)$ 同构. 因为向量

$$f = f(C_1) + f(C_2) \in \mathcal{N}$$

和

$$E(f) = C_1 \oplus C_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{N}; 2) = \mathcal{Z},$$

在 $\mathcal{N}$ 中有一个初等向量 f_0, 使得 $E(f_0) \subseteq E(f)$, 从而 $C_3 = E(f_0)$ 即满足 (16.1.2) 式. ♮

若 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 是一个二分拟阵且它与 $M(\mathcal{N})$ 同构, 其中, $\mathcal{N}$ 为二分空间 $\mathcal{E}$ 中的一个 Abel 群, 也即子空间, 则对于 $\mathcal{E}$ 中 $\mathcal{N}$ 的正交子空间 $\mathcal{N}^{\perp}$, 那些与 $M(\mathcal{N}^{\perp})$ 同构的拟阵被称为 M 的**对偶拟阵**, 并用 $M^* = (\mathcal{Z}^*, E)$ 表示. $\mathcal{Z}^*$ 中的成员被称为**上圈**. 当然, $\mathcal{Z}^*$ 也是二分的.

引理 16.1.2　若 M 是一个二分拟阵, M^* 为它的对偶, 则 $\forall C \in \mathcal{Z}$, $C^* \in \mathcal{Z}^*$,

$$|C \bigcap C^*| = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \tag{16.1.3}$$

证　由 $\mathcal{Z}$ 与 $\mathcal{Z}^*$ 的正交性直接可得引理的结论. ♮

对于拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 若 E 的一个子集不含圈, 则称之为**独立的**; 否则, 称为**相关的**. 因为空集绝不含圈, 故它是一个独立集, 而且容易论证, 一个独立集的任何一个子集也是独立的.

引理 16.1.3　对于二分拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 令 C_1 和 C_2 为两个不同的圈, $A = C_1 \oplus C_2$, 则 $\exists C_1, C_2, \cdots, C_s \in \mathcal{Z} \ni$

$$A = \sum_{i=1}^{s} C_i, \tag{16.1.4}$$

其中求和表示集合的不交的并.

证　设 M 与 $M(\mathcal{N})$ 同构且 $\mathcal{N}$ 为二分空间中的一个子空间. 这时, $\mathcal{N}$ 的每一个非 0 向量均相应 E 的一个相关子集. 由引理 16.1.1, A 含一个圈 C_1. 因为向量

$f(A_1)(A_1 = A \oplus C_1)$ 也在 $\mathcal{N}$ 中, 故 A_1 也是 E 的一个相关子集. 令 C_2 为 A_1 中的一个圈. 然后, 若 $A_1 \oplus C_2$ 非空, 则再取 $A_2 = A_1 \oplus C_2$ 代替 A_1 继续用此法. 由 E 的有限性, 总能得到 (16.1.4) 式. ♮

因为对于两个独立子集 X 和 Y, 若 $|X| = |Y| + 1$, 则存在 $x \in X \backslash Y$, 使得 $Y \cup x$ 也为独立子集, 可以论证, 所有**极大独立子集**, 即它不是任何一个独立子集的真子集, 均有相同的基数, 并称这个数为此拟阵的**秩**. 一个极大独立子集也被称为一个**基础**, 用 $B(M)$, 或简单地, 用 B 表示. 还可看出, 对于 $e \notin B$, 在 $B \cup e$ 中恰有一个圈, 与图的情形类似地, 也称之为 M 对于 B 与 e 形成的**基本圈**, 并用 $C(B, e)$ 表示.

引理 16.1.4 对于二分拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 令 B 是 M 的一个基础, 则对于一个圈 C, $C \backslash B = \{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ 有

$$C = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant s} C(B; e_i). \tag{16.1.5}$$

证 由第 3 章中所讨论的, 若 M 与 $M(\mathcal{N}; 2)$ 同构, 则一个基础的所有基本圈形成由群 $\mathcal{N}$ 所产生的子空间的一组基. 因为任何一个圈均为 $\mathcal{N}$ 中的一个向量, 它用基中向量的线性组合的表示就给出了 (16.1.5) 式. ♮

令 M 为一个拟阵, 不必是二分的. 对于 E 的一个子集 S, 令

$$\mathcal{L} = \{A | \forall A \in \mathcal{Z},\ A \subseteq S\} = \mathcal{Z} \bigcap S.$$

容易验证, $L = (\mathcal{L}, S)$ 为一个拟阵, 并称之为 M 到 S 上的**约化**, 用 $L = M \cdot S$ 表示. 对于一个 $T \subseteq E$, 令

$$\mathcal{P} = \{A | \forall C \in \mathcal{Z},\ A = C \bigcap T \neq \varnothing\}.$$

也容易验证, $P = (\mathcal{P}, E)$ 同样是一个拟阵, 并称它的 M 到 T 的**收缩**, 记为 $P = M \times T$. 任何一个拟阵, 若它有形式 $(M \cdot S) \times T$, 则称之为 M 的一个**次形**. 可以看出, 任何一个拟阵 M 的次形的次形仍为 M 的次形.

引理 16.1.5 二分拟阵的次形也是二分的.

证 由于在二元空间中的一个群上作相应的约化和收缩运算所得的仍为这个二元空间中的群, 由二分拟阵的定义, 即可得引理的结论. ♮

并非任何拟阵均为二分的. 一个简单的非二分拟阵的例子就是 U(4,3), 即它的基础集由 4 个元素 a, b, c 和 d 组成, 它的所有由三个元素组成的子集作为圈. 由于它的两个圈 $\{a, b, c\}$ 和 $\{a, b, d\}$ 的对称差 $\{c, d\}$ 不含任何圈, 从引理 16.1.1 可知 $U(4.3)$ 不是二分的. 可以验证, 它是阶和度为最小的非二分拟阵.

引理 16.1.6 对于任何二分拟阵 M,

$$\nexists S, T \subset E, \quad (M \cdot S) \times T \cong U(4.3). \tag{16.1.6}$$

证　这是引理 16.1.5 的一个直接结果. ♮

进而, 所有这些概念, 如独立性、上圈、基础、对偶性等, 如上所述, 均可从二分拟阵延伸到对于一般的拟阵. 对于拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 不必是二分的, E 的一个子集被称为*独立的*, 如果它不含有 $\mathcal{Z}$ 中的圈. M 的*基础*就是 E 中的极大独立子集. 因为所有极大独立子集均有相同的基数, 则称这个数为 M 的*秩*. 若 E 的一个子集与 M 的任何一个基础均有非空的交, 而且无真子集也具有这一性质, 则称之为对于 M 的*上圈*. 同样, 可以证明由 M 的所有上圈构成的 E 上的一个子集族 $\mathcal{Z}^*$ 也形成 E 上的一个拟阵, 它就是 M 的*对偶拟阵*, 记为 $M^* = (\mathcal{Z}^*, E)$. 容易看出, $M^{**} = M$. M 的任何一个基础在 E 中的补为 M^* 的一个基础, 也称之为 M 的*上基础*, 记为 $\bar{B}(M)$, 或简单地记为 $\bar{B}$, 上基础的基数被称为 M 的*上秩*. 因为一个上基础中的一个元素与相应的基础恰含有圈, 也称这个圈为*基本的*. 类似地, 每一个基础中的元素与相应的上基础恰含 M 的一个上圈, 并称之为*基本上圈*.

引理 16.1.7　对于一个拟阵 M, 不必是二分的, 条件 (16.1.2)~(16.1.6) 是互相等价的. ♮

由于篇幅所限, 这个引理的完全证明, 建议读者参见文献 (Tutte, W. T. [9, 10, 18], Welsh, D. J. A. [1], Whitney, H. [1]).

定理 16.1.1　一个拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 是二分的当且仅当条件 (16.1.2)~(16.1.6) 式中之一满足.

证　由引理 16.1.1~ 引理 16.1.4, 引理 16.1.6 和引理 16.1.7, 只要证明条件 (16.1.2)~(16.1.6) 式之一对于 M 为二分的是充分的就够了. 这里, 仅取条件 (16.1.5) 式. 若将 E 的一个子集 S 用 GF(2) 上的向量 $f(S)$ 表示, 使得 f 的一个分量为 1 当且仅当相应的元素在 S 中, 则集合间的对称差就是相应向量间的加法 (mod 2) 运算. 因为条件 (16.1.5) 式提供了 M 中的圈作为基本圈的线性组合的表示. 这样, 若将 M 的基本圈所相应的向量为基, 扩张成为子空间 $\mathcal{N}$, 自然, 它是二分空间 $\mathcal{E}$ 中的一个 Abel 群. 由拟阵的公理 2, 所有初等向量为 $\mathcal{Z}$ 中的圈, 从而 $M = (\mathcal{Z}, E) \cong M(\mathcal{N}; 2)$. 换言之, M 是二分的. ♮

引理 16.1.8　一个拟阵 M 是二分的当且仅当它的对偶 M^* 是二分的.

证　事实上, M 和 M^* 分别由 $\mathcal{E}$ 中的两个互为正交的子空间 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^{\perp}$ 所产生的, 从而引理成立. ♮

由引理 16.1.8 和定理 16.1.1, 即可得如下的定理:

定理 16.1.2　一个拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 是二分的当且仅当下面的条件之一满足:

(1) 对于 M 的任何两个上圈 C_1^* 和 C_2^*, 存在一个上圈 C_3^*, 使得 $C_3^* \subseteq C_1^* \oplus C_2^*$;

(2) 对于任何两个上圈 C_1^* 和 C_2^*, 它们的对称差可以表示为 M 中上圈的不交的并;

(3) 对于一个上基础 $\bar{B} = \{e_1, e_2, \cdots e_s\}$, 任何上圈均可表示为基本上圈的对称差;

(4) M 的对偶拟阵 M^* 没有次形与 $U(4,3)$ 同构.

事实上, 可以看到 $\{a,b,c,d\}$ 中的任何两个元素成的子集均为 $U(4,3) = (\{abc, abd, acd, bcd\}, \{a,b,c,d\})$ 的一个基础, 而且也是一个上基础. 这就是说, $U(4,3) = U^*(4,3)$. 一个拟阵, 若它的对偶拟阵与它本身同构, 则称之为**自对偶的**. 这样, $U(4,3)$ 就是一个自对偶的拟阵.

16.2 正 则 性

一个拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 称为在域 F 上是**可表示的**, 如果存在一个双射 $\tau : E \to \mathcal{V}$, 使得保持线性独立性, 其中 $\mathcal{V}$ 是 F 上的向量子空间. 对于拟阵 M, 若存在一个域, 使得 M 在此域上是可表示的, 则称 M 为**可表示的**.

引理 16.2.1 令 $\mathcal{N}$ 为 E 上, 对于整数环的一个正则群, 则对于任何整向量 $f \neq 0, f \in \mathcal{N}$, 存在与 f 有相同支柱的本原向量 $f_1, f_2, \cdots, f_s$, 使得

$$f = \sum_{i=1}^{s} f_i. \tag{16.2.1}$$

证 令

$$\mathrm{sum}(a) = \sum_{e \in E} |u(e)|,$$

其中 $u \in \mathcal{N}$ 为一个向量. 假设引理非真, 则可以取 f 为那些不满足引理使 sum 达到最小的向量.

设 g 为与 f 有相同支柱的本原向量, 记 $h = f - g$. 当然, 若 $h = 0$, 则 $f = g$. 这说明 f 满足引理, 故 $h \neq 0$. 由正则性有

$$\mathrm{sum}\ (h) < \ \mathrm{sum}\ (f)$$

和 $E(h) = E(f)$, 从而 h 为本原向量之和, 并且这些本原向量与 f 有相同的支柱. 这又导致 f 满足引理, 与 f 的选择矛盾, 从而引理得证.

对于一个整数 $p \geqslant 2$, 若一个整向量 f, 它的每个分量的绝对值均小于 p, 则它被称为对 p 是**标准的**.

引理 16.2.2 令 $\mathcal{N}$ 是 E 上的正则群, 则对于每个 $q \geqslant 2$ 和每个整向量 $g \in \mathcal{N}$, 存在一个整向量 f, 使得 $f = g (\mathrm{mod}\ q)$.

证 对于一个整向量 j, 令 $n_q(g)$ 为元素 $e \in E(g)$ 且 $|j(e)| \geqslant q$ 的数目, 可以取一个整向量 f, 使得

$$n_q(f) = \min\{n_q(g) |\ j = g\ (\mathrm{mod}\ q)\}.$$

若 $n_q(f) > 0$, 设 $|f(a)| \geqslant q (a \in E)$. 由引理 16.2.1, 令本原向量 h, $E(h) = E(f)$ 和 $h(a) \neq 0$. 记

$$f_1 = f - gh.$$

由 $|f_1(a)| < |f(a)|$ 和 $f(a) < q \Rightarrow f_1(a) < q$ 有

$$n_q(f_1) \leqslant n_q(f),$$

并且其中的等号成立当且仅当 $f_1(a) \geqslant q$. 如果这样, 可以用 f_1 代替 f, 再行此过程. 由 $f(a)$ 的有限性, 总可找到 f', 使得

$$n_q(f') < n_q(f).$$

与 f 的选择矛盾, 从而引理成立. ♮

引理 16.2.3　令 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 为一个正则拟阵, 则对任一素数 p, 存在 E 上的一个对于 GF (p) 的正则群 $\mathcal{N}$, 使得 $M = M(\mathcal{N})$, 其中 GF (p) 是特征数为 p 的域.

证　因为 M 是正则的, 则在 E 上, 存在一个对于有理域的正则群 $\mathcal{N}'$, 使得 $M = M(\mathcal{N}')$. 对每个 $f' \in \mathcal{N}'$, 令 f 为依如下方式定义的对于 GF (p) 的向量:

$$f(a) = f'(a) \pmod p, \quad \forall a \in E. \tag{16.2.2}$$

可以看出, 对于所有 $f' \in \mathcal{N}'$ 的满足 (16.2.2) 式的标准向量 f 的集合 $\mathcal{N}$ 形成 E 上对于 GF (p) 的一个群. 下面证明 $M'(\mathcal{N}') = M(\mathcal{N})$.

令 $C' \in \mathcal{Z}$. 由 $M = M(\mathcal{N}')$, 存在一个本原向量 $h' \in \mathcal{N}'$, 使得

$$E(h') = C'.$$

现在考察与 h' 相应的标准向量 h. 自然, $E(h) = C^*$. 这就是说, C' 在 $M(\mathcal{N})$ 中是相关的. 因此, 在 $M(\mathcal{N})$ 中存在一个圈 C, 使得 $C \subseteq C'$.

另一方面, 令 C 是 $M(\mathcal{N})$ 中的一个圈, 则有一个向量 $f \in \mathcal{N}$, 使得

$$E(f) = C.$$

然而, 这就是说存在 $f' \in \mathcal{N}'$, 使得 $C \subseteq E(f')$. 若 $a \in E(f') \backslash C$, 则 $f'(a) = 0 (\bmod\ p)$. 但这时, 由引理 16.2.2, 存在一个标准向量 h', 使得

$$E(h') = E(f) = C.$$

换句话说, C 在 $M(\mathcal{N}')$ 中是相关的, 从而在 $M(\mathcal{N}')$ 中, 存在一个圈 C', 使得 $C' \subseteq C$.

综上两个方面, 即知 $M(\mathcal{N}) = M(\mathcal{N}')$. 这就得到了引理的结论. ♮

引理 16.2.4 若一个拟阵 M 是正则的, 则 M 对任何域均为可表示的.

证 由正则拟阵的定义, 自然, 它对于有理数域是可表示的. 因此, 对于特征数为 0 的域是可表示的. 进而, 由引理 16.2.3 知 M 对于 GF (p) 是可表示的, 从而对于特征数为 p 的域, 它均为可表示的. 根据域对于特征数之分类, 即可得引理的结论. ▯

令 $D(M)$ 为拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$ 的关联矩阵. 它的行对应 $\mathcal{Z}$ 中的圈, 列为 E 中的元素, 并称之为 M 的**圈矩阵**. 对偶地可知**上圈矩阵**, 用 $D^*(M)$ 表示. 也就是说, M 的上圈矩阵, 即它的对偶拟阵 $M^*=(\mathcal{Z}^*,E)$ 的圈矩阵, 从而有

$$D^*(M)=D(M^*). \tag{16.2.3}$$

对于二分拟阵 M, 若能够将负号分配到矩阵 $D=D(M)$ 和 $D^*=D^*(M)$ 的元素上, 使得对整数环,

$$DD^{*^{\mathrm{T}}}=0, \tag{16.2.4}$$

则称 M 为**可定向的**.

引理 16.2.5 若拟阵 M 是正则的, 则它必为可定向的.

证 因为 E 上的拟阵 M 是正则的, 则必存在一个整向量的群 $\mathcal{N}$, 使得 $M=M(\mathcal{N})$. 对于 M 的一个圈 C, 有一个本原向量 $f\in\mathcal{N}$, 使得 $E(f)=C$. 在 M 的圈矩阵 D 中, 相应 C 的行根据 f 的分量为 $+1$ 或 -1 分配此行中相应的元为 $+$ 或 $-$. 用类似的规则, 给上圈矩阵 D^* 的元素分配符号, 即给对偶拟阵 $M^*=M(\mathcal{N})^*$ 的圈矩阵的元素, 用同样规则给以符号. 由于向量群 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^*=\mathcal{N}^{\perp}$ 的正交性可知 D 和 D^* 的如上的符号分配, 使得满足 (16.2.4) 式, 从而即得引理的结论. ▯

对于一个二分拟阵 M, 令 B 为它上的一个基础. 这时, M 的对于基本圈和 E 中元素的关联阵, 被称为它的**基本矩阵**. 类似地可知 M 的**上基本矩阵**, 就是它们对偶拟阵 M^* 的基本矩阵. 当然, 这时的基本圈是对于 M^* 上的基础 $\bar{B}=E-B$ 来说的. 一个有理域上的矩阵, 如果它的所有子方阵的行列式只取 0, 1 或 -1, 则称之为**全单模的**.

引理 16.2.6 若拟阵 M 为正则的, 则对于任何一个基础, 其基本矩阵是全单模的.

证 由正则性和引理 16.2.1, 允许只讨论正则空间中, 由本原向量组成的基的相应基本矩阵的正则性.

为方便起见, 令 $J(S,T)$, $S\subseteq\bar{B}$, $T\subseteq B$, $|S|=|T|$ 为对于基础 B 的基本矩阵 $J(B)$ 的子矩阵, 使得它的行为相应 S 中元素与 B 形成的基本圈, 列为与 T 的元素相应的. 若 $\det J(S,T)\neq 0$, 则可以看出矩阵 $J(B)$ 可以通过置换行、将一行乘以 -1 加到另一行上以及将一行乘以 -1 这三种运算被变换为矩阵 $J(B')$, 其中

$B' = (B \setminus T) \cup S$. 这就是说, 存在一个非异矩阵 A, 其中元素为 0, 1 或 -1, 使得

$$\det A \times \det J(S,T) = 1.$$

因为 $\det A$ 和 $\det J(S,T)$ 均为整数, 只能 $\det J(S,T) = 1$ 或 -1. 由 B 以及 S 和 T 选择的任意性, 即得引理的结论. ♮

一个二分拟阵 M, 若它的一个基本矩阵是全单模的, 则称 M 也为全单模的. 由引理 16.2.6 的证明所示, 只要有一个基本矩阵是全单模的, 则必导致所有的基本矩阵皆全单模的.

一个二分的 (但非正则的) 拟阵的最简单的例子, 就是所谓 Fano 拟阵, 即其基础集由 7 个元素组成, 记为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_7\}$. 圈的集合为

$$\{X_{126}, X_{135}, X_{247}, X_{234}, X_{257}, X_{367}, X_{456}\},$$

其中 $X_{ijk} = \{e_t | 1 \leqslant t \leqslant 7, t \neq i, j \text{ 和 } k\}$, $1 \leqslant i < j < k \leqslant 7$.

上述 Fano 拟阵的非正则性, 可以按如下方式证明: 因为容易验证 $\{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ 为它的一个基础. 这时, 它的三个基本圈为 X_{234}, X_{135} 和 X_{126}, 其基本矩阵为

$$J(\{e_4, e_5, e_6, e_7\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & 0 & x_{34} \end{pmatrix},$$

其中 $x_{ij} = \pm 1$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 4$. 假若此矩阵是全单模的. 由于下面 4 个子阵的行列式

$$\begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{21}, & x_{24} \\ x_{31}, & x_{34} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{12} & x_{14} \\ x_{32} & x_{34} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

必须为偶数. 从全单模性, 又使得如下的方程, 对于所有未知量, 非 1 则 -1, 有解:

$$\begin{cases} x_{13}x_{24} = x_{14}x_{23}, \ x_{21}x_{34} = x_{24}x_{31}, \\ x_{12}x_{34} = x_{14}x_{32}, \ x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{23}x_{12} = 0, \\ x_{13}x_{24}x_{14}x_{23} = x_{21}x_{34}x_{24}x_{31} = x_{12}x_{34}x_{14}x_{32} = 1, \\ x_{21}x_{32}x_{13}x_{31}x_{23}x_{12} = -1. \end{cases}$$

然而, 这些方程将导致

$$\begin{aligned}-1 &= (x_{21}x_{32}x_{13}x_{31}x_{23}x_{12})x_{14}^2x_{24}^2x_{34}^2\\ &= (x_{13}x_{24}x_{14}x_{23})(x_{21}x_{34}x_{24}x_{31})(x_{12}x_{34}x_{14}x_{32})\\ &= 1.\end{aligned}$$

因此, Fano 拟阵不可能是全单模的. 由引理 16.2.6 可知 Fano 拟阵是非正则的.

引理 16.2.7 若一个拟阵 M 是正则的, 则 Fano 拟阵和它的对偶均非 M 的次形.

证 因为可以论证一个正则拟阵的任何次形也是正则的, 而且用与引理 16.1.5 和引理 16.1.8 的证明类似的方法可得一个拟阵是正则的, 当且仅当它的对偶是正则的. 由此, 根据正则拟阵的定义以及上面对于 Fano 拟阵的讨论, 即得引理的结论. ♮

对于一个二分拟阵 M, 若在它的关于 GF(2) 的基本矩阵中, 没有一个子矩阵可以通过行间或列间的置换而得到

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

或它的转置 X^{T}, 则称 M 为 *X* 脱化的.

引理 16.2.8 若二分拟阵 M 是正则的, 则它的基本矩阵在GF(2) 上是 X 脱化的.

证 由于容易看出, Fano 拟阵和它的对偶均非 X 脱化的. 根据 Fano 拟阵和它的对偶的非正则性, 由引理 16.3.7, 即可导出引理的结论. ♮

引理 16.2.9 对于一个二分拟阵 M, 下面的说法是相互等价的:

(1) M 在任何域上均为可表示的;

(2) M 是可定向的;

(3) M 是全单模的;

(4) M 没有次形与 Fano 拟阵或其对偶拟阵同构;

(5) M 是 X 脱化的. ♮

其证明留给读者, 或参见文献 (Tutte, W. T. [10, 18], Welsh, D. J. A. [1]).

定理 16.2.1 一个二分拟阵 M 是正则的当且仅当引理 16.2.9(1)~(5) 中之一成立.

证 由引理 16.2.4~ 引理 16.2.8, 必要性显然. 对于充分性, 由引理 16.2.9, 只要对引理 16.2.9(1) 证明 M 的正则性即可. 然而, 由正则性的定义, 这也是显而易见的. ♮

当然, 如果将引理 16.2.9(1)~(5) 中的所有 M 均用它的对偶 M^* 代替, 定理 16.2.1 即变为它的对偶形式.

16.3 图性与上图性

对于一个图 $G=(V,E)$, 令 $\mathcal{R}(G)$ 为 E 在有理域上生成的空间, 或记为 $\mathcal{R}=\langle e|\forall e\in E\rangle$. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^\perp$ 均为 $\mathcal{R}$ 中分别如 3.1 节所述的循环和上循环这些整向量所形成的子空间. 进而, 令 $Z(G)=M(\mathcal{C})$, $Z^\perp(G)=M(\mathcal{C}^\perp)$, 分别称为 G 的**圈拟阵**和**上圈拟阵**. 当然, 易见 $Z(G)$ 和 $Z^\perp(G)$ 的子集族的成员分别为图 G 的圈和上圈.

引理 16.3.1 拟阵 $Z(G)$ 和 $Z^\perp(G)$ 皆为二分的.

证 因为若将 $\mathcal{R}(G)$ 取为 GF(2) 上的空间, 则 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^\perp$ 分别为 3.1 节中所述的循环空间和上循环空间, 从而由 16.1 节中二分拟阵的定义, 即得引理的结论. ♮

引理 16.3.2 对于一个图 $G=(V,E)$, 令 $Z^*(G)$ 为拟阵 $Z(G)$ 的对偶拟阵, 则 $Z^*(G)=Z^\perp(G)$.

证 由一个图的循环空间与上循环空间的正交性, 以及 16.1 节中关于一个二分拟阵的对偶的定义, 即可导出引理的结论. ♮

引理 16.3.3 $Z(G)$ 和 $Z^\perp(G)$ 皆为正则的.

证 由引理 16.3.2 和一个拟阵是正则的当且仅当它的对偶是正则的. 只证明 $Z(G)$ 的正则性即可. 因为由引理 16.3.1 知 $Z(G)$ 是二分的, $Z(G)$ 子集族中的成员全可表示为 GF(2) 上的向量. 可以赋予每边一个方向, 并且对于 $C\in Z(G)$ 定义向量 $f=f(C)$ 如下: $\forall e\in E$,

$$f(e)=\begin{cases}1, & e\in C \text{ 且 } e \text{ 在 } C \text{ 上为顺时针方向},\\ -1, & e\in C \text{ 且 } e \text{ 在 } C \text{ 上为逆时针方向},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

因为任何上圈 $C^*\in Z^\perp(G)$ 均有形式

$$C^*=(X,Y)=\{(x,y)|\forall x\in X,\forall y\in Y,\ (x,y)\in E\},$$

其中 $Y=V-X$, $X\subseteq V$. 对于 $C^*\in Z^\perp(G)$, 定义向量 $f^*=f(C^*)$ 如下: $\forall e\in E$,

$$f^*(e)=\begin{cases}1, & e=(u,v)\in C^* \text{ 和 } u\in X, v\in Y,\\ -1, & e=(u,v)\in C^* \text{ 和 } u\in Y, v\in X,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

根据 C 与 C^* 的正交性有

$$\sum_{e\in E} f(e)f^*(e) = 0,$$

从而 $Z(G)$ 是可定向的. 由定理 16.2.1, 即得引理的结论. ♮

一个拟阵 M, 若存在一个图 $G=(V,E)$, 使得 $M\cong Z(G)$ 或 $Z^{\perp}(G)$, 则分别称 M 为**图的**或**上图的**. 对于一个拟阵 M, 若存在 $\mathrm{cor}(M)+1$ 个圈 (一般地, 循环), 使得 E 的每一个元素在这些圈中恰出现两次, 则称 M 为**超上秩 2 重可覆盖的**, 其中 $\mathrm{cor}(M)$ 自然表示 M 的上秩. 对偶地, 若存在 $r(M)+1$ 个上圈 (一般地, 上循环), 使得 E 中每个元素在这些上圈中恰出现两次, 则称 M 为**超秩 2 重可覆盖的**, 其中 $r(M)$ 为 M 的秩. 当然, 由对偶性, M 是超秩 2 重可覆盖的当且仅当 M^* 是超上秩 2 重可覆盖的.

引理 16.3.4 若 M 是一个图拟阵, 则 M^* 为超上秩 2 重可覆盖的.

证 因为 M 是图的, 有一个图 $G=(V,E)$, 使得 $M\cong Z(G)$, 其中 $Z(G)$ 为 G 的圈拟阵. 令 $C^*(v)$ 为由与 $v\in V$ 关联的所有边形成的那个上圈 (一般地, 上循环). 因为每一条边均与两个节点关联 (不考虑环的存在), 每条边恰出现在这些上圈 $C^*(v)(v\in V)$ 的两个之中, 从而 M^* 是超上秩 2 重可覆盖的. 即得引理的结论. ♮

对于一个二分拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$, 令 $\mathrm{Cycl}(M)$ 为由 $\mathcal{Z}$ 中的所有成员作为 E 的子集对 GF(2) 生成的那个 E 上的向量空间, 并且称 $\mathrm{Cycl}(M)$ 为 M 的**循环空间**.

在 E 上的一个子集族且每个子集均相应 $\mathrm{Cycl}(M)$ 中的一个向量, 如果 E 的每个元素均恰出现在此子集族的两个子集之中, 则称此子集族, 或相应地, $\mathrm{Cycl}(M)$ 的这些向量为 M 的一个**二重覆盖**. 对于 M 的一个二重覆盖 $\mathcal{D}$, 令 $\mathrm{Boun}(M;\mathcal{D})$ 为由 $\mathcal{D}$ 中所有子集所相应的向量生成的空间, 并称之为 M 的对于 $\mathcal{D}$ 的**边缘空间**.

由二分性, 任何二分拟阵均有二重覆盖. 事实上, 为考虑到一般性, 这里所说的子集允许重复的元素出现. 那个由 E 中所有元素组成且每个元素恰出现两次的子集本身就是 M 的一个二重覆盖. 此时, 这个子集相应零向量.

因为容易验证, 对任何二重覆盖 $\mathcal{D}$, Boun $(M;\mathcal{D})$ 总是 $\mathrm{Cycl}(M)$ 的一个子空间, 从而可以定义商空间

$$\mathcal{H}(M) = \mathrm{Cycl}(M)/\ \mathrm{Boun}\ (M;\mathcal{D}) \tag{16.3.1}$$

为 M 的一个**同调空间**.

引理 16.3.5 若 M 是一个图拟阵, 则 M^* 有一个同调空间 $\mathcal{H}(M^*)=0$.

证 设 M 与图 $G=(V,E)$ 的圈拟阵 $Z(G)$ 同构. 令 E_v 为 G 中所有与 $v\in V$ 关联的边的集合. 因为对任何 $e=(u,v)\in E$ 有 $E_u\cap E_v=e$, E 的子集族 $\mathcal{D}=\{E_v|\forall v\in V\}$ 为 M^* 的一个二重覆盖. 同样, M^* 为 M 的对偶. 由于对每个

$u \in V$,

$$\mathcal{D}\langle u\rangle = \mathcal{D} - E_u = \{E_v | \forall v \in V,\ v \neq u\}$$

为 Boun $(M^*;\mathcal{D})$ 上的一组基, 即 $|\mathcal{D}\langle u\rangle| = r(M^*)$, 从而 Cycl$(M^*)$ =Boun$(M^*;\mathcal{D})$, 即得引理的结论. ♮

由引理 16.3.5 可以看出, 上圈拟阵 $M^*(K_{3,3})$ 和 $M^*(K_5)$ 均不是图的, 其中 K_5 和 $K_{3,3}$ 分别为 5 阶完全图和 6 阶等部完全二部图. 其理由是可以证明无论 $M(K_{3,3})$ 还是 $M(K_5)$, 均没有一个同调空间是平凡的. 事实上, 这就是定理 4.2.5 的一个直接结果.

引理 16.3.6 图拟阵的次形也是图的.

证 令 M 是一个图拟阵. 设 M 同构于图 $G = (V, E)$ 的圈拟阵 $Z(G)$. 由于对任何 $S \subseteq E$, M 到 S 上的约化就是从 G 中去掉不属 S 的边所得图的圈拟阵. 对任何 $T \subseteq E$, M 到 T 的收缩为在 G 中将不在 T 中的边收缩之后所得图的圈拟阵, 从而由次形的定义, 即得引理的结论. ♮

引理 16.3.7 任何一个图拟阵均没有一个次形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵同构.

证 由上面所述, 已经知道, K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵均为非图的. 由引理 16.3.6, 即得引理的结论. ♮

对于一个拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 如果 M 有一个基础 $B = \{e_1, \cdots, e_s\}$, 使得可以在 B 上定义一个序关系, 也用 $\preceq$ 表示, 并且满足如下条件:

可序性 1 在 B 中只有一个元素为最小的, 即 B 中的任何其他元素均比它大.

可序性 2 在每一个基本圈上, 所有 B 中的元素形成一个线性序,

则称 M 为*确向可序的*.

对于一个确向可序的拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 可以引进 GF (2) 上的变量 $y_e (e \in \bar{B} = E - B)$ 与基本圈 $C(B; e)$ 相对应. 若两个元素 $a, b \in \bar{B}$, 使得 $C(B; a)$ 和 $C(B; b)$ 同时出现在下面三个构形之一中, 则称 a 和 b 是*相邻的*.

令 $h(e)$ 和 $t(e) (e \in \bar{B})$ 分别为 $B \cap C(B; e)$ 上的最小元和最大元 (由确向可序性的可序性 2, 它们总是存在的). 对于 $a, b \in \bar{B}$, $C(B; a) \cap C(B; b) \neq \varnothing$, 而且 $h(a) \neq h(b)$, 可以假设 $h(a) \prec h(b)$, 而不失一般性.

构形 1 $\exists c \in \bar{B}$,

(1) $h(c) \prec h(a) \prec h(b)$;

(2) $\langle t(a), \Lambda\rangle \prec \Lambda = \langle t(c), t(b)\rangle$.

构形 2 $\exists c, d \in \bar{B}$,

(1) $\max(h(c), h(d)) \prec h(a) = h(b)$;

(2) $\langle t(c), t(a)\rangle = \Lambda_1 \succ \langle \Lambda_1, \Lambda_2\rangle \prec \Lambda_2 = \langle t(d), t(b)\rangle$.

构形 3 $\exists c \in \bar{B}$,

(1) $h(c) \prec h(a) \prec h(b)$;

(2) $\langle t(c), \Lambda\rangle \prec \Lambda = \langle t(a), t(b)\rangle$.

在上面的叙述中, $\langle x, y\rangle = x \wedge y$, 即 g.l.b.$(x, y)$.

由 6.4 节中所讨论的, 可以看出, 这里的构形 1~ 构形 3 分别与那里的类型 A, 类型 B 和类型 C 相应. 只要注意到这里的 a, b 和 c 分别相应那里 α, β 和 γ 即变成了相同的形式.

当然, 这里的序与那里在节点集上的不同, 而是相当在边的子集上, 即一个基础上. 这里的序被称为*确向序*. 当然, 有效地判定一个拟阵的确向可序性, 和找到一个拟阵上的确向序, 不会出现多大的困难.

令 $\mathcal{A}$ 为一个拟阵不在某带有确向序的基础上的 E 中元素相邻对的集合. 为简便起见, 称带有确向序的基础为*确向基础*. 当然, 不是任何基础均可定向为确向基础. 现在, 建立 GF(2) 上的方程: $\forall(a, b) \in \mathcal{A}$,

$$y_a + y_b = \begin{cases} 1, & a, b \text{ 在 构形 1 或 构形2 中}, \\ 0, & \text{否则, 即 } a, b \text{ 在 构形 3 中}, \end{cases} \tag{16.3.2}$$

并且称之为这个拟阵的*临界方程*.

如果一个拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 是确向可序的, 而且其临界方程 (16.3.2) 有解, 则称 M 是*相容的*; 否则, 称为*不相容的*.

根据在 6.4 节中出现的类似的理论, 可以验证, K_5 和 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵均为不相容的. 因此, 由下面的引理也易知它们均非图的.

引理 16.3.8 若 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 是一个图拟阵, 则 M 的对偶拟阵 M^* 是相容的.

证 用反证法. 假设 M^* 是不相容的, 则由 M^* 的确向可序性 (不难证明, 留给读者), 可以将 M^* 视为某图的圈拟阵, 并取这个基础为其确向树. 由与引理 6.4.8 在此情形之下的类似的理由可以看出, M^* 有一个次形与 K_3 或 $K_{3,3}$ 的圈拟阵同构, 从而 M 有一个次形与 K_3 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵同构. 由引理 16.3.7 可知 M 不是图的. 与引理的前提条件矛盾. ◻

进而, 还可以引进辅助图, 以便用与 6.4 节中所述类似的方法, 确定一个拟阵是否为相容的.

引理 16.3.9 对于一个正则拟阵 M, 下面的说法是相互等价的:

(1) M^* 是超上秩 2 重可覆盖的;

(2) M^* 有一个同调空间是平凡的;

(3) M 没有次形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵同构;

(4) M^* 是相容的.

证　(1) ⇒ (2). 由 M^* 的超上秩 2 重可覆盖性, 对于形成 M^* 的超上秩 2 重覆盖的圈 (一般地, 循环) 的集合 $\mathcal{D}$, M^* 的边缘空间的秩与 M^* 的循环空间的秩 (维数) 相等, 从而 M^* 有一个同调空间为平凡的, 即 (2) 成立.

(2) ⇒ (3). 用反证法. 设 M 有一个次形与 $M^*(K_5)$ 或 $M^*(K_{3,3})$ 同构, 则 M 有次形与 $M(K_5)$ 或 $M(K_{3,3})$ 同构. 然而可以论证, 不管是 $M(K_5)$ 还是 $M(K_{3,3})$, 均没有一个同调空间是平凡的. 由具有平凡同调空间的遗传性, M^* 必也无同调空间是平凡的, 即与 (2) 矛盾.

(3) ⇒ (4). 用反证法. 假设 M^* 是不相容的. 由确向可序性, M^* 与某图之圈拟阵同构. 当然, 这个图不会是可平面的. 这就意味着 M 有一个次形与 $M^*(K_5)$ 或 $M^*(K_{3,3})$ 同构, 与 (3) 矛盾.

(4) ⇒ (1). 留给读者以免多占篇幅.　♮

定理 16.3.1　一个正则拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$ 是图的当且仅当引理 16.3.9(1)~(4) 之一成立.

证　必要性直接由引理 16.3.4~ 引理 16.3.8 得到. 由引理 16.3.9, 对于充分性, 只取其中一个即可. 也许取 (1) 是最简单的. 事实上, 由 $M^*=(\mathcal{Z}^*,E)$ 的超上秩 2 重可覆盖性, 允许定义图 G 的节点为 $\mathcal{Z}^*$ 的在这个超上秩 2 重覆盖集 $\mathcal{D}$ 中的圈, 边自然为 $\mathcal{D}$ 中有公共元的圈对. 由于 2 重覆盖性, 这些圈对与 E 中之元素 1-1 对应, 从而 G 的边集视为 E. 由 M 与 M^* 的正交性有 $M\cong M(G)$, 即 G 的圈拟阵, 从而 M 是图的.　♮

引理 16.3.10　一个正则拟阵 M 是图的当且仅当其对偶 M^* 是上图的.

证　由图和上图拟阵的定义, 容易验证如下的形式:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ \tau\ } & M^* \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota^* \\ M(G) & \xrightarrow[\ \tau'\ ]{} & M^*(G) \end{array}$$

是可交换的, 其中 τ 和 τ' 确定相应的对偶性, ι 和 ι^* 确定相应的同构, 从而引理成立.　♮

定理 16.3.2　一个正则拟阵 M 是上图的当且仅当下面 4 个说法之一成立:

(1) M 是超上秩 2 重可覆盖的;

(2) M 有一个同调空间是平凡的;

(3) M 没有次形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的圈拟阵同构;

(4) M 是相容的.

证　由对偶性, 这是引理 16.3.10 和定理 16.3.1 的一个直接结果.　♮

由定理 16.3.1 和定理 16.3.2, 又即可得图的平面性的一个判准.

推论 16.3.1　一个图 G 是可平面的当且仅当它的圈拟阵是上图的, 或者对偶地, 它的上圈拟阵是图的.

16.4 注　记

(1) 虽然有关线性和代数相关性的公理方法, 出现在范德瓦尔登于 20 世纪 30 年代出版的《现代代数学》的书中, 由此可以看出有关拟阵的想法, 然而, 拟阵的理论基础, 如人们所熟知的, 是由 Whitney 奠定的, 参见文献 (Whitney, H. [10]). 拟阵这个术语也是由他给出的. 不管怎样, 对于当今的拟阵论的一个至关重要, 而且极为深入的发展, 确导源于 Tutte 于 20 世纪 50 年代所发表的一系列文章 (Tutte, W. T. [9~11]). 在文献 (Kung, J. P. S. [1]) 中收集了在拟阵理论方面的经典文章.

(2) 拟阵的正则性伴随着矩阵的全单模性, 由此也发展了矩阵的全单模性. 第一个提示了拟阵的正则性等价于 Fano 拟阵及其对偶出现与否作为次形的是 Tutte. 这里的理论基础是由他发现的有关拟阵的同伦定理, 参见文献 (Tutte, W. T. [9, 10]) 更进一步地, Seymour 将之发展到完全地解决了, 判定一般二元矩阵的全单模性的问题, 参见文献 (Seymour, P. D. [4, 5]).

(3) 在 16.3 节中所定义的图和上图拟阵, 与 Tutte 的原来的定义有些不同, 参见文献 (Tutte, W. T. [11]). 所差的只是将图与上图作了个交换, 因为通常人们是这样的. 然而, 在理论上并无差异. 事实上, 这个理论表明任何关于图的平面性的判准均可以适当的方式转换来判定拟阵之图性和上图性, 参见文献 (Tutte, W. T. [12], Weinberg, L. [8]). 不过, 进行这种转换的关键一步在于将平面性判准中与节点的明显关系变换为非明显的. 事实上, 在 16.3 节中提供了, 对于 4.2 节和 6.4 节中, 或者在文章 (Liu, Y. P. [1, 19, 22, 23]) 中的判准的这种变换. 这一理论也可用来判定几何格, 参见文献 (Sachs, D. [1]), 以及拟阵的单纯性, 参见文献 (Grunbaum, B. [1, 2]).

(4) 关于拟阵理论的各方面的情形, 可参见文献 (White, N. L. [1~3]).

(5) 关于图的次形定理, 参见文献 (Robertson, N. -P. Seymour [3]), 以及有关问题在拟阵理论中也会有相应的发展.

第17章　纽结不变量

17.1　纽结类型

一个纽结 (或链), 用 K (或 L) 表示, 从数学上说, 就是圆 $C_0=\{x,y,0)|x^2+y^2=1\}$ (或几个圆的无公共点的并) 到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的同胚之下的象. 在图 17.1.1 中所给出的两个纽结是常见的, 也是最简单的. 图 17.1.1 (a) 中那个, 被称为上手结或三叶结. 图 17.1.1 (b) 中那个为八字结, 或称为四结.

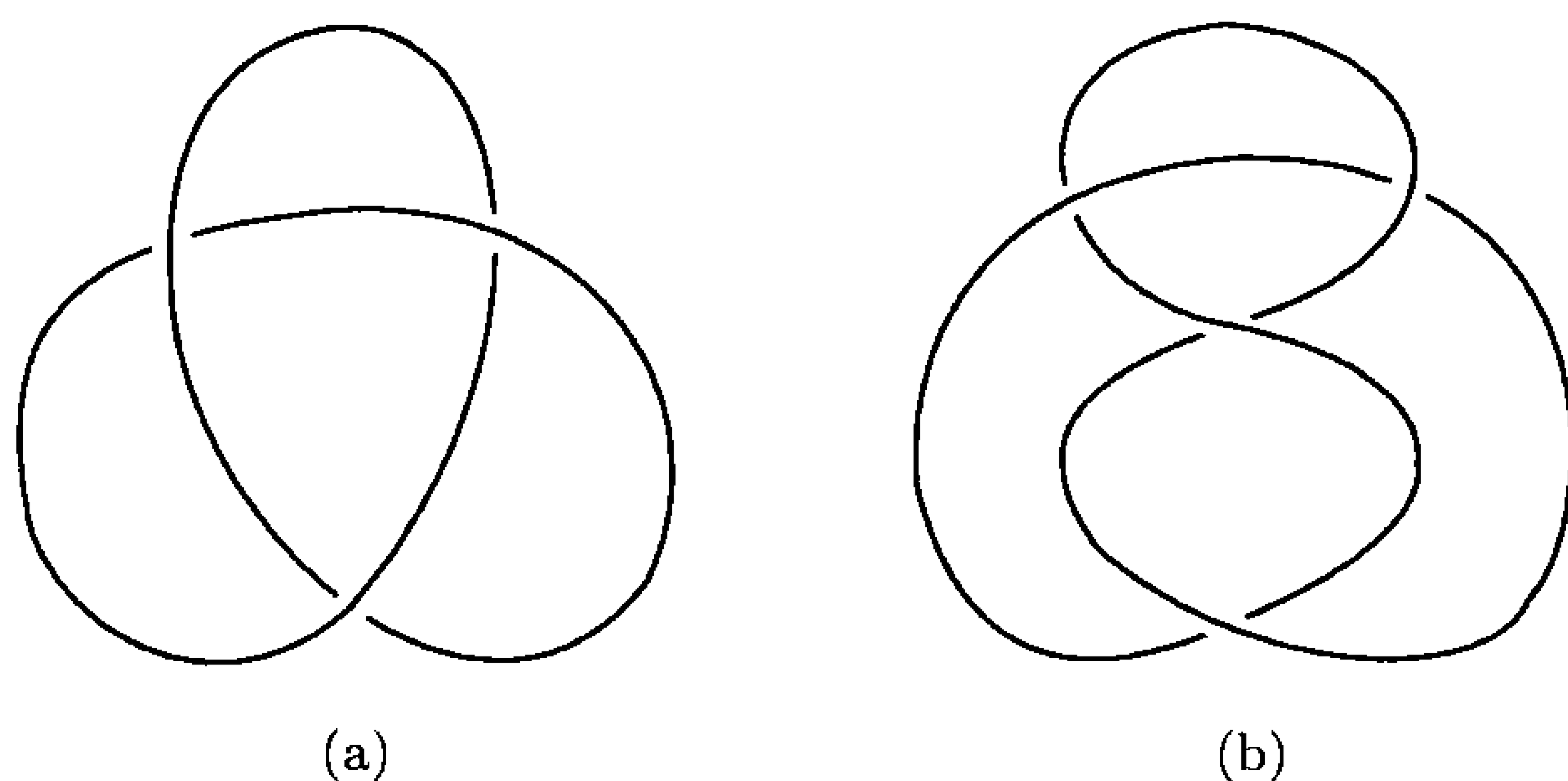


图 17.1.1

两个纽结 K_1 和 K_2, 若存在 $\mathbf{R}^3$ 到它本身的一个同胚, 将 K_1 映射到 K_2, 则称 K_1 与 K_2 是等价的. 毋庸置疑, 两个纽结间的等价确是一个等价关系, 等价的纽结视为同一个类型. 每个等价类被称为一个纽结类型. 那些与圆本身等价的纽结, 被称为平凡的. 所有平凡的纽结组成一个平凡类型. 下面将会看到三叶结与四结属于不同的纽结类型.

若一个纽结由有限条直线段组成, 则称它为多边形的, 其中线段的端点称为节点或顶点. 这些直线段被称为边或棱. 所有那些与多边形纽结等价的纽结, 被称为训的; 否则, 称为野的. 这样的区分是基本的, 因为这里所讨论的纽结均为训的.

一个纽结 K 在平行投影 proj_0: $\mathcal{R}_3\to\mathcal{R}_2$, 使得

$$\mathrm{proj}_0(x,y,z)=(x,y,0) \tag{17.1.1}$$

之下的象, 记为 $\mathrm{proj}_0(K)$. 对于任一 $p\in\mathrm{proj}_0(K)$, 若 $\mathrm{proj}_0^{-1}(p)$ 含 K 的多于一个点, 则称之为重点. 一个点 $p\in\mathrm{proj}_0^{-1}(K)$ 的阶就是集合 $\mathrm{proj}_0^{-1}(p)\cap K$ 中的基数. 所谓二重点即指阶为 2 的点. 自然, 三重点就是阶为 3 的点.

一个纽结称为处于正位, 即指 $\mathrm{proj}_0(K)$ 只有有限个重点, 而且每个重点均为如 6.1 节中所说的简单二重交叉. 因为可以想象任何纽结 (当然, 驯的) 至多通过扰动, 总可使它处于正位, 总假设纽结处于正位, 而不失一般性.

这样, 在正位的纽结投影象上的每一个重点均是 K 的两个点的象: 一个称为*上交叉*, 另一个称为*下交叉*.

一个拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的*同痕形变*是这样的一族同胚, $h_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, 使得 h_0 为全同映射, 即 $h_0(p) = p(\forall p \in \mathcal{X})$ 和 $H(t,p) = h_t(p)$ 是对双变量 t 和 p 的连续函数. 两个纽结 K_1 和 K_2 称为在同一个*同痕类型*, 即指存在 $\mathbf{R}^3$ 上的一个同痕形变 $\{h_t | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, 使得 $h_1(K_1) = K_2$. 参数 t 可视为时间.

这样, 对一个固定的点 $p \in K_1 \subset \mathbf{R}^3$, 随着 t 的变化从 K_1 出发通过 p 的轨迹, 即一条路线达到 K_2.

容易验证, 若两个纽结在同一同痕类型, 则它们是等价的. 当然, 一般来说, 反之则不成立. 下面关于定向的讨论用来解释这两个定义的不同.

一个同胚 $h: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, 如果一个点带有顺 (逆) 时针走向的旋在 h 之下的象, 也是一个点带顺 (逆) 时针走向的旋, 则称 h 为*保定向的*; 否则, 称为*逆定向的*. 由 h 的连续性, 每一个带一个固定的旋的点的邻域在 h 之下, 保持其象也是带相同的旋 (不计走向!) 的一个邻域.

由于 h 是一个同胚, $\mathbf{R}^3$ 中每一个点的象必属于两个无公共元的集合之一: 一个是带有与 p 走向相同的旋; 另一个则是带有与 p 走向不同的旋. 又由 $\mathbf{R}^3$ 的连通性, 这两个集合之中必有一个为空的, 从而 $\mathbf{R}^3$ 到它自身的一个同胚 h 是逆定向的当且仅当每一个带顺 (逆) 时针走向旋的点的象为带逆 (顺) 时针走向旋的点.

令 H_+ 和 H_- 分别为 $\mathbf{R}^3$ 到它自身的保定向和逆定向同胚的集合, 则即可看到, 两个同胚 h_1 和 h_2 的合成满足如下的规则:

$$\begin{cases} h_1 h_2 \in H_+ \Leftrightarrow (h_1 \in H_+) \wedge (h_2 \in H_+) \\ \qquad\qquad\qquad \vee (h_1 \in H_-) \wedge (h_2 \in H_-), \\ h_1 h_2 \in H_- \Leftrightarrow (h_1 \in H_+) \wedge (h_2 \in H_-) \\ \qquad\qquad\qquad \vee (h_1 \in H_-) \wedge (h_2 \in H_+). \end{cases} \tag{17.1.2}$$

当然, 全同映射是保定向的. 另一方面, *反射* ref: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, 使得

$$\mathrm{ref}(x, y, z) = (x, y, -z), \tag{17.1.3}$$

则是*逆定向的*.

判定一个同胚 h 是保定向还是逆定向并不困难. 假若 h 是线性变换, 则自然其保或逆定向性, 分别由其相应矩阵的行列式为正或负所决定; 否则, 若 h 在某处是

可微的, 则它的保或逆定向性分别由在这点处的 Jacobi 行列式的正或负而定.

引理 17.1.1　两个纽结 K_1 和 K_2 属于同一同痕类型当且仅当存在一个同痕形变 $h_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 使得

$$h_1 \in H_+, \quad h_1(K_1) = K_2. \tag{17.1.4}$$

证　由同痕类型的定义, 充分性显然. 只证必要性. 由 h_0 总是保定向的, 即 $h_0 \in H_+$. 由 $H(t,p) = h_t(p)$ 的连续性可知所有 $h_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 皆为保定向的, 从而有 (17.1.4) 式.　♮

对于一个纽结 K, 若存在 $\mathbf{R}^3$ 到它自身的一个逆定向的同胚 h, 使得 $h(K) = K$, 则称 K 为**双旋的**.

对于由 (17.1.3) 式所定义的反射 ref, K 的象 ref(K) 被称为 K 的**镜象**.

引理 17.1.2　一个纽结 K 是双旋的当且仅当

$$\exists h' \in H_+, \quad h'(K) = \mathrm{ref}(K). \tag{17.1.5}$$

证　若 K 是双旋的, 则存在 $h \in H_-$, $h(K) = K$. 由 (15,1,2) 式有 $h' = \mathrm{ref} \cdot h \in H_+$, 从而 $h'(k) = \mathrm{ref}(K)$. 必要性得证.

反之, 由于 $h'(K) = \mathrm{ref}(K)$ 且 $h' \in H_+$, 依 (17.1.2) 式有 $\mathrm{ref} \cdot h' \in H_-$. 又 $\mathrm{ref} \cdot h'(K) = \mathrm{ref} \cdot \mathrm{ref}(K) = K$, 从而 K 是双旋的. 这就是说, 得到了充分性.　♮

由图 17.1.2 可以看出, 图 17.1.1(b) 中的八字结是双旋的.

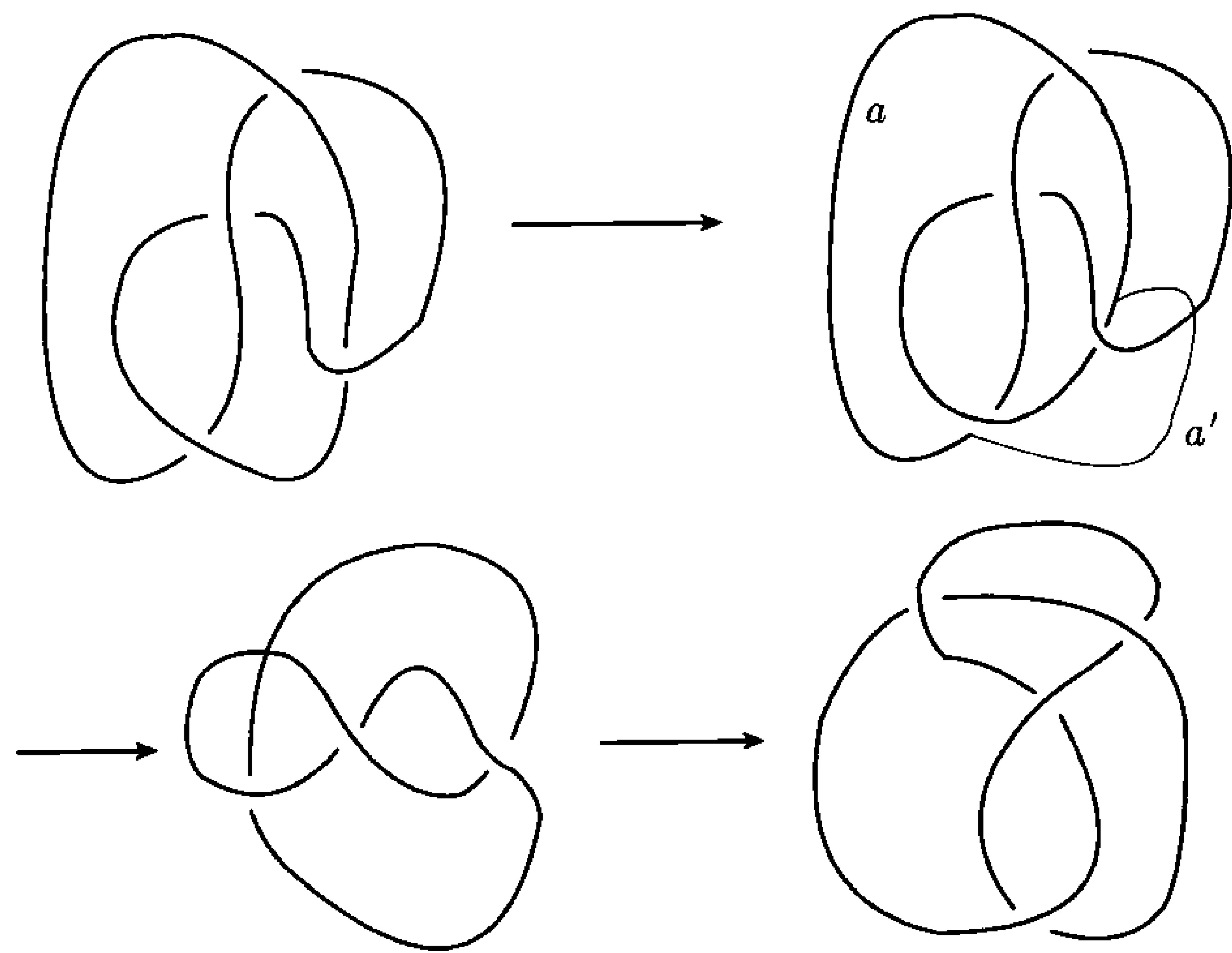


图 17.1.2

利用 17.3 节中的进一步的结果, 将会看到上手结和它的镜象, 或者说*左手结*和*右手结*, 是等价的, 但属于不同的同痕类型.

至此, 人们会问是否每一个 $\mathbf{R}^3$ 到它自身的保定向同胚 h 均可由一个同痕形变实现, 或者说, 对于给定的 h, 是否存在 $h_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 使得 $H(t,p) = h_t(p)$ 同时对 t 和 p 连续, $h_0(p) = p, h_1(p) = h(p)(p \in \mathbf{R}^3)$? 若回答是否定的, 那就必导致第三种类型纽结的出现. 事实上, 回答是肯定的. 不管怎样, 可以将引理 17.1.1 改进为如下的定理:

定理 17.1.1 两个纽结 K_1 和 K_2 属于同一个同痕类型当且仅当

$$\exists h \in H_+, \quad h(K_1) = K_2. \tag{17.1.6}$$

证 必要性自然为引理 17.1.1 的一个直接结果, 而充分性的证明则不容易, 可在文献 (Fisher, G.M.[1]) 中查到.

正如每一个 $\mathbf{R}^3$ 到它自身的同胚不是保定向必是逆定向的, 每个 K 到它自身的同胚也是这样.

这就使得可以定义一个纽结是*可逆的*, 如果存在一个 $\mathbf{R}^3$ 到它自身的保定向同胚 h, 使得限定在 K 上的同胚 $h|K$ 为逆定向的.

可以证明三叶结和四结均为可逆的. 当然, 任何一个与它的镜象在同一同痕类型的纽结全是可逆的. 然而, 仍有无限多个非可逆的纽结, 参见文献 (Trotter, H.F.[1]).

17.2 图 的 模 型

对于一个链 L, 处于 17.1 节中所说的正位, 在由 (17.1.1) 式所定义的平行投影 proj_0 之下的象 $\mathrm{proj}_0(L)$ 被称为 L 的*全影*, 并用 U 表示. 如果将 U 上的每一个二重点均区别开上交叉与下交叉, 则称之为 L 的*形式*. 事实上, 图 17.1.1 (a) 表示三叶结的形式, 图 17.1.1 (b) 为四结的形式. 如果将 U 上所有的二重点视为节点, 二重点之间的不与其他二重点为内点的线段为边, 则得一个图, 称之为 L 的*基图*. 当然, 无结圆, 或者说, 平凡纽结, 由于无二重点, 可以想象其基图为仅由一环组成的. 一个链 L, 如果它的基图全是连通的, 则称它为*准连通的*. 下面所说的链均指准连通的, 而不加说明. 如果一个链与两个链, 它们存在无公共点的全影, 之不交并等价, 则称它是*不连通的*. 当然, 凡连通的链皆为准连通的, 但反之, 则一般不成立.

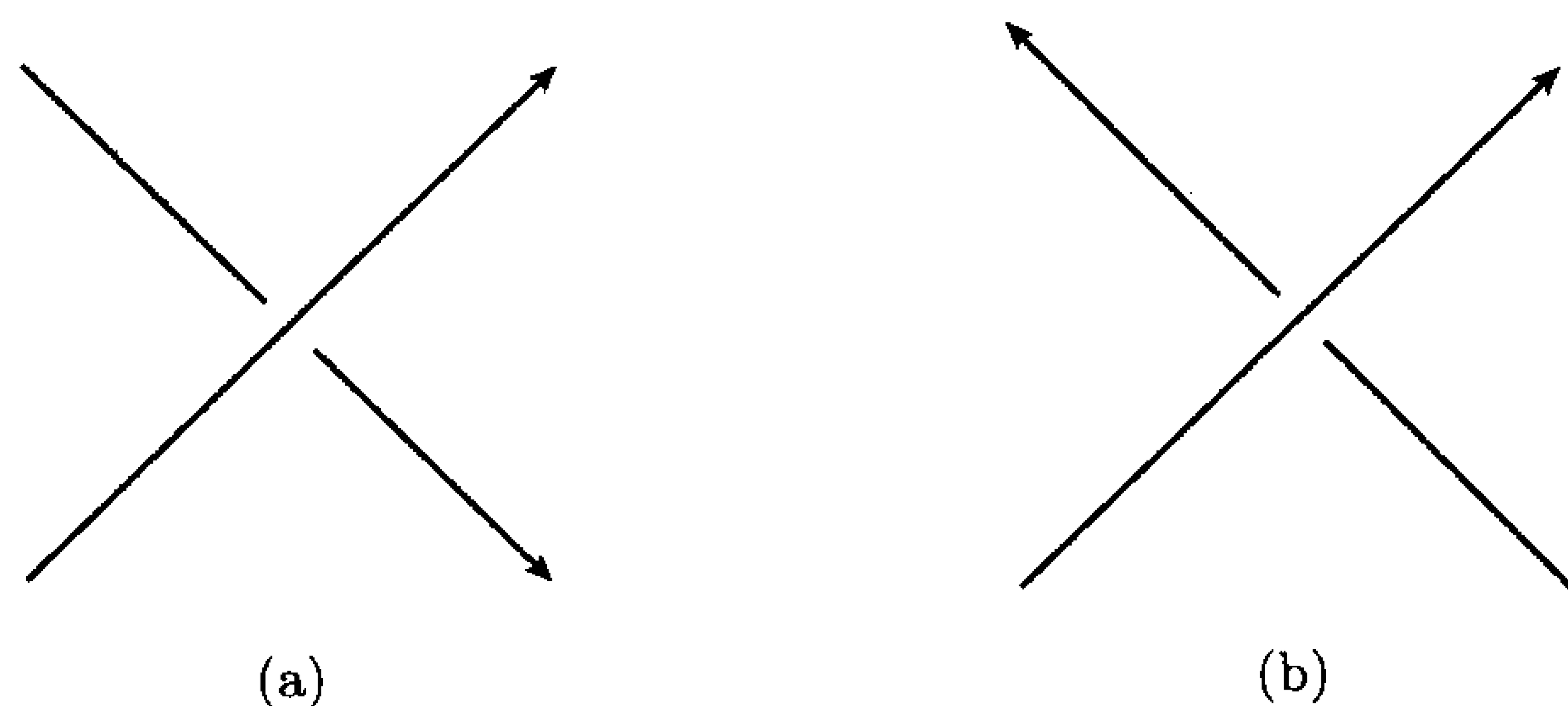
引理 17.2.1 一个图是一个链的基图当且仅当它是 4 正则的平面图. 仅有的例外是由一个环组成的图, 它不是 4 正则的, 但是平凡链的基图.

证 由于在一个链的全影中, 每一个重点处的二重性决定其基图为 4 正则的. 又从基图的定义可知是平面的, 从而必要性显然.

反之, 由 Euler 性, 总可从一个节点和与它关联的一条边出发, 只要到达一个节点就沿那条与进入的边对于此处的旋不相继的边离去, 直到得到一个回. 若这个

回是 Euler 的, 则这个图是一个纽结的基图; 否则, 从与一个有尚未走过边关联的节点, 沿一条未走过的边, 在那个由所有未走过边导出的子图上, 继行此法以求回. 直到所有边都走过为止, 从而可知此图为一个链的基图. 充分性得证. ♮

因为在一个纽结的形式中, 每一个二重点均有两种可能的状态, 如图 17.2.1 所示. 这就允许分配权 0 或 1 到每个节点上. 例如, 图 17.2.1 (a) 即沿着预先选定的链上各闭曲线的走向, 在二重点处, 当通过上交叉时, 下交叉是从左向右的走向, 赋权 0. 图 17.2.1 (b) 即当通过上交叉时, 下交叉为从右向左的走向, 赋权 1. 这样的在节点处有权 0 或 1 的基图, 被称为相应链的**带号图**.



(a)　　(b)

图 17.2.1

在引理 17.2.1 的证明中已经看到, 任何 4 正则平面图均有一个**回划分**, 即将边集划分为若干子集, 使得每个子集所导出的子图是一个回, 并且在每个节点处, 此回上的相继边不是此节点处旋的相继边. 也称这样的回为**非继回**. 这样的回的划分也称为**非继的**. 若一个 4 正则平面图, 在其上已给出了一个非继回的划分, 而且各节点带权 0 或 1, 则称之为一个 NoTPaPW4 图 (或者说, **非继回划分带权 4 正则平面图**).

引理 17.2.2　在 NoTPaPW4 图和非平凡链之间存在一个 1–1 对应.

证　因为只要将 NoTPaPW4 图中的每一个回选定一个方向, 根据节点处的权, 可以确定它作为二重点处的上交叉, 同样地, 下交叉, 这就得到了某链的一个形式. 由引理 17.2.1, 即得引理的结论. ♮

因为任何 4 正则平面图的面集均可唯一地划分为两个子集, 使得在每个子集中, 任何两个面至多有一个节点, 在它们的边界上公共, 对每一个子集可以构造一个图 (当然, 平面的), 使得它的节点为这个子集中的面, 两个节点相邻当且仅当它们的相应面的边界有一个公共节点. 容易看出, 这两个图是互为平面对偶的. 如 7.1 节中所述, 它们的每一个均称为原 4 正则平面图的**面图**. 一个链的带号图的面图, 若将它的边赋以这个带号图中相应节点的权, 则称之为这个链的一个**边带号面图**, 或简记为 ESF 图.

引理 17.2.3　一个带边权 0 或 1 的图是某个链 (或纽结) 的 ESF 图当且仅当

它是可平面的 (或可平面的且没有双循环).

证 由 ESF 图的定义, 对链的必要性显然. 对于纽结的必要性, 由引理 3.4.3 可得.

反之, 按照 4.4 节中的通穿规则, 在平面图上得到一个 (纽结) 或多个 (链) 闭曲线, 使得每一条边上恰有一个二重点. 然后, 用引理 17.2.2 的证明中的方法, 根据权确定在二重点处的上交叉, 同样地, 下交叉. 由引理 4.4.4, 即可得充分性. ♮

一般地, 对于平面图的互为对偶的一对, 如果有双循环, 则至少有两个 4 正则平面图均以这对平面图为面图. 这就是说, 一个带权 0 和 1 的平面图的对偶对可以与至少两个链的形式相对应.

引理 17.2.4 在带二元权无双循环平面图的对偶对和纽结形式之间存在一个 1–1 对应.

证 由于无双循环, 用 4.4 节中的通穿规, 则在此对中的一平面图上只可得一条闭曲线, 使每一边恰相应一个二重点. 用引理 17.2.2 的证明中的方法, 根据边上的权确定相应二重点处之上交叉, 同样地, 下交叉, 即唯一地决定一个纽结形式. 又由平面对偶性, 此对中的每一个图均相应这个形式, 从而引理得证. ♮

根据第 7 章中所讨论的, 也可以用一个序列表示一个链的形式. 设 ESF 图上的边, 用字母标识, 使得不同的边所用的字母不同, 并且每个字母均规定取值 0 或 1, 则对于一个无双循环的平面图 G, 通过在 G 上利用 4.4 节中的通穿规则, 每穿过一边就记录代表这一边的字母, 使得每边恰穿过两次, 即可得一个字母的序列 $S_{\mathrm{eq}}(G)$. 若 G 是一个纽结的 ESF 图, 则 $S_{\mathrm{eq}}(G)$ 被称为*纽结序列*, 或者一般地, 若 G 有双循环, 则称为*链序列*.

引理 17.2.5 一个由二元值字母组成的序列是一个纽结序列当且仅当它是交叉序列.

证 这是引理 17.2.3 的一个直接结果. ♮

至此, 已经看到, 带号图 ESF 图和纽结 (或链) 序列都可应用于讨论纽结 (或链) 以代替形式. 这里, 只限于讨论 ESF 图.

令 G 是一个平面图, 在边上带二元权. 对于任何一个显节点 v, 令

$$\alpha_1(G;v) = G - v, \tag{17.2.1}$$

则称 α_1 和它的逆 α_1^{-1} 为*第一初等算子*, 并统记为 π_1.

对于一个 2 节点 v, 设 $e_1 = (w,v)$ 和 $e_2 = (u,v)$ 为与 v 关联的那两条边, 如果它们的权是不同的, 则令

$$\alpha_2(G;E_v) = (G \cdot e_1) \cdot e_2 \tag{17.2.2}$$

为去掉这个 2 节点 v, 然后将 u 和 w 合而为一所得的图. 当然, α_2 的逆 α_2^{-1} 就是在

劈分一个节点为 u 和 w 后, 再加一个新节点 v 和它的两条关联边 (u,v) 和 (v,w), 使得带不同的权. 称 α_2 和 α_2^{-1} 为*第二初等算子*, 并统记为 π_2.

设 $\mathrm{St}(u;i,j,k)=(\{u,v_i,v_j,v_k\},\{(u,v_t)|t=i,j,k\})$ 为图 G 中的一个 3 星带权 $w(u,v_t)$ 在边 $(u,v_t)(t=i,j,k)$ 上. 如果将按 4.4 节中的通穿规则在 G 上得到的迂, 使得每边恰穿两次, 用引理 17.2.2 证明中的方法, 根据权, 决定每一个二重点处的上交叉, 同样地, 下交叉, 并且与 (u,v_i) 和 (u,v_j) 相应的二重点为相继上交叉, 或相继下交叉, 则令

$$\alpha_3(G;St)=(G-u)+\{(v_i,v_j),(v_j,v_k),(v_k,v_i)\}, \tag{17.2.3}$$

其中 $w(v_i,v_j)=w(u,v_k)$, $w(v_j,v_k)=w(u,v_i), w(v_k,v_i)=w(u,v_j)$. 这里, 将 α_3 和它的逆 α_3^{-1} 称为*第三初等算子*, 并统记为 π_3, 而且 π_1, π_2 和 π_3 均被称为*初等运算*.

两个在边上带二元权的平面图 G_1 和 G_2, 若通过在 G_1 上作一系列的初等运算可得到 G_2, 则称 G_1 与 G_2 *初等等价*.

假若 G_1 和 G_2 在限制 π_2 和 π_3 的条件下初等等价, 则称它们为*正则等价*; 否则, 将一般的初等等价, 也称为*旋转等价*.

问题 1　对于一个在边上带二分权的平面图, 确定它的正则等价类与旋转等价类. ♮

现在, 回到拓扑学. Reidemeister 于 20 世纪 20 年代通过引进三种运算, 分别用 γ_1 =R1, γ_2 =R2 和 γ_3 =R3 表示, 简化了对于纽结的研究.

他证明了在这三种运算之下, 不会改变纽结的类型, 而且同一个纽结的两个形式, 总可以通过这三种运算, 从一个变换到另一个.

称这三种运算 γ_1, γ_2 和 γ_3 为 Reidemeister *运算*.

在图 17.2.2 中, 解释了这三种运算.

两个纽结形式, 或者一般地, 两个链形式被称为属于同一*旋转同痕类*是指它们中的一个可以通过一系列的 γ_1, γ_2 和 γ_3 变为另一个. 如果其中只用 γ_2 和 γ_3, 则称它们在同一个*正则同痕类*.

问题 2　确定纽结, 或一般地, 链的正则同痕类与旋转回痕类. ♮

为了揭示问题 1 与问题 2 的关系, 必需看一下对于图的初等运算与对于纽结形式的 Reidemeister 运算之间的关系.

引理 17.2.6　在链形式上的运算 γ_i 与在边带二元权的平面图上的初等运算 $\pi_i(i=1,2,3)$ 相应.

证　由引理 17.2.4 中所提供的边带二元权的平面图与链形式之间的对应. 容易验证, π_i 与 $\gamma_i(i=1,2)$ 的对应关系. 对于 $i=3$ 的情形, 考虑到 π_3 可以作用到图上的条件, 恰与在链形式上 γ_3 所需要的条件相应, 而且经 π_3 作用后的图上, 新边上权恰反映了经 γ_3 之后在链形式上的变化, 从而 π_3 与 γ_3 也是相应的. ♮

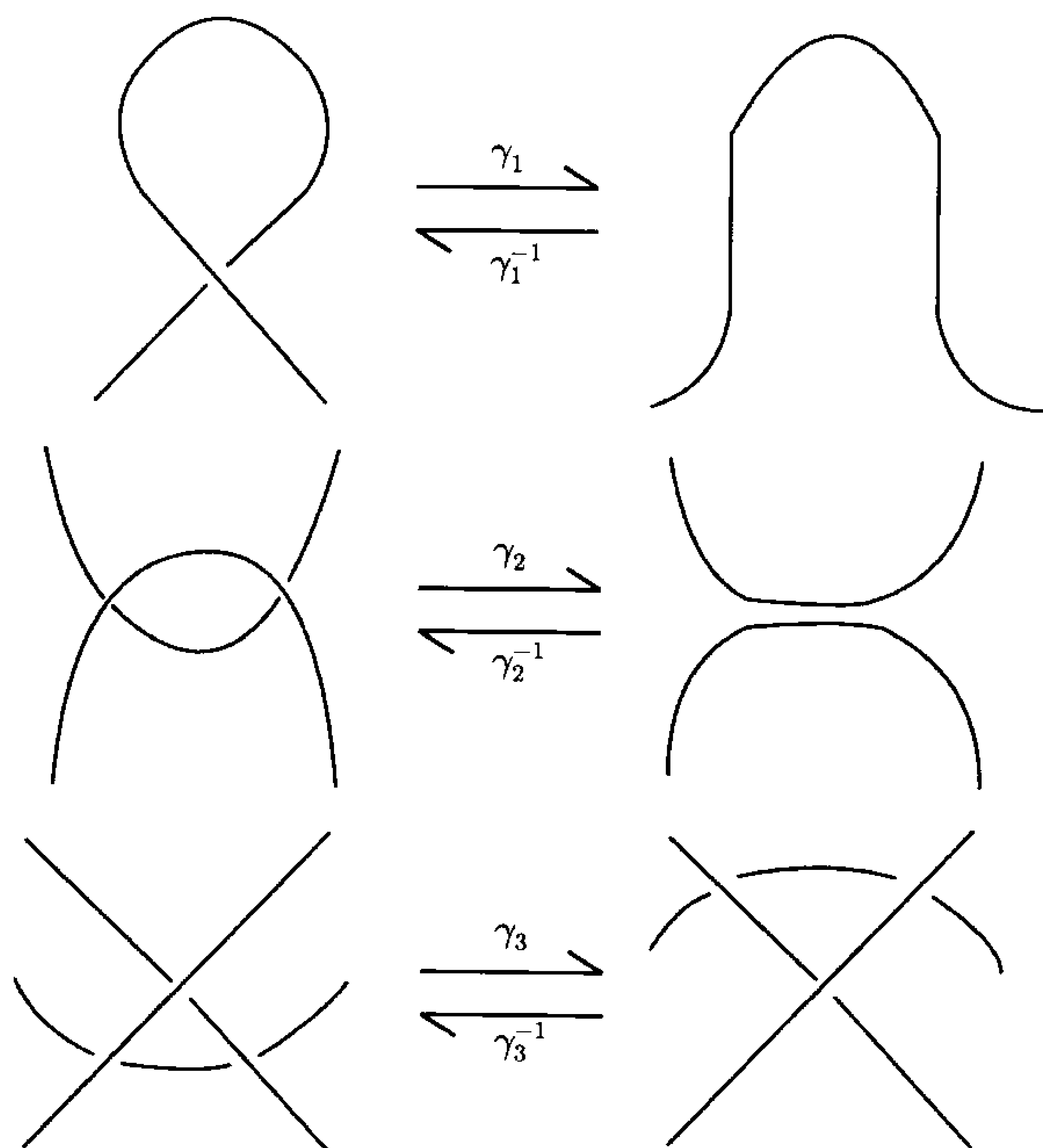


图 17.2.2

引理 17.2.6 使得不必区别问题 1 与问题 2.

定理 17.2.1 两个链形式属于同一个旋转同痕类 (或正则同痕类) 当且仅当它们相应的 ESF 图属于同一个旋转等价类 (或正则等价类).

证 这是引理 17.2.4 和引理 17.2.6 的直接结果.

当然, 根据引理 17.2.5, 也可以用序列的形式描述上面的等价问题, 而不会遇到什么困难. 关键的一步就是找到在序列上的相应的运算. 这一任务留给感兴趣的读者去完成.

17.3 Tutte 多项式

一个图 G 的*范色多项式*, 用 $Q(G)$ 表示, 就是图 G 由如下递推关系所确定以 μ 和 ν 为变元的函数:

$$Q(G)=\begin{cases}Q(G-e)+Q(G\cdot e), & e\text{ 既非环又非割边},\\(1+\nu)Q(G-e), & e\text{ 为自环},\\(1+\mu)Q(G\cdot e), & e\text{ 为割边}\end{cases}\tag{17.3.1}$$

且满足下面的范色性 1 和范色性 2.

范色性 1 若 G 只有一个节点且无边, 则

$$Q(G) = \mu. \tag{17.3.2}$$

范色性 2 若 $G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2$ 只一个节点而无边，则

$$Q(G) = \mu^{-1} Q(G_1) Q(G_2). \tag{17.3.3}$$

定理 17.3.1 图 G 的范色多项式具有如下形式：

$$Q(G) = \sum_S \mu^{p_0(S)} \nu^{p_1(S)}, \tag{17.3.4}$$

其中 S 走遍 G 的所有支撑子图，$p_0(S)$ 和 $p_1(S)$ 分别为 S 的连通片数和圈秩.

证 因为节点图仅有一个支撑树，即它本身，由 (17.3.4) 式，$Q(G)$ 满足范色性 1.

对于图 G 为 G_1 和 G_2 仅一个公共节点的并，因为 G 的任何支撑子图 S 也是 S_1 和 S_2 仅一个公共节点的并，其中 S_1 和 S_2 分别为 G_1 和 G_2 的支撑子图，由于容易验证

$$p_0(S) = p_0(S_1) + p_0(S_2) - 1$$

和

$$p_1(S) = p_1(S_1) + p_1(S_2),$$

由此可见，$Q(G)$ 满足范色性 2.

然后，通过 (17.3.1) 式证明 $Q(G)$ 满足 (17.3.4) 式.

当 e 既非环又非割边时，图 G 的所有支撑子图被分为两类：包含 e 或否. 由于

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} p_0(S) &= p_0(S; G-e), \\ p_1(S) &= p_1(S; G-e), \end{aligned}\right\} e \notin S, \\ \left.\begin{aligned} p_0(S) &= p_0(S; G\cdot e), \\ p_1(S) &= p_1(S; G\cdot e), \end{aligned}\right\} e \in S, \end{cases}$$

即 (17.3.4) 式导致 (17.3.1) 式.

当 e 为自环时，图 G 的任何一个支撑子图 S 都有

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} p_0(S) &= p_0(S; G-e), \\ p_1(S) &= p_1(S; G-e), \end{aligned}\right\} e \notin S, \\ \left.\begin{aligned} p_0(S) &= p_0(S; G-e), \\ p_1(S) &= p_1(S; G-e) + 1, \end{aligned}\right\} e \in S. \end{cases}$$

由 (17.3.4) 式也导致 (17.3.1) 式.

当 e 为割边时，每一个如上述子图 S 有

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} p_0(S) &= p_0(S; G\cdot e)+1,\\ p_1(S) &= p_1(S; G\cdot e), \end{aligned}\right\} e\notin S,\\ \left.\begin{aligned} p_0(S) &= p_0(S; G\cdot e),\\ p_1(S) &= p_1(S; G\cdot e), \end{aligned}\right\} e\in S. \end{cases}$$

由 (17.3.4) 式仍导致 (17.3.1) 式.

从而由文献 (Liu, Y.P.[47]) 中的定理 1.2.4, 即得定理的结论.

由 (17.3.3) 式知范色多项式中的两个未定元没有对称性. 不过, 只要将它变为另一个多项式

$$\chi(G; x, y) = \mu^{-1}Q(G; \mu, \nu), \tag{17.3.5}$$

易见在这个多项式中, 两个未定元 $x=\mu+1$ 和 $y=\nu+1$ 就有对称性了.

事实上, 由 (17.3.1)~(17.3.3) 式即知, χ 满足如下的递推关系:

$$\chi(G) = \begin{cases} \chi(G-e)+\chi(G\cdot e), & e \text{ 既非环又非割边},\\ x\chi(G\cdot e), & e \text{ 为割边},\\ y\chi(G-e), & e \text{ 为环}, \end{cases} \tag{17.3.6}$$

当 G 为只一个节点的图时, $\chi(G)=1$.

由 (17.3.6) 式, 即可导出当 $G=G_1\dot{+}G_2$ 时, 有

$$\chi(G) = \chi(G_1)\chi(G_2), \tag{17.3.7}$$

其中 $\dot{+}$ 表示只有一个公共节点 (自然无公共边!) 的并.

多项式 χ 在 Tutte 的术语中被称为*色范式*, 或文献中多称为 *Tutte 多项式*.

若将图 G 中的边给以标数, 如 $e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon$. 令 T 为 G 的一个支撑树, 如果一个树边 e_i 有这样的性质: 在基本上圈 $\bar{T}+e_i$ 中, 没有足标超过 i 的边, 则 e_i 被称为*内活的*.

另一方面, 如果一个上树边 e_j 有这样的性质: 在基本圈 $T+e_j$ 中没有足标超过 j 的边, 则 e_j 被称为*外活的*.

已经知道给定内活边数 $\mathrm{int}(T)$ 和外活边数 $\mathrm{ext}(T)$ 的支撑树的数目与边的标数方式无关.

定理 17.3.2 (Tutte, 1954) 图 G 的色范式 $\chi(G)$ 具有如下的支撑树展开式:

$$\chi(G) = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant\epsilon\\ 0\leqslant j\leqslant\epsilon}} \tau(G; i, j)x^i y^j, \tag{17.3.8}$$

其中

$$\tau(G; i, j) = |\{T|\mathrm{int}(T)=i, \mathrm{ext}(T)=j\}|, \quad 0\leqslant i\leqslant\epsilon, 0\leqslant j\leqslant\epsilon.$$

证 主要是证 e 既非环又非割边的情形, 其他均易类似地导出. 令 $T = T(G;i,j)$ 为 G 中使得 $\text{int}(T) = i$ 和 $\text{ext}(T) = j$ 的一个支撑树. 对于在 T 中内活的边 e, $G-e$ 恰有一个

$$T_1 = T(G-e;i,j) = T - e + e_l$$

与 T 对应, 其中 $l = \max\{s|e_s \in C_e^*\}$, C_e^* 为基本上圈 $\bar{T}+e$, 而且 $T \cdot e$ 是 $G \cdot e$ 上的支撑树, 但不是 $T(G \cdot e;i,j)$.

如果 e 对于 T 外活, 则 $T-e$ 是 $G-e$ 上的支撑树, 但不是 $T(G-e;i,j)$, $T \cdot e - e_t$ 是唯一的 $T(G \cdot e;i,j)$, 与 T 对应, 其中 $t = \max\{s|e_s \in C_e - e\}$, C_e 是基本圈 $T+e$, 从而

$$\tau(G;i,j) = \tau(G-e;i,j) + \tau(G \cdot e;i,j)$$

成立. 由 (17.3.6) 式, 即可得定理的结论. ♮

定理 17.3.2 出自文献 (Tutte, W.T.[13]). 它的意义在于揭示了一个图的复杂度(即支撑树的数目) 与其内在结构的关系, 其深刻性表现在这种结构着实不容易被人们注意到.

上面提到的思路将会在下面两节中看出, 对于纽结拓扑不变量研究的指导作用.

17.4 泛多项式

所谓纽结(或链)不变量是指这样的一个由纽结 (或链) 所决定的函数 f, 使得同一类型的纽结 (或链) 具有相同的 f. 本节的目的在于求形如多项式的不变量. 由 17.2 节中所讨论的, 可以只限于图 (当然, 平面的而且边上有二元权), 而不直接考察纽结 (或链).

令 G 是一个边带二元权的平面图. 对于一条边 e, 其权 $w(e) = 0$ 或 1. 这里, e 允许是环或割边. 记 $k_i = k_i(G)$ 为权是 $i = 0,1$ 的割边的数目, $l_i = l_i(G)$ 为权是 $i = 0,1$ 的环的数目.

现在, 定义一个函数 $\Phi(G)(G = (V,E))$ 为边带二元权的平面图, 使得满足如下的递推关系:

$$\Phi(G) = \begin{cases} A(e)\Phi(G-e) + B(e)\Phi(G \cdot e), \\ \qquad e \in E \text{ 既非割边也非环}, \\ (X+Yz)^{\bar{w}(e)}(Xz+Y)^{w(e)}\Phi(G-e), \\ \qquad e \text{ 是一个环}, \\ (X+Yz)^{w(e)}(Xz+Y)^{\bar{w}(e)}\Phi(G \cdot e), \\ \qquad e \text{ 是一条割边}, \end{cases} \tag{17.4.1}$$

其中

$$\begin{cases} A(e) = \bar{w}(e)X + w(e)Y, \\ B(e) = w(e)X + \bar{w}(e)Y, \end{cases}$$

$G-e$, $G\cdot e$ 分别为在 G 上去掉收缩 e 为一个节点所得的图, 并且满足如下的始条件:

条件 1 若 G 是平凡图, 即只有一个节点而无边, 则

$$\Phi(G) = 1. \tag{17.4.2}$$

条件 2 若 G 是不连通的, 即 $G = G_1 + G_2$, 则

$$\Phi(G) = z\Phi(G_1)\Phi(G_2). \tag{17.4.3}$$

由这个递推关系, 容易验证, 若 G 是连通的, 而且每条边非环即割边, 则有

$$\Phi(G) = (X+Yz)^{k_1+l_0}(Xz+Y)^{k_0+l_1}.$$

进而, 还可以看出, 如果 G^* 是 G 的平面对偶, 则 $\Phi(G^*)$ 与 $\Phi(G)$ 具有相同的形式, 但只是 X 和 Y 的位置交换.

引理 17.4.1 对任何所考虑的图 G, $\Phi(G)$ 是 X, Y 和 z 的多项式.

证 用归纳法. 由条件 (17.4.2), 可以验证度小的图满足引理, 即 Φ 是 X, Y 和 z 的多项式. 若 G 不连通, 条件 (17.4.3) 使得可以由归纳假设知对其所有连通片, Φ 为多项式. 由条件 (17.4.3) 可知 $\Phi(G)$ 也为 X, Y 和 z 的多项式; 否则, 即 G 是连通的. 这时, 由归纳假设知 $\Phi(G-e)$ 和 $\Phi(G\cdot e)$ 均为 X, Y 和 z 的多项式, 从而根据 (17.4.1) 式可得 $\Phi(G)$ 为 X, Y 和 z 的多项式. ♮

下面看一下 Φ 对于图在初等运算之下将如何变化.

令 v 为所考虑的图 $G=(V,E)$ 的一个显节点. 记 $e=(u,v)$ 带权 1 为与 v 关联的那一条边. 由 (17.4.1) 式有

$$\Phi(G) = (A(e)z + B(e))\Phi(\pi_1 G). \tag{17.4.4}$$

在 (17.4.4) 式中, 对于 G 中去掉 e 后所得的图, 用到了 (17.4.3) 式和 (17.4.2) 式.

引理 17.4.2 对于 π_1, Φ 是不变的当且仅当 $Xz+Y = X+zY = 1$.

证 由 (17.4.4) 式, 对于 π_1, Φ 是不变的当且仅当

$$A(e)z + B(e) = \bar{w}(e)(Xz+Y) + w(e)(X+Yz) = 1.$$

由 $w(e)$ 和 $\bar{w}(e)$ 的对称性, 即得引理的结论. ♮

对于 π_2, 令 v 为一个 2 节点, 其关联边为 $e_1=(u,v)$, $e_2=(v,w)$ 满足条件 $w(e_1)\neq w(e_2)$. 根据 (17.4.1) 式有

$$\begin{aligned}\Phi(G)=&\big(zA(e_1)A(e_2)+A(e_1)B(e_2)+A(e_2)B(e_1)\big)\Phi(G-v)\\&+B(e_1)B(e_2)\Phi(\pi_2G).\end{aligned}\tag{17.4.5}$$

引理 17.4.3　对于 π_2, Φ 是不变的当且仅当

$$XY=1,\quad XYz+X^2+Y^2=0.\tag{17.4.6}$$

证　由 e_1 和 e_2 间的对称性可以假设 $w(e_1)=1$ 和 $w(e_2)=0$. 由 (17.4.5) 式, Φ 是不变的当且仅当 $\Phi(G-v)$ 的系数为 0, $\Phi(\pi_2G)$ 的系数为 1. 因为

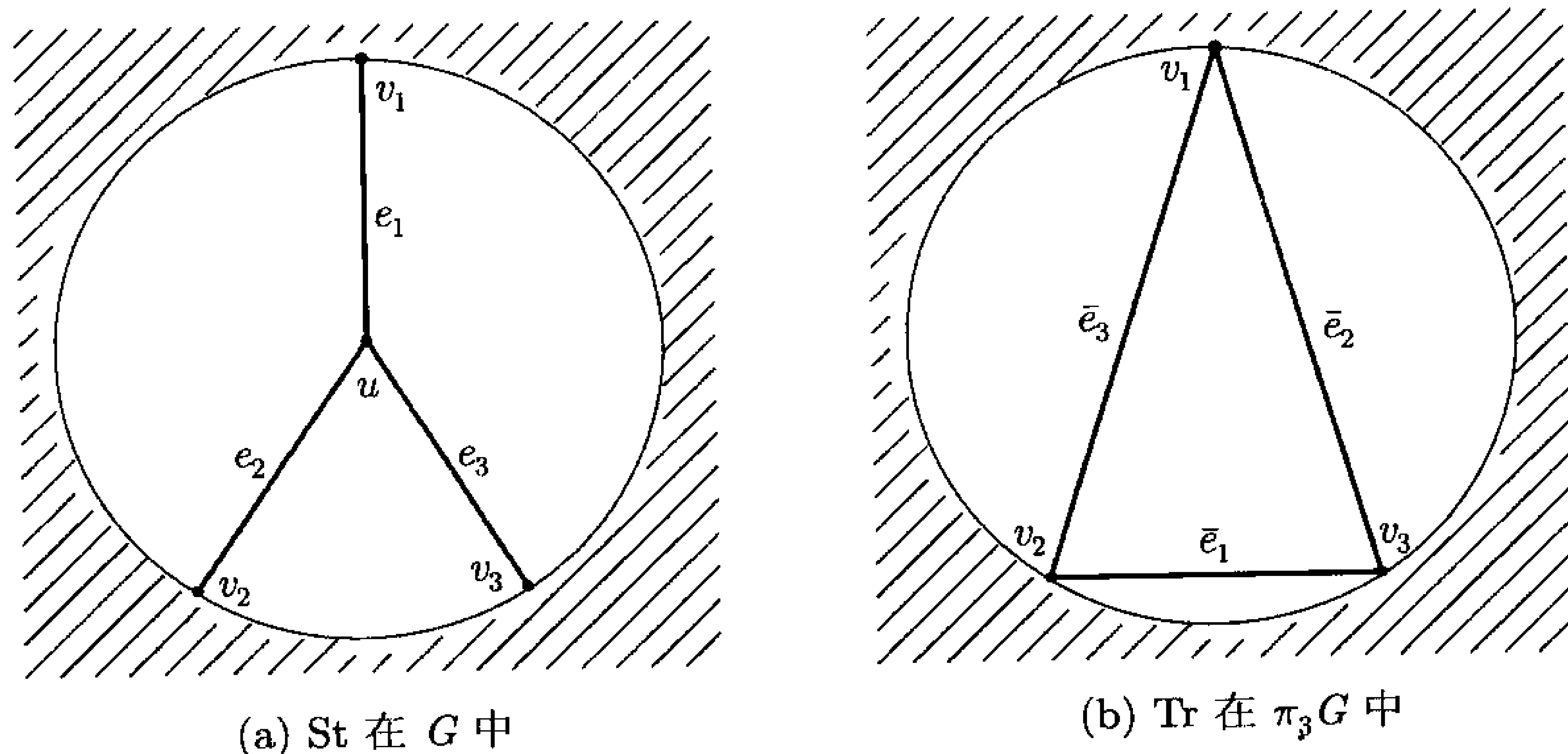
$$\begin{cases}A(e_1)=Y,A(e_2)=X,\\B(e_1)=X,B(e_2)=Y,\end{cases}$$

即得引理的结论. ♮

对于 π_3, 令 St 为以 u 为中心的星, $v_i(i=1,2,3)$ 为它的显节点且满足所需要的条件, 则 π_3G 有三角形 $\mathrm{Tr}=(v_1,v_2,v_3)$ 与之相应. 如果 $e_i=(u,v_i)(i=1,2,3)$ 为 G 中 St 上的边, 则有

$$w(v_1,v_2)=w(e_3),\quad w(v_2,v_3)=w(e_1),\quad w(v_1,v_3)=w(e_2).$$

这里, 可以记 $\bar{e}_1=(v_2,v_3)$, $\bar{e}_2=(v_1,v_3)$, $\bar{e}_3=(v_1,v_2)$ 分别为 π_3G 中 Tr 上的边, 如图 17.4.1 所示.



(a) St 在 G 中　　(b) Tr 在 π_3G 中

图 17.4.1

为简便起见, 令

$$
\begin{cases}
G_0 = G - u, \\
G_1 = ((G - e_1) \cdot e_2) \cdot e_3, \\
G_2 = \big((G \cdot e_1) - e_2\big) \cdot e_3, \\
G_3 = \big((G \cdot e_1) \cdot e_2\big) - e_3, \\
G_4 = \big((G \cdot e_1) \cdot e_2\big) \cdot e_3,
\end{cases}
\tag{17.4.7}
$$

则容易验证有

$$
\begin{cases}
\big((G - e_1) - e_2\big) - e_3 = \phi_1 + G_0, \\
\big((G - e_1) - e_2\big) \cdot e_3 = \big((G - e_1) \cdot e_2\big) - e_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \big((G \cdot e_1) - e_2\big) - e_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = G_0,
\end{cases}
\tag{17.4.8}
$$

其中, ϕ_1 为这个平凡图.

由 (17.4.1) 式、(17.4.7) 和 (17.4.8) 式, 用常规的计算, 将 $\Phi(G)$ 用 $\Phi(G)_i(i = 0,1,2,3,4)$ 表示, 即可得

$$
\Phi(G) = \sum_{i=0}^{4} \Lambda_i \Phi(G_i),
\tag{17.4.9}
$$

其中

$$
\Lambda_0 = \prod_{i=1}^{3} A(e_i) + A(e_1)A(e_2)B(e_3) + A(e_1)B(e_2)A(e_3) + B(e_1)A(e_2)A(e_3),
$$

$$
\Lambda_1 = A(e_2)B(e_2)B(e_3), \quad \Lambda_2 = B(e_1)A(e_2)B(e_3),
$$

$$
\Lambda_3 = B(e_1)B(e_2)A(e_3), \quad \Lambda_4 = \prod_{i=1}^{3} B(e_i).
$$

类似地, 由于 $\bar{e}_i(i = 1,2,3)$ 为在 $\pi_3 G$ 的三角形 Tr 中与 G 中 St 的边 e_i 相应, 考虑到关系

$$
\begin{cases}
\big((\pi_3 G - \bar{e}_1) - \bar{e}_2\big) - \bar{e}_3 = G_0, \\
\big((\pi_3 G - \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2\big) - \bar{e}_3 = G_2, \\
\big((\pi_3 G \cdot \bar{e}_1) - \bar{e}_2\big) - \bar{e}_3 = G_1, \\
\big((\pi_3 G - \bar{e}_1) - \bar{e}_2\big) \cdot \bar{e}_3 = G_3
\end{cases}
\tag{17.4.10}
$$

和关系

$$
\begin{aligned}
\big((\pi_3 G - \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2\big) \cdot \bar{e}_3 &= \big((\pi_3 G \cdot \bar{e}_1) - \bar{e}_2\big) \cdot \bar{e}_3 \\
&= \big((\pi_3 G \cdot \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2\big) - \bar{e}_3 \\
&= \big((\pi_3 G - \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2\big) \cdot \bar{e}_3 \\
&= G_4,
\end{aligned}
\tag{17.4.11}
$$

可以将 $\Phi(\pi_3 G)$ 也用 $\Phi(G_i)(i=0,1,2,3$ 和 $4)$ 表示, 即可得

$$\Phi(\pi_3 G)=\sum_{i=0}^{4}\Lambda_i^-\Phi(G_i), \tag{17.4.12}$$

其中

$$\Lambda_0^- =\prod_{i=1}^{3}B(\bar e_i),\quad \Lambda_1^- = A(\bar e_1)B(\bar e_2)B(\bar e_3),$$

$$\Lambda_2^- = B(\bar e_1)A(\bar e_2)B(\bar e_3),\quad \Lambda_3^- = B(\bar e_1)B(\bar e_2)A(\bar e_3),$$

$$\begin{aligned}L_{a4}^- =&B(\bar e_1)A(\bar e_2)A(\bar e_3)+A(\bar e_1)B(\bar e_2)A(\bar e_3)\\&+A(\bar e_1)A(\bar e_2)(X+Yz)^{w(\bar e_3)}(Xz+Y)^{\bar w(\bar e_3)}.\end{aligned}$$

引理 17.4.4　对 π_3, Φ 是不变的当且仅当

$$X^2+Y^2+XYz=0. \tag{17.4.13}$$

证　由 (17.4.9) 式和 (17.4.12) 式, 从对偶性所确定的关系

$$A(\bar e_i)=B(e_i),\ B(\bar e_i)=A(e_i),\quad i=1,2,3,$$

若记 $\Delta\Phi=\Phi(G)-\Phi(\pi_3 G)$, 则有

$$\Delta\Phi=\sum_{i=0}^{4}\Delta_i\Phi(G_i),$$

其中 $\Delta_i=\Lambda_i-\Lambda_i^-$, $i=0,1,2,3$ 和 4.

由于

$$\begin{cases}\Delta_1=A(e_1)B(e_2)B(e_3)-A(e_1)B(e_2)B(e_3)=0,\\ \Delta_2=B(e_1)A(e_2)B(e_3)-B(e_1)A(e_2)B(e_3)=0,\\ \Delta_3=B(e_1)B(e_2)A(e_3)-B(e_1)B(e_2)A(e_3)=0,\end{cases}$$

则有

$$\Phi(G)-\Phi(\pi_3 G)=\Delta_0\Phi(G_0)+\Delta_4\Phi(G_4), \tag{17.4.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_0 =&z\prod_{i=1}^{3}A(e_i)-\prod_{i=1}^{3}B+A(e_1)A(e_2)B(e_3)\\&+A(e_1)B(e_2)A(e_2)+B(e_1)A(e_2)A(e_3),\\ \Delta_4 =&+A(e_1)A(e_2)(X+Yz)^{w(e_3)}(Xz+Y)^{\bar w(e_3)}\\&-B(e_1)A(e_2)A(e_3)-A(e_1)B(e_2)A(e_3).\end{aligned}$$

由 π_3 的定义中上交叉与下交叉之间的对称性, 只要考察如下两种情形即可:

情形 1 $w(e_1)=0, w(e_2)=1, w(e_3)=0$. 由关系

$$\begin{cases} A(e_1)=X,\ A(e_2)=Y,\ A(e_3)=X, \\ B(e_1)=Y,\ B(e_2)=X,\ B(e_3)=Y \end{cases}$$

有 (17.4.14) 式变为

$$\begin{aligned}\Phi(G)-\Phi(\pi_3G)=&(X^2Yz-XY^2+XY^2+X^3+XY^2)\Phi(G_0)\\ &-\big(XY^2+X^3-XY^2+XY(Xz+Y)\big)\Phi(G_4)\\ =&(X^2Yz+XY^2+X^3)\big(\Phi(G_0)-\Phi(G_4)\big).\end{aligned}$$

情形 2 $w(e_1)=0, w(e_2)=0, w(e_3)=1$. 由关系

$$\begin{cases} A(e_1)=X,\ A(e_2)=Y,\ A(e_3)=Y, \\ B(e_1)=Y,\ B(e_2)=X,\ B(e_3)=X \end{cases}$$

可得 (17.4.14) 式变为

$$\begin{aligned}\Phi(G)-\Phi(\pi_3G)=&\,(XY^2z-X^2Y+X^2Y+X^2Y+Y^3)\Phi(G_0)\\ &-\big(Y^3+X^2Y-X^2Y+XY(X+Yz)\big)\Phi(G_4)\\ =&\,(XY^2z+X^2Y+Y^3)\big(\Phi(G_0)-\Phi(G_4)\big).\end{aligned}$$

综合上述两种情形即得

$$\begin{aligned}\Phi(G)-\Phi(\pi_3G)=&\delta(X,Y)(XYz+X^2+Y^2)\\ &\times\big(\Phi(G_0)-\Phi(G_4)\big),\end{aligned}\tag{17.4.15}$$

其中

$$\delta(X,Y)=\begin{cases} X, & \text{情形 } 1, \\ Y, & \text{情形 } 2, \end{cases}$$

从而引理得证.

对于边上带二元权的平面图 G, 令

$$\Phi(x;G)=\Phi(G)|_{X=x,Y=\frac{1}{x},z=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)},\tag{17.4.16}$$

则由引理 17.4.1, $\Phi(x;G)$ 是一个单变元 x 的多项式.

定理 17.4.1 对于边带二元权的平面图 G, 多项式 $\Phi(x;\,G)$ 是正则等价类的一个不变量.

证　这是引理 17.4.3 和引理 17.4.4 的直接结果. ♮

根据引理 17.2.3, 只要注意到如图 17.4.2 所示, 在一个链的全影上二重点处的运算 sp1, sp2 和它们的逆对应在 ESF 图上的去边和收缩边于一点和它们的逆, 以及在一个链形式中的每个交叉点处均有两个状态, 如图 17.4.3 所示, 即可从 17.2 节中所描述的, 对于图的初等运算与对于链形式的 Reidemeister 运算之间的联系发现, 对于链 L 的一个 X, Y 和 z 的多项式 $\Phi(L)$ 与 $\Phi(G)$ 相对应.

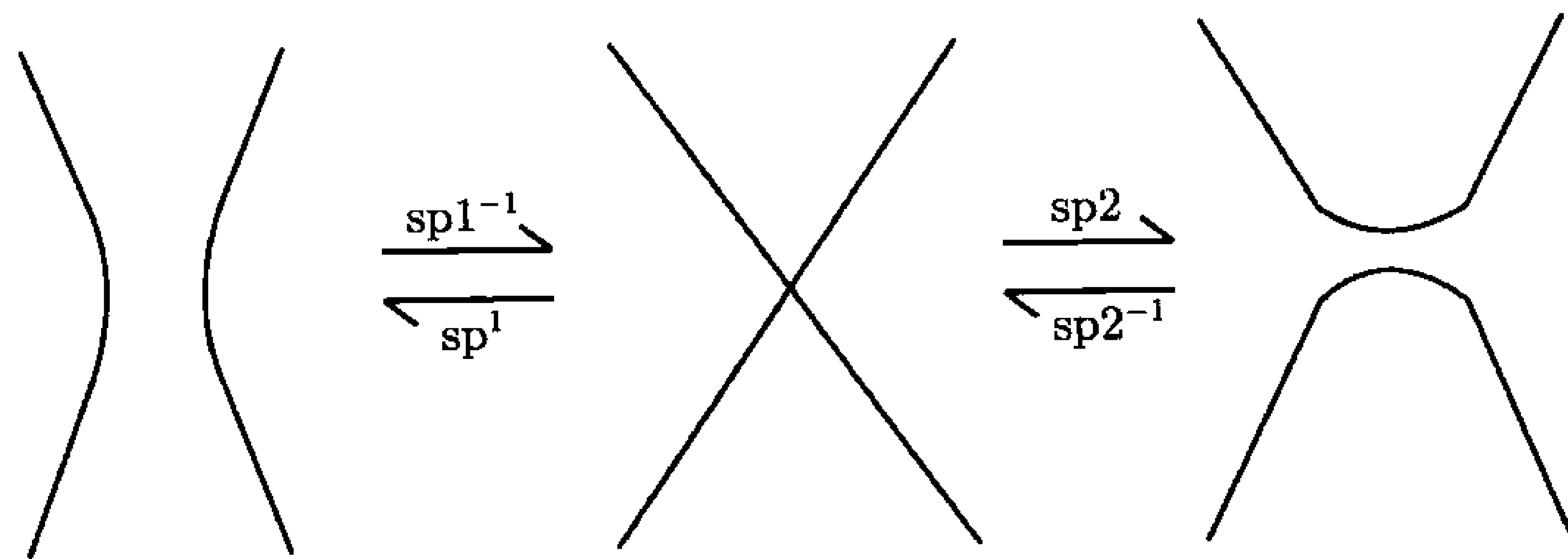


图 17.4.2

类似地, 令

$$\Phi(x;L) = \Phi(L)\Big|_{X=x, Y=\frac{1}{x}, z=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}, \tag{17.4.17}$$

则有如下的推论:

推论 17.4.1　多项式 $\Phi(x;K)$ 是纽结 K 的一个正则同痕型的不变量. ♮

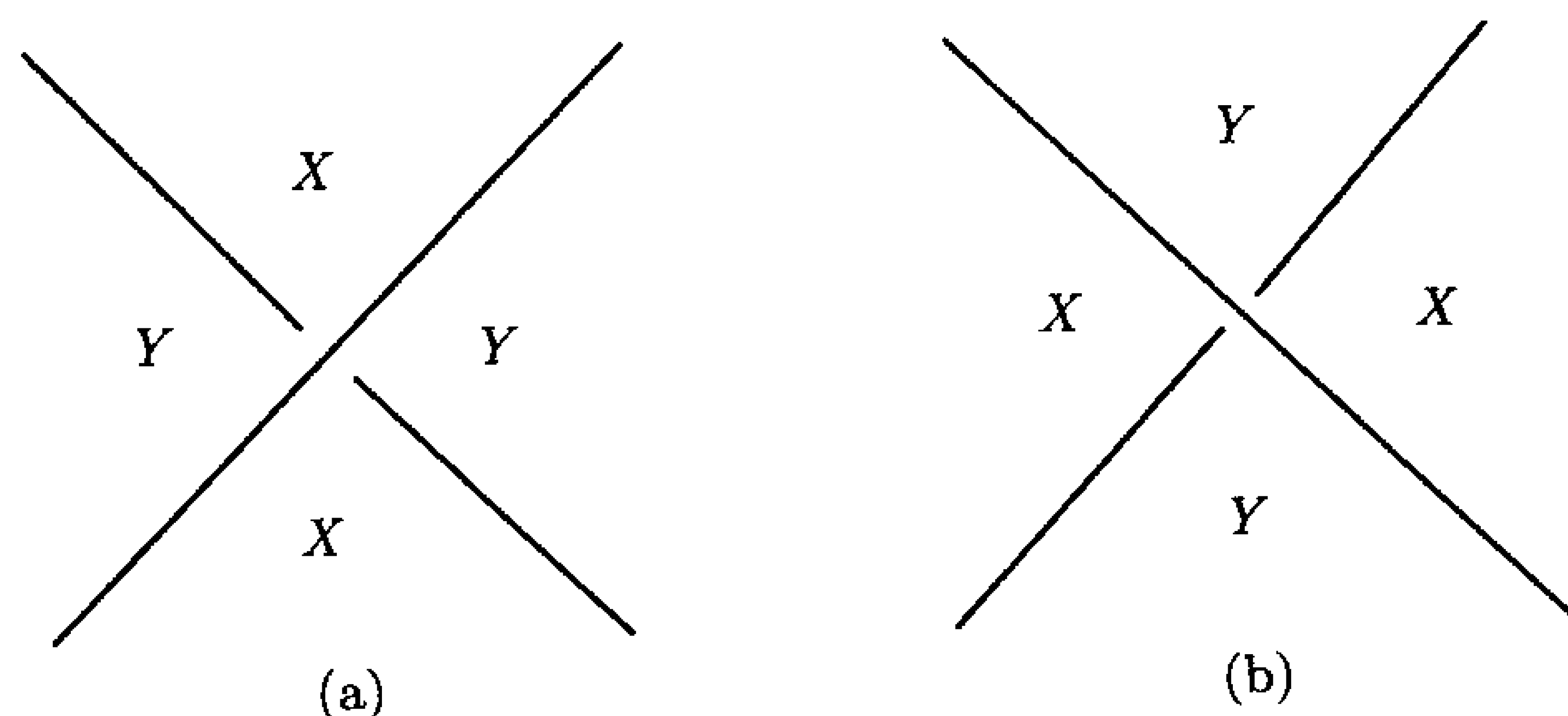


图 17.4.3

17.5　Jonse 多项式

由引理 17.4.2, $\Phi(x;G)$ 显然并不是带二元权的平面图的旋转等价类的一个不变量. 然而, 可以引进

$$\Psi(G) = (-Y)^{c_0-2c_1}(-X)^{c_1-2c_0}\Phi(G), \tag{17.5.1}$$

其中 c_0 和 c_1 分别为带权 0 和 1 的边数, 则 Ψ 将会变为旋转等价类的一个不变量.

引理 17.5.1 多项式 $\Psi(G)$ 在关系 (17.3.6) 之下对于 π_1 是不变的.

证 只讨论在 π_1 作用下的边 e 的权为 1 的情形. 当然, 权为 0 的情形可以类似地得到. 由于 e 的权为 1, 则有

$$c_0(\pi_1 G) = c_0(G), \quad c_1(\pi_1 G) = c_1(G) - 1.$$

由 (17.3.4) 式可以看出

$$\begin{aligned}\Psi(G) =&(-Y)^{c_0(G)-2c_1(G)}(-X)^{c_1(G)-2c_0(G)}(X+Yz)\Phi(\pi_1 G)\\ =&(-Y)^{c_0(\pi_1 G)-2c_1(\pi_1 G)-2}(-X)^{c_1(\pi_1 G)+1-2c_0(\pi_1 G)}(X+Yz)\Phi(\pi_1 G).\end{aligned}$$

由 (17.3.6) 式中的条件有

$$X + Yz = -Y^2 X^{-1},$$

从而

$$\begin{aligned}\Psi(G) &= (-Y)^{c_0(\pi_1 G)-2c_1(\pi_1 G)}(-X)^{c_1(\pi_1 G)-2c_0(\pi_1 G)}\Phi(\pi_1 G)\\ &= \Psi(\pi_1 G),\end{aligned}$$

即得引理的结论. ♮

引理 17.5.2 多项式 $\Psi(G)$ 在 (17.3.6) 式中的关系下对于 π_2 是不变的.

证 因为 G 总有一边权为 0 和一边权为 1, 在 $\pi_2 G$ 中的权为 0 和 1 的边数比 G 中的均多 1. 由引理 17.3.3 有

$$\begin{aligned}\Psi(G) &= (-Y)^{c_0(G)-2c_1(G)}(-X)^{c_1(G)-2c_0(G)}\Psi(G)\\ &= (-Y)^{+1-2}(-X)^{+1-2}\Psi(\pi_2 G).\end{aligned}$$

由 (17.3.6) 式中的第一个关系,

$$\Psi(G) = \Psi(\pi_2 G).$$

引理得证. ♮

引理 17.5.3 多项式 $\Psi(G)$ 在 (17.3.6) 式中的关系下对 π_3 是不变的.

证 因为在 π_3 之下, 不改变图中权为 0 或权为 1 的边数, 由引理 17.3.4, 即得引理的结论. ♮

对于边上带二元权的平面图 G, 令

$$\Psi(x;G) = \Psi(G)\Big|_{X=x,Y=\frac{1}{x},z=-(x^2+\frac{1}{x^2})}. \tag{17.5.2}$$

定理 17.5.1 多项式 $\Psi(x;G)$ 是边带二元权平面图的旋转等价类的一个不变量.

证　这是引理 17.5.1～ 引理 17.5.3 的直接结果. ♮

与 (17.3.17) 式类似地, 令

$$\Psi(x;L) = \Psi(L)\Big|_{X=x, Y=\frac{1}{x}, z=-(x^2+\frac{1}{x^2})}, \tag{17.5.3}$$

则可得如下的推论:

推论 17.5.1　多项式 $\Psi(x;K)$ 对于纽结 K 是一个旋转同痕型的不变量.

17.6　注　　记

(1) 由 (17.3.17) 式所定义的多项式 $\Phi(x;K)$, 实际上就是由 Kauffman 引进的括弧多项式, 参见文献 (Kauffman, L.H.[1]). 由推论 17.3.1 又得到了括弧多项式对于纽结是一个正则同痕型的不变量.

(2) 由 (17.3.20) 式所定义的多项式 $\Psi(x;K)$ 就是 Jones 多项式 $V_K(t)$, 其中 $t=Y^2X^2$. 这样, 推论 17.3.2 又一次显示了 Jones 多项式对于纽结是一个旋转同痕型的不变量.

(3) 首先注意到 Tutte 于 20 世纪 50 年代所发现的, 在图论中被人们称为 Tutte 多项式, 以及 Jones 于 20 世纪 80 年代发现的拓扑学中的对于纽结的多项式, 被人们称为 Jones 多项式之关系的, 应归功于 Thistlethwaite, M.B.[1].

事实上, 不管是 Jones 多项式还是括弧多项式, 如 17.3 节中所述, 均满足与 Tutte 多项式具有类似类型的递推关系式.

进而, 它们也同 Tutte 多项式一样, 有相应的按支撑树的展开式. 这种展开式也是 Tutte 于 20 世纪 50 年代发现的, 参见文献 (Tutte, W.T.[13]). 通过纽结的形式研究纽结的基本理论是于 20 世纪 30 年代由 Reidemeister 建立的, 并引进三种运算, 参见文献 (Reidemeister, K.[1]). 这就使得能够将这个拓扑学中的问题转化为图论中的问题.

(4) 在纽结的研究中, 绕过纽结形式和 Reidemeister 运算, 而使用拓扑变换的方法是最古老的和也许是更为成功的. 这种方法是基于纽结在三维空间中的补. 自然要问是否纽结可以由它的补所确定. 人们猜想是肯定的. 然而, 直到 1989 年, 这个猜想才被证实, 参见文献 (Gonzalez, T.F.-S.L. Lee[1]). 关于对纽结群的讨论, 可参考这方面的入门教科书 (Crowell, R.H.-R.H. Fox[1]).

(5) 关于纽结理论在统计力学和量子场论中的应用, 可参见文献 (Baxter, R.J.[1], Witten, E.[1]).

(6) 纽结的分类仍是当今公开的问题. 虽然 Jones 多项式和括弧多项式被视为纽结理论中现今颇为重要的进展, 但它们均非完全不变量, 也就是说, 不能用它们区别不同的旋转同痕和正则同痕型. 与此相应地, 也有平面图中的分类问题.

参考文献

Abrams, L.-D.C. Slilaty

[1] An algebraic characterization of projective-planar graphs, Manus-cript, 2002. Published in *J. Graph Theory*, **42**(2003), 320–331.

Agoston, M.K.

[1] *Algebraic Topology: A First Course*, Dekker, New York, 1976.

Aho, A.V.-J.E. Hopcroft-J.D. Ullman

[1] *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, 1974.

Akers, S.B.-F.O. Hadlook

[1] Graph theory models of electrical networks and their minimum cross-over layouts, presented at the Conf. Graph Theory Comput., Kingston, Jamaica, 1969.

Aksionov, V.A.-L.S. Melnikov

[1] Some counterexamples associated with the three color problem, *J. Comb. Theory*, **B28** (1980), 1–9.

Albertson, M.O.

[1] A lower bound for the independence number of a planar graph, *J. Comb. Theory*, **B20** (1976), 84–93.

Alekseev, V.B.-V.S. Gonchakov

[1] Thickness of arbitrary complete graphs, *Mat. Sbornik*, **101** (1976), 212–230.

Alexandroff, P.S.

[1] *Combinatorial Topology* I and II, Greylock, Rochester, 1957.

Allaire F.-E.R. Swart

[1] A systematic approach to the determination of reducible configurations in the four color conjecture, *J. Comb. Theory*, **B25** (1978), 339–362.

Appel, K.-W. Haken

[1] The existence of unavoidable sets of geographically good configurations, *Illinois J. Math.*, **20** (1976), 218–297.

[2] Every planar map is four colorable I: discharging, *Illinois J. Math.*, **21** (1977), 429–490.

[3] An unavoidable set of configurations in planar triangulations, *J. Comb. Theory*, **B26** (1979), 1–21.

Appel, K.-W. Haken-J. Kock

[1] Every planar map is four colorable II: reducibility, *Illinois J. Math.*, **21** (1977), 491–567.

Appel, K.-W. Haken-J. Mayer

[1] Triangulations a v_5 separes dans le probleme des quatre couleurs, *J. Comb. Theory*, **B27** (1979), 135–150.

Archdeacon, D.

[1] A Kuratowski theorem for the projective plane, *J. Comb. Theory*, **5** (1981), 243–246.

Archdeacon, D.-P. Huneke

[1] A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces, *J. Comb. Theory*, **B46** (1989), 173–231.

[2] On cubic graphs which are irreducible for non-orientable surfaces, *J. Comb. Theory*, **B39** (1985), 233–264.

Archdeacon, D.-J. Siran

[1] Characterizing planarity using theta graphs, *J. Graph Theory*, **27**(1998), 17–20.

Auslander, L.-T. Brown-J.W.T. Youngs

[1] The imbedding of graphs in manifolds, *J. Math. Mech.*, **12**:4 (1963), 229–234.

Auslander, L.-S.V. Parter

[1] On imbedding graphs in sphere, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 517–523.

Ball, W.W.R.

[1] *Mathematical Recreations and Essays*, Macmillan, 1956.

Bari, B.R.

[1] Absolute reducibility of maps at most 19 regions, Thesis, John Hopkins, 1966.

Basden, A.-K.G. Nichols

[1] New topological method for layout printed circuits, *Proc. IEEE*, **120** (1973), 3: 325–328.

Batini, C.-M. Talamo-R. Tamassia

[1] Computer aided layout of entity-relationship diagrams, *IEEE J. Syst. Software*, **4** (1984). 163–173

Battle, J.-F. Harary-Y. Kodama

[1] Every planar graph with nine points has a non-planar complement, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68**(1962), 569–571.

Battle, J.-F. Harary-Y. Kodama-J.W.T. Youngs

[1] Additivity of the genus of a graph , *Bull. Amer. Math. Soc.*(N.S.), **68**(1962), 565–568.

Baubock, E.

[1] Ein Verfahren zur Abbildung eines planaren Graphen mit zyklisch geor-dneter Nachbarschaften in der Ebene, *Angew. Inform.*, **1** (1978), 9–14.

Baxter, R.J.

[1] *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Acad.Press, 1982.

Becker, B.

[1] Uber die kreuzungsfreie, rechtwinklige Einbettung von gewi- chteten Graphen in die Ebene, Ph.D. Dissertation, Uni. Saarlardes, 1982

Becker, B.-G. Hotz

[1] On the optimal layout of planar graphs with fixed boundary, *SIAM J. Comput.*, **16** (1987), 946–972.

Behzao, M.

[1] A criterion for the planarity of the total graph of a graph, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **63** (1967), 679–681.

Beineke, L.-F. Harary

[1] On the thickness of the complete graph, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 618–620.

[2] Inequalities involving the genus of a graph and its thickness, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **7**(1965), 19–21.

[3] The thickness of the complete graph, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 850–859.

Beineke, L.-F. Harary-J.W. Moon

[1] On the thickness of the complete bipartite graph, *Proc.Camb. Phil. Soc.*, **60**(1964), 1–5.

Belaga, E.G.

[1] On coloring the graph of a triangulation of the n-sphere, *Uspehi Mat. Nauk*, **28**:6 (1973), 191–192.

Bellman, R.-K.L. Cook-J.A. Lockett

[1] *Algorithms, Graphs, and Computers*, Acad. Press, 1970.

Beraha, S.-J. Kahane

[1] Is the four color conjecture almost false? , *J. Comb. Theory*, **B27** (1979), 1–12.

Beraha, s.-J. Kahane-N.J. Weiss

[1] Limits of zeroes of recursively defined families of polynomials, in Studies in Foundations and Combinatorics, *Advances in Mathematics*, Supplementary Studies, Vol.**1** (ed. by G. C. Rota), 213–232, Acad. Press, 1978.

[2] Limits of zeroes of recursively defined polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **72** (1975), 4209.

Berge, C.

[1] *Graphs and Hypergraphs*, North - Holland, 1973.

Berman, G.-W.T. Tutte

[1] The golden root of a chromatic polynomial, *J. Comb. Theory*, **6** (1969), 301–302.

Berman, K.

[1] Three-coloring of planar 4-valent maps, *J. Comb. Theory*, **B30** (1981), 82–88.

[2] Bicycles and spanning trees, *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.*, **7** (1987), 1–12.

Bernhart, F.R.

[1] The four-color theorem proved by multi-linear algebra, Proc. Conf. Algeb. Aspects Comb., Util. Math. Pub., 1975, 219–226.

[2] Six rings in minimal five color maps, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 391–412.

[3] Another reducible edge configuration, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 144–146.

Bhatt, S.N.-F.T. Leighton

[1] A framework for solving VLSI graph layout problems, *J. Comput. Syst. Scien.*, **28** (1984), 300–343.

Biggs, N.

[1] *Algebraic Graph Theory*, Cambridge Uni. Press, 1974.

Biggs, N.L.-G.H.J. Meredith

[1] A theorem on planar partitions, Proc. 5-th British Comb. Conf., Aberdeen, 1975, 73–78.

Birkhoff, G.D.

[1] The reducibility of maps, *Amer, J. Math.*, **35** (1913), 115–128.

Birkhoff, G.D.-D.C. Lewis

[1] Chromatic polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 355–455.

Bixby, R.E.

[1] Kuratowski's and Wagner's theorem for matroids, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 31–53.

Blazek, J.-M. Koman

[1] A minimal problem concerning complete plane graphs, Proc. Symp. Simolenice, 1963, 113–117.

Bondy, J.A.-U.S.R. Murty

[1] *Graph Theory with Applications*, Macmillan, 1976.

Bose, N.K.-K.A. Prabhu

[1] Thickness of graphs with degree constrained vertices, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case-**24**:4(1977), 184–190.

Bouchet, A.

[1] Caracterisation des symboles croises de genre nul., *C.R.Acad. Sci. Paris*, t.**274** (1972), 724–727.

Braun, D.-*et al*

[1] Techniques for multilayer channel routing, *IEEE Trans.CAD*, **7** (1988), 698–712.

Brehaut, W.M.

[1] On planar graphs and the plainer non-planar graphs, Doct. Dissertation, Uni. Waterloo, 1974.

[2] Finding a mesh of a planar graph, Conf. Comput. Algeb. Number Theory, Uni. New Brunswick, Fredericton, 1975, 25–28.

[3] Efficient planar embedding, Proc. 7-th S-E Conf. Comb. Graph Theory Comput., 1976, 177–190.

Brooks, R.L.-C.A.B. Smith-A.H. Stone-W.T. Tutte

[1] The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 312–340.

Bruno, J.-K. Steiglitz-L. Weinberg

[1] A new planarity test based on 3-connectivity, *IEEE Tans. Cir. Theory*, CT-**17**:2 (1970), 197.

Capobianco, M.-J.C. Molluzzo

[1] *Examples and Counterexamples*, North-Holland, 1978.

Catlin, P.A.

[1] Hajos graph-coloring conjecture: variation and counterexamples, *J. Comb. Theory*, **B26** (1979), 268–274.

Cayley, A.

[1] A theorem on trees, *Quart. J. Math.*, **23** (1889), 376–378.

Chai, Z.(柴钊)-Y.P. Liu

[1] 最大面次为 6 图的上可嵌入性, 北京交通大学学报, **26** (2005), 94-97.

Chan, S.P.

[1] *Introductory Topological Analysis of Electrical Networks*, Holt, 1969.

Chen, J.E.(陈建二)-J.L. Gross-R. G. Rieper

[1] Overlap matrices and total imbedding distributions, *Discrete Math.*, **128** (1994), 73–94.

Chen, Y.C.(陈仪朝)-Y.P. Liu

[1] Maximum genus, girth and maximum non-adjacent edge set, *Ars Combin.*, **79** (2006), 145–159.

[2] Up-embeddability of a graph by order and girth, *Graphs and Combin.*, **23** (2007), 521-527.

Chen, Y.C.-Y.P. Liu-R.X. Hao

[1] Structure for a graph with average genus, *J. Appl. Math.& Comput.*, **21** (2006), 45–55.

Chen, W.K.

[1] *Applied Graph Theory*, North-Holland, 1971.

[2] On vector spaces associated with a graph, *SIAM J. Appl. Math.*, **20** (1971), 526–529.

Chen, R.W.-Y. Kajitani-S.P. Chan

[1] A graph-theoretic via minimization algorithm for two-layer printed circuit boards, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case-**30** (1983), 284–299.

Chew, L.P.

[1] There are planar graphs almost as good as the complete graph, *J. Comput. Syst. Sci.*, **39** (1989), 205–219.

Chojnacki, H.

[1] A contribution to the four color problem, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 36–54.

Chua, L.O.-L.K. Chen

[1] On optimally sparse cycle and coboundary basis for a linear graph, *IEEE Trans. Cir. Theory*, CT-**20** (1973), 495–503.

Chung, F.R.K.(金芳蓉)-F.T. Leighton-A.L. Rosenberg

[1] Embedding graphs in books: a graph layout problem with applications to VLSI design, *SIAM J. Algeb. Discrete Methods*, **8** (1987), 33–58.

Clarke, E.M.-Y. Feng

[1] Escher-a geometrical layout system for recursively defined circuits, *IEEE Trans. CAD*, **7** (1988), 908–918.

van Cleemput, W.M.

[1] Mathematical models for the circuit layout problem, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case-**23**: 12 (1976), 759–767.

van Cleemput, W.M.-J.G. Linders

[1] An improved graph theoretical model for the circuit layout problem, Proc. 11-th Design Automation Workshop, Denver, 1974.

Cohoon, J.P.-P.L. Heck

[1] BEAVER: a computational geometry based tool for switchbox routing, *IEEE Tans. CAD*, **7** (1988), 684–697.

Cong, J.-D.F. Wong-C.L. Liu

[1] A new approach to three or four layer channel routing, *IEEE Trans. CAD*, **7** (1988), 1094–1104.

Cook, S.A.

[1] The complexity of theorem proving procedures, Proc. 3-rd ACM Symp. Comput., 1971, 151–158.

Cori, R.

[1] *Graphes Planaires et Systemes de Parentheses*, Doct. Thesis, Paris, 1969.

Cori, R.-A. Machi

[1] Note: construction of maps with prescribed automorphism group, *Theoret. Comput. Sci.*, **21** (1982), 91–98.

[2] Flows on hypermaps, *Glasgow Math. J.*, **30** (1988), 17–29.

Courant, R.-H. Robbins

[1] *What is Mathematics*, Oxford Uni. Press, 1941.

Coxeter, H.S.M.

[1] *Regular Polytopes*, 3-rd Edition, Dover, 1973.

Crapo, H.H.-G.C. Rota

[1] *On the Foundation of Combinatorial Theory:Combinatorial Geometry*, M.I.T. Press, Cambridge, 1970.

[2] Simplicial geometries, *Amer. Math. Soc. Symp.*, **XIX** (1971), 71–75.

Cribb, D.W.-R.D. Ringeisen-D.R. Shier

[1] On cycle basis of a graph, *Cong. Numer.*, **32** (1981), 221–229.

Crowell, R.H.-R.H. Fox

[1] *Introduction to Knot Theory*, Springer, 1963.

Cui, X.F.(崔显峰)-Y.P. Liu

[1] 标准图纵横扩张的有效算法, 手稿, 1992.

Dai, W.W.M.-B. Eschermann-E.S. Kuh-M. Pedram

[1] Hierarchical placement and floorplanning in BEAR, *IEEE Tran.CAD*, **8** (1989) 1335–1349.

Dambit, Ja.

[1] Embedding of a graph into the plane, *Latvian Math.*, Yearbook **2** (1966), 79–93.

Dantzig, G.B.

[1] *Linear Programming and Extensions*, Princeton, 1963.

Dantzig, G.B.-A.J. Hoffman-T.C. Hu

[1] Triangulations(tiling) and certain block triangular matrices, *Math. Programming*, **31** (1985), 1–14.

Dehn, M.

[1] Uber Kombinatoriche Topologie, *Acta Math.*, **67** (1936), 123–168.

Demoucron, G.-Y. Malgrange-R. Pertuiset

[1] Graphes planaires, reconnaissance et construction de representations planaires topologiques, *Rev. francaise Recherche Operationnelle*, **8** (1964), 33–47.

Deo, N.

[1] Note on Hopcroft and Tarjan's planarity algorithm, *J. ACM* **33** (1976), 74–75.

[2] Minimum length fundamental cycle set, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, **26** (1979), 894–895.

Deo, N.-G.M. Prabhu-M.S. Krishnamoorthy

[1] Algorithms for generating fundamental cycles in a graph, *ACM Trans. Math. Software*, **8** (1982), 26–42.

Dixon, E.T.-S.E. Goodman

[1] An algorithm for the longest cycle problem, *Networks*, **6** (1976), 139–149.

Donaghey, R.

[1] Restricted plane tree representations of 4 M-C equations, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 114–121.

Dong, G.H.(董广华)-Y.P. Liu

[1] Results of the maximum genus of graphs, *Science in China*, **A50**(2007), 1563–1570.

[2] 关于一类新的上可嵌入图的研究, 北京交通大学学报, **32**(2008), 6: 81–83.

Du, D.(堵丁柱)-F.K. Hwang(黄光明)

[1] A proof of the Gilbert - Pollak conjecture on the Steiner ratio, *Algorithm*, **7** (1992), 121–135.

Du, D.-Y. Zhang

[1] On heuristics for minimum length rectilinear partitions, *Algorithmica*, **5** (1990), 111–128.

Duke, R.A.

[1] The genus, regional number and Betti number, *Canad. J. Math.*, **13** (1966), 817–822.

Edmonds, J.R.

[1] A combinatorial representation for polyhedral surfaces, *Notices AMS*, **7** (1960), 646.

Ehrlich, C.-S. Even-R.E. Tarjan

[1] Intersection graphs of curves in the plane, *J. Comb. Theory*, **B21**(1976), 8–21.

Engle, W.L.

[1] An algorithm for embedding graphs in the plane with certain constraints, *IEEE Trans. Cir. Theory*, CT-**17** (1970), 250–252.

[2] Theory of multiplane graphs, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case-**22** (1975), 2–8.

Engle, W.L.-D.A. Mylnski

[1] Topological synthesis procedure for circuit integration, *Proc. IEEE Int. Solid- State Cir. Conf.*, 1969, 138–139.

Errera, P.

[1] Une contribution au probleme des quatre couleurs, *Bull. Soc. Math. France*, **53** (1925), 42–55.

Fanelli, S.

[1] An unsolved conjecture on maximal planar graphical sequences, *Discrete Math.*, **36** (1981), 109–112.

Fary, I.

[1] On straight line representation of planar graph, *Acta Uni. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **11** (1948), 229–233.

Feng, Y.Q.(冯衍全)-Y.P. Liu(刘彦佩)-M.Y. Xu(徐明曜)

[1] On the isomorphisms of Cayley graphs of Abelian groups, *J. Combin. Theory*, **B86**(2002), 38–53.

Fiorini, S.

[1] On the chromatic index of outerplanar graphs, *J. Comb. Theory*, **B18** (1975), 35–38.

Fiorini, S.-R.J. Wilson

[1] *Edge-Colorings of Graphs*, Pitman, 1977.

Fisher, G.J.

[1] Computer Identification and Extraction of Planar Graphs, Eng. Sc. D. Dissertation, Columbia Uni., N. Y., 1965.

Fisher, G.J.-O. Wing

[1] Computer recognition and extraction of planar graphs from the incidence matrix, *IEEE Trans. Cir. Theory*, CT-**23**:2 (1966), 254–263.

Fisher, G.M.

[1] On the group of all homeomorphisms of a manifold, *Trans. AMS*, **97** (1960), 193–212.

Fisk, S.

[1] Geometric coloring theory (Part I), *Advances Math.*, **24** (1977), 298–340.

[2] Variation on coloring: surfaces and higher dimensional manifold (Part II), *Advances Math.*, **25** (1977), 226–266.

[3] Cobordism and functoriality of colorings (Part III), *Advances Math.*, **37** (1980), 177–211.

Fisk, C.J.-D.L. Caskey-L.L. West

[1] Automated circuit card etching layout, *Proc. IEEE*, **55** (1967), 1971–1982.

Fleischner, H.

[1] A note on line colorings of cubic graphs, *Arch.Math.*, (Brno) **10** (1975), 195–197.

Fletcher, A.J.

[1] Eureka: a system for laying out circuits using a single layer of interconnectors, Proc. Int. Conf. CAD, Uni. Southampton, 1972, 25–30.

Francis, G.K.

[1] Null genus realizibility criterion for abstract intersection sequences, *J. Comb. Theory*, **7** (1969), 331–341.

Fraysseix, H.-J. Pach-R. Pollack

[1] Small sets supporting Fary embeddings of planar graphs, IMA Preprint Series No. 387, 1988.

Fraysseix, H.-P. Rosenstiehl

[1] A depth - first search characterization of planarity, *Ann. Discrete Math.*, **13** (1982), 75–80.

[2] A characterization of planar graphs byTremaux order, *Combinatorica*, **5** (1985), 127–155.

Frederickson, G.N.

[1] Fast algorithms for shortest paths in planar graphs with application, *SIAM J. Comput.*, **16** (1987), 1004–1022.

Frederickson, G.N.-S.E. Hambrusch

[1] Planar linear arrangements of outerplanar graphs, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, **35**: 3 (1988), 323–333.

Frederickson, G.N.-R. Janardan

[1] Efficient message routing in planar networks, *SIAM J. Comput.*, **18** (1989), 843–875.

Friedel, J.-P. Widmayer

[1] A short proof of the Steiner ratio conjecture for five points, *SIAM J. Appl. Math.*, **49** (1989), 960–967.

Fu, C.(傅超)-Y.P. Liu(刘彦佩)

[1] 图的 k- 单圈划分中的优化问题, 运筹学学报, **6**(2002), No.2: 79–84.

[2] 一类 4- 正则图的最小折数纵横扩张, 曲阜师范大学学报(NS), **28**(2002), 2: 16–20.

Fulkerson, D.R.

[1] An out-of-kilter method for minimal cost flow problems, *SIAM J. Appl. Math.*, **9** (1961), 18–27.

Furst, M.L.-J.L. Gross-L.A. McGeoch

[1] Finding a maximum-genus graph embedding, *J. ACM*, **35** (1988), 523–534.

Garey, M.R.-D.S. Johnson

[1] Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP- Completeness, W. H. Freeman, 1979.

Gauss, C.F.

[1] Werke(Teubner, Leipzig), **272**(1900), 282–286.

Gerards, A.M.H.

[1] A short proof of Tutte's characterization of totally unimodular matrices, *Linear Algeb. Appl.*, **114/115** (1989), 207–212.

Gerez, S.H.-O.E. Herrmann

[1] Switchbox routing by stepwise reshaping, *IEEE Trans. CAD*, **8** (1989), 1350–1361.

Gibbs, N.E.

[1] Generation of all the cycles of a ration of all the cycles of a graph from a set of basic cycles, *Commun. ACM*, **18** (1975), 310.

[2] A cycle generation algorithm for finite undigraph, *J. ACM*, **16** (1969), 564–568.

Giblin, P.J.

[1] *Graphs, Surfaces and Homology* (An Introduction to Algebraic Topology), Chapman and Hall, 1977.

Glover, H.-J. Huneke

[1] Graphs with bounded valence that do not embed in projective plane, *Discrete Math.*, **18** (1977), 155–165.

[2] The set of irreducible graphs for the projective plane is finite, *Discrete Math.*, **22**(1978), 243–256.

Glover, H.-J. Huneke-C.S. Wang

[1] 103 graphs that are irreducible for the projective plane, *J. Comb. Theory*, **B27**(1979), 232–370.

Goldstein, A.J.

[1] An efficient and constructive algorithm for testing whether a graph can be imbedded in a plane, Graph Comb. Conf., Princeton Uni., 1963.

Goldstein, A.J.-D.G. Schweikert

[1] A proper model for testing the planarity of electrical circuits, *Bell Syst. Tech. J.*, **52** (1973), 135–142.

Golumbic, M.C.

[1] Comparibility graphs and a new matroid, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 68–90.

[2] *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Acad.Press, 1980.

Gonzalez, T.F.-S.L. Lee

[1] A linear time algorithm for optimal routing around a rectangle, *J. ACM*, **35** (1988), 810–831.

Gonzalez, T.F.-*et al*

[1] An approximation algorithm for the via placement and related problems, *IEEE Trans. CAD*, **8** (1989), 219–228.

Gonzalez, T.F.-S.Q. Zheng

[1] Approximation algorithms for partitioning a rectangle with interior points, *Algorithmica*, **5** (1990), 11–42.

Gordon, C. McA.-J. Luecke

[1] Knots are determined by their complements, *J. Amer.Math. Soc.*, **2** (1989), 371–415.

Goto, S.-E.S. Kuh

[1] An approach to the two-dimensional placement problems in the circuit layout, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case-**25** (1978), 208–214.

Grace, D.W.

[1] Computer search for non-isomorphic convex polyhedra, Tech. Rep.CS15, Comput. Sci. Dept., Stanford Uni., 1965.

Greenberg, M.J.

[1] *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, New York, 1967.

Gross, J.L.-T.W. Tucker

[1] *Topological Graph Theory*, John Wiley & Sons, 1987.

Grunbaum, B.

[1] Arrangements and Spreads, Reg. Conf. Ser. in Math. No.10, AMS, 1972.

[2] Shortness exponents of families of graphs, *J. Comb. Theory*, **14** (1973), 346–385.

Grunbaum, B.-G.C. Shephard

[1] The theorem of Euler and Eberhard for tilings of the plane, *Resultate Math.*, **5** (1982), 19–44.

Grunbaum, B.-J. Zaks

[1] The existence of certain planar maps, *Discrete Math.*, **10** (1974), 93–115.

Gustin, W.

[1] Orientable embedding of Cayley graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 272–275.

Hagerup, T.-M. Chrobak-K. Diks

[1] Optimal parallel 5–coloring of planar graphs, *SIAM J. Comput.*, **18** (1989), 288–300.

Haken, W.

[1] An existence theorem for planar maps, *J. Comb. Theory*, **14** (1973), 180–184.

Halin, R.

[1] Bemerkung uber ebene Graphen, *Math. Ann.*, **153** (1964), 38–46.

Hall, D.W.

[1] Coloring seven-circuits, in *Graphs and Combinatorics*, Springer, Vol. **406**, 1974, 273–290.

[2] On golden identities for constrained chromials, *J. Comb. Theory*, **11** (1971), 287–298.

Hall, D.W.-D.C. Lewis

[1] Coloring six - rings, *Amer. Math. Soc. Trans.*, **64** (1948), 184–191.

Hall, D.W.-J.W. Siry-B.R. Vanderslice

[1] The chromatic polynomial of the truncated icosahedron, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 620–628.

Hammer, P.L.(彼得 · 哈默)-Y.P. Liu(刘彦佩)

[1] 序关系与 0–1 规划问题 (in Chinese with English abstract) (I), 数学研究与评论, **8**: 2 (1988), 315–325.

[2] 序关系与 0–1 规划问题 (in Chinese with English abstract) (II), 数学研究与评论, **8**: 3 (1988), 481–489.

Hammer, P.L.-Y.P. Liu(刘彦佩)-B. Simeone(布鲁诺 · 席莫昂)

[1] 组合最优化中的布尔方法 (inChinese with English abstract) (I), 数学研究与评论, **10**: 2 (1990), 300–312.

[2] 组合最优化中的布尔方法 (inChinese with English abstract) (II), 数学研究与评论, **10**: 3 (1990), 455–468.

[3] 组合最优化中的布尔方法 (inChinese with English abstract) (III), 数学研究与评论, **10**: 4 (1990), 619–628.

Hansmann, E.C.-G. Lago-D.H. Dobbs

[1] Planar equivalent network for non-planar networks derived by matrix methods, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir. Syst., 1965, 844.

Hao, R.X.(郝荣霞)-W.L. He-Y.P. Liu-E.L. Wei

[1] The genus distributions for a certain type of permutation graphs in orientable surfaces, *Science in China*, **A50** (2007), 1748–1754.

Hao, R.X.-Y.P. Liu

[1] Evaluation of crossing numbers by applying auxiliary graphs, *J. Henan Normal Univ.*(NS), **30**(2002), 2: 7–13.

[2] The genus polynomials of cross ladder digraphs in orientable surfaces, *Scin. China*, **A50**(2008), 5: 889–896.

[3] The distribution of directed antiladders in orientable surfaces, *Applied Math. Letters*, **21**(2008), 161–164.

Harary, F.

[1] Recent progress in topological graph theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15**(1964), 405–412.

Harary, F.-R. Karp-W.T. Tutte

[1] A criterion for the planarity of the square of a graph, *J. Comb. Theory*, **2** (1967), 395–405.

Harary, F.-W.T. Tutte

[1] A dual form of Kuratowski's theorem, *Canad. J. Bull.*, **8** (1965), 17–20.

Hassian, R.

[1] Maximum flow in (s, t) planar networks, *Inform. Process. Lett.*, **13** (1981), 107.

[2] On multicommodity flows in planar graphs, *Networks*, **14** (1984), 225–235.

Hassian, R.-D.B. Johnson

[1] An $O(n \log^2 n)$ algorithm for maximum flow in undirected planar networks, *SIAM J. Comput.*, **14** (1985), 612–624.

He, D.(贺丹)-Y.P. Liu

[1] 一类图的序列性及其序列标号, 曲阜师范大学学报(自然科学版), **28** (2002), 4: 8–12.

[2] 树积序列性及序列标号, 北方交通大学学报, **27**(2003), 3: 46–49.

He, W.L.(何卫力)-Y.P. Liu

[1] 关于图的上可嵌入性的一个新的临域条件, 运筹学学报, **7**(2003), 92–96.

He, W.L.-Y.P. Liu-X. Ren(任翔)

[1] 图和它的补图的上可嵌入性, 北京交通大学, **32**(2008), 6: 78–80.

Heawood, P.J.

[1] Map colour theorem, *Quart. J. Math.*, **24** (1890), 332–338.

[2] On extended congruences connected with the four color theorem, *Proc. London Math. Soc.*, 2-nd Series **33** (1932), 253–266.

[3] Failures in congruences with the four color theorem, ibid., **40** (1936), 189–202.

[4] Note on a correction in a paper on map-congruences, *J. London Math. Soc.*, **18** (1943), 160–167.

[5] Note on a correction in a paper on map-congruences, ibid., **19** (1944), 18–22.

Heesch, H.

[1] Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, B. I. Hochschulskripten, 81a/ 810a/ 810b, Bibliog. Institute, Manuheim, 1969.

[2] Chromatic reduction of the triangulations $T_e, e = e_5 + e_7$, *J. Comb. Theory*, **13** (1972), 46–53.

Heffter, L.

[1] Ueber das Problem der Nachbargebiete, *Math. Ann.*, **38**(1891), 615–620.

Hell, P.

[1] Absolute planar retracts and the four color problem, *J. Comb. Theory*, **17** (1974), 5–10.

Hilbert, D.-S. Cohn-Vossen

[1] *Anschauliche Geometrie*, Julius Springer, 1932.

Hobbs, A.M.

[1] A survey of thickness, in *Recent Progress in Combinatorics*, ed. by W. T. Tutte, 1969, 255–264.

Hobbs, A.M.-G.W. Grossman

[1] A class of thickness-minimal graphs, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **72B** (1968), 145–153.

[2] Thickness and connectivity in graphs, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **72B** (1968), 239–244.

Holton, D.A.-B.D. McKay

[1] The smallest non-Hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices, *J. Comb. Theory*, **B45** (1988), 305–319. Erratum, in ibid., **B47** (1989), 248.

Hopcroft, J.

[1] An $n \log n$ algorithm for isomorphism of planar triply connected graphs, in *Theory of Machines and Computation*, ed. by Z. Kohavi et al, Acad. Press, 1971, 189–196.

Hopcroft, J.-R. Tarjan

[1] Planarity testing in $V \log V$ steps: extended abstract, Proc. IFIP Cong., 1971, 85–90.

[2] A V^2 algorithm for determining isomorphism of planar graphs, *Inform. Process. Lett.*, **1** (1971), 32–34.

[3] Isomorphism of planar graphs, in *Complexity of Computer Computations*, ed. by R. Miller et al, Plenum, 1972, 131–152.

[4] Dividing a graph into triconnected components, *SIAM J. Comput.*, **2** (1973), 135–158.

[5] Efficient planarity testing, *J. ACM*, **21** (1974), 549–568.

Hopcroft, J.E.-J.K. Wong

[1] Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (extended abstract), 6-th Ann. ACM Symp. Comput., Seattle, 1974.

Hope, A.K.

[1] A planar graph drawing program, *Software-Practice and Experience*, **1** (1971), 82–91.

Horton, J.D.

[1] A polynomial - time algorithm to find the shortest cycles basis of a graph, *SIAM J. Comput.*, **16** (1987), 358–366.

Hotz, G.

[1] The embedding of graphs in the 2 - sphere, *Z. Angew. Math. Mech.*, **45** (1965).

[2] Embedding of graphs in the plane, *Math. Ann.*, **167** (1966), 214–223.

Hu, T.C.(胡德强)

[1] Multicommodity network flows, *Oper. Res.*, **11** (1973), 344–360.

Hu, T.C.-S. E. Kuh

[1] Theory and concepts of circuit layout, in *VLSI Circuit Layout*: Theory and Design, IEEE Press, 1985, 3–18.

Huang Y.Q.(黄元秋)-Y.P. Liu

[1] On the average genus of 3-regular graphs, *Advances in Math.*, **31**(2002), 56–64.

[2] Maximum genus and maximum nonseparating independent set of a 3-regular graph, *Discrete Math.*, **176**, 149–158.

[3] Some classes of upper embeddable graph, *Acta Math. Scientia*, **17** (Supp.) (1997), 154–161.

[4] Maximim genus and 2-factors of graphs, *Chinese J. Contemp. Math.*, **18**, 425–434.

[5] Extensions on 2-edge connected 3-regular up-embeddable graphs, *Acta Math. Appl. Sinica*, **14**(1998), 337–346.

[6] Upper embeddability of graphs, *Scien. China*, **41A**(1998), 493–504.

[7] The maximum genus of graphs with diameter three, *Discrete Math.*, **194** (1999), 139–149.

[8] Face size and the maximum genus of graph— 1. Simple graphs, *J. Combin. Theory*, **80B**(2000), 356–370.

Huang, Y.Q.-Y.P. Liu-Y.M. Chu(褚玉明)

[1] 双向 2- 重迹与图的最大亏格, 数学物理学报, **24A**(2004), 530–536.

Huang, Y.Q.-Y.P. Liu-L. Tang(唐玲)

[1] 嵌入在克莱茵瓶上的图的最大亏格, 数学物理学报, **38A** (2008), 3: 403–411.

Hubicka, E.-M.M. Syslo

[1] Minimal basis of cycles of a graph, in *Recent Adv. in Graph Theory*, (ed. by M. Fiedler) Acad . Praha, 1975, 283–293.

Huneke, J.

[1] On the genus of a graph, *Proc. Symp. Pure Math.*, **24** (1979), 357–364.

Inukai, T.-L. Weinberg

[1] Planar, coplanar, and totally planar n-port networks, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case- **23** (1976).

Iri, M.

[1] *Network Flow, Transportation and Scheduling*, Acad. Press, 1969.

Itai, A.-C.H. Papadimitriou-J. L. Szwarcfiter

[1] Hamilton paths in grid graphs, *SIAM J. Comput.*, **11**:4 (1982), 676–686.

Itai, A.-Y. Shiloach

[1] Maximum flow in planar networks, *SIAM J. Comput.*, **8** (1979), 135–150.

Jaeger, F.

[1] Flows and generalized coloring theorems in graphs, *J.Comb. Theory*, **B26** (1979), 205–216.

Jayakumar, R.-K. Thulasiraman-M.N.S. Swamy

[1] Planar embeddings:Linear time algorithms for vertex placement and edge ordering, *IEEE Tran. Cir. Syst.*, **35**: 3 (1988), 334–344.

Jayakumar, R.-*et al*

[1] $O(n^2)$ algorithms for graph planarization, *IEEE Tran. CAD*, **8** (1989), 257–267.

Jiang, W.(姜伟)-Y.P. Liu

[1] 几类 4- 正则平面图的最小折数纵横扩张, 沈阳师范大学学报(NS), **25**(2007), 129–134.

Jones, V.F.R.

[1] A polynomial invariant for links via Von Neumann algebras, *Bull.Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 103–112.

Kampen, G.R.

[1] Orienting planar graphs, *Discrete Math.*, **14** (1976) 337–341.

Kapoor, S.-P. Ramanan

[1] Lower bounds for maximal and convex layers problems, *Algorithmica*, **4** (1989), 447–459.

Karp, R.M.

[1] Computational complexity of combinatorial problems, *Networks*, **5** (1975), 45–68.

Kauffman, L.H.

[1] New invariants in knot theory, *Amer. Math. Monthly*, **95**: 3 (1988), 195–243.

[2] A Tutte polynomial for signed graphs, *Discrete Math.*, **25** (1989), 105–127.

Kaufman, A.

[1] *Graphs, Dynamic Programming and Finite Games*, Acad. Press, 1967.

Kaufmann, M.

[1] A linear time algorithm for routing in a convex grid, *IEEE Tran. CAD*, **9** (1990), 180–184.

Kempe, A.B.

[1] On the geographical problem of the four colours, *Amer. J. Math.*, **2** (1879), 193–200.

Kirkpatrick, D.G.

[1] Optimal search in planar subdivision, *SIAM J. Comput.*, **12** (1983), 28–35.

Kleinert, M.

[1] The thickness of the n-dimensional cube, *J. Comb, Theory*, **3** (1967), 10–15.

Knauer, B.

[1] Normalformen planar graphen I, *Computing*, **10** (1972), 121–136.

[2] Normalformen planar graphen II, *Computing*, **10** (1972), 137–152.

[3] A simple planarity criterion, *J. ACM*, **22** (1975), 226–230.

Knuth, D.E.

[1] *The Art of Computer Programming*(Vol.3), Addison-Wesiey, 1973.

Kodres, U.R.

[1] Problem No.E1465, *Amer. Math. Monthly*, **68**(1961), 379.

[2] Logic circuit layout, Proc. Joint Conf. Math. CAD, Anaheim, CA, 1969, 165–191.

Kolasinska, E.

[1] On a minimum cycle basis of a graph, *Zastos. Mat.*, **16** (1980), 631–639.

Koppe, R.

[1] Automatische Abbildung eines planaren Graphen in die E-bene mit beliebig vorgebbaren Ortern der Knotenbilder, *Computing*, **20** (1978), 61–73.

Kotzig, A.

[1] Change graphs of edge-colorings of planar cubic graphs, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 26–30.

[2] Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations, in *Theory of Graphs* (eds. by Erdos *et al*), Proc. Colloq. Tikany, Hungary, 1964, 219–230.

Krentel, M.W.

[1] The complexity of optimization problems, *J. Comput. Syst. Sci.*, **36** (1988), 190–509.

Kung, J.P.S.

[1] *A Source Book in Matroid Theory*, Birkhauser, 1986.

Kuo, C.L.

[1] *Linear Network and System*, McGraw - Hill, 1967.

Kuratowski, K.

[1] Sur le Problem des Courbes Gauches en Topologie, *Fund. Math.*, **15** (1930), 271–283.

Lai, Y.T.-*et al*

[1] Algorithms for floorplan design via rectangular dualization, *IEEE Tran. CAD*, **7** (1988), 1278–1289.

Lan, P.T.(兰培挺)-Y.P. Liu

[1] 4- 正则图的纵横扩张优化, 周口师范学院学报, **23**(2006), 5:4–8.

Larson, J.A.

[1] Some graphs with chromatic number three, *J. Comb. Theory*, **B26** (1979), 317–322.

Larson, R.C.-V.O. Li

[1] Finding minimum rectilinear distance paths in the presence of barries, *Networks*, **11** (1981), 285–304.

Lawler, E.L.

[1] *Combinatorial Optimization*: Networks and Matroids, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

Lebesgue, H.

[1] Quelques consequences simples de la formule d'Euler, *J. de Math.*, **9** (1940), 27–43.

Lee, D.T.-F.P. Preparata

[1] Location of a point in a planar subdivision and its applications, 8-th Ann. ACM Symp. Comput., 1976, 231–235.

Lefschetz, S.

[1] Planar graphs and related topics, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **54** (1965), 1763–1765.

[2] Applications of Algebraic Topology: Graphs and Networks, Springer, 1975.

[3] *Algebraic Topology*, AMS, New York, 1942.

Lempel, A.-S. Even-I. Cederbaum

[1] An algorithm for planarity testing of graphs, in *Graph Theory* (ed. by P. Rosenstiehl), Proc. Inter. Symp., Rome, 1967, 215.

Lenganer, T.

[1] Hierarchical planarity testing algorithms, *J. ACM*, **36**(1989), 474–509.

Lerda, F.-E. Majoranic

[1] An algorithm for connecting n points with a minimum number of crossings, *Calcolo*, **1**(1964), 257–365.

Levinson, H.W.

[1] Planarity of Cayley diagrams, *Lect. Notes in Math.*, **303**, Graph Theory and Applications, Springer, 1972, 183–188.

Levow, R.B.

[1] On Tutte's algebraic approach to the theory of crossing numbers, Proc. 3-rd S-E Conf. Comb. Graph Theory Comput., 1972, 315–324.

Li, D.M.(李德明)-Y.P. Liu

[1] The maximum genus of a 3-regular simplicial graph, *Appl. Math. -JCU*, **14B**(1999), 203–214.

[2] A tight lower bound on the maximum genus of 3-edge connected loopless graphs, *Acta Math. Appl. Sinica*, **15**(1999), 361–367.

[3] A polynomial algorithm for finding the minimum feedback vertex set of a 3-regular simple graph, *Acta Math. Scientia*, **10B**(1999), 375–381.

[4] Maximum genus, girth and connectivity, *Europ. J. Comb.*, **21** (2000), 651–657.

[5] A tight lower bound on the maximum genus of a 3-connected loopless multigraph, *Appl. Math.-JCU*, **15B**(2000), 369–376.

[6] A relative maximum genus graph embedding and its local maximum genus, *Acta Math. Appl. Sinica*, **16Eng.**(2000), 366–372.

Li, L.F.(李立峰)-Y.P. Liu

[1] 一类三正则图的嵌入亏格分布, 北京交通大学学报, **28** (2005), 39–42.

Liggett, R.-W. Mitchell

[1] Optimal space planning in practice, *IEEE Trans. CAD*, **13** (1981), 277–288.

Lin, P.M.

[1] On methods of deleting planar graphs, Proc. 8-th Midwest Symp. Cir. Theory, Colorado State Uni., Boulder, 1965, 11–19.

Lipton, R.J.-R.E. Tarjan

[1] A separator theorem for planar graphs, *SIAM J.Appl.Math.*, **36** (1979), 177–189.

[2] Applications of a planar separator theorem, *SIAM J. Comput.*, **9** (1980), 615–627.

Lipton, R.J.-D.J. Rose-R.E. Tarjan

[1] Generalized nested dissection, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 177–189.

Liu, C.L.(刘炯朗)

[1] *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw Hill, 1968.

Liu, T.Y.(刘同印)-Y.P. Liu

[1] Near-triangulations of small circuit double cover with at most $n-2$, *J. Northern Jaotong Univ.*, **24**(2000), 65–67, 72.

[2] Strong embeddings of planar graphs on higher surfaces, *Acta Math. Scientia*, **22B**(2002), 542–548.

[3] On the crossing number of circular graphs, *OR Trans.*, **2**(1998), 32–38.

Liu, Y. P.(刘彦佩)

[1] 模 2 规划与平面嵌入, 应用数学学报, **1** (1978), 395–406.

[2] 图的平面性判定与平面嵌入, 应用数学学报, **2** (1979), 350–365.

[3] 平面图的理论与四色问题 I, 数学研究与评论, **3**(1983), 3: 122–136.

[4] 平面图的理论与四色问题 II, 数学研究与评论, **4**(1984), 1: 121–136.

[5] 平面图的理论与四色问题 III, 数学研究与评论, **5** (1985), 1: 125–144.

[6] 平面图的理论与四色问题 IV, 数学研究与评论, **5** (1985), 3: 123–136.

[7] 平面图的理论与四色问题 V, 数学研究与评论, **6** (1986), 2: 175–188.

[8] 图的不可定向最大亏格, 中国科学, 数学专辑, **I** (1979), 191–201.

[9] The maximum orientable genus of a graph, *Scientia Sinica*, Special Issue on Math., **II** (1979), 41–55.

[10] 若干典型图类的最大亏格, 数学学报, **24** (1981), 817–832.

[11] 关于 Edmonds 曲面对偶定理的一个注记, 运筹学杂志, **2**: 1 (1983), 62–63.

[12] 图 $K_n - K_3$ 的可定向亏格, 科学通报 (Chinese Ed.), **25** (1980), 959; 或*KEXUE TONGBAO* (English Ed.), **26** (1981), 188.

[13] 地图着色定理与图的曲面嵌入 I, 数学的实践与认识, No.1 (1981), 65–78.

[14] 地图着色定理与图的曲面嵌入 II, 数学的实践与认识, No.2 (1981), 59–69.

[15] 地图着色定理与图的曲面嵌入 III, 数学的实践与认识, No.3 (1981), 33–44.

[16] 地图着色定理与图的曲面嵌入 IV, 数学的实践与认识, No.4 (1981), 33–41.

[17] 地图着色定理与图的曲面嵌入 V, 数学的实践与认识, No.1 (1982), 34–44.

[18] 四色问题, 中国大百科全书, **数学卷** (1988), 623–624.

[19] On the linearity of testing planarity of a graph, Comb. Optim. CORR 84-5, University of Waterloo, 1984; Also in *Chinese Ann. Math.*, **7B** (1986), 425–434.

[20] Extending Kotzig's theorem into the non-orientable cases, Comb. Optim. CORR82-36, University of Waterloo, 1982.

[21] K-valent maps on the surfaces, Comb. Optim. CORR82-35, University of Waterloo, 1982; Also in *Acta Math. Appl. Sinica*, Eng. Series **1** (1984), 57–62.

[22] A new approach to the linearity of testing planarity of graphs, Report, Rutgers University, 1984; Also in *Acta Math. Appl. Sinica*, Eng. Series **4** (1988), 257–265.

[23] Boolean planarity characterization of graphs, RUTCOR Research Report RRR38-87, Rutgers University , 1987; Also in *Acta Math. Sinica*, New Series **4** (1988), 316–329.

[24] Boolean approach to planar embeddings of a graph, RUTCOR Research Report RRR 39-87, Rutgers University, 1987; Also in *Acta Math. Sinica*, New Series **5** (1989), 64–79.

[25] Boolean characterizations of planarity and planar embeddings of graphs, *Ann. Operations Research*, **24** (1990), 165–174.

[26] On the net-embeddability of graphs, RUTCOR Research Report RRR8-90, Rutgers University, 1990. Also in *Acta Math. Sinica*, New Series **8** (1992), 413–423.

[27] 图的网格可扩张性的有效识别, 科学通报, **38** (1993), 15–17. 或*Chinese Science Bulletin*, **38** (1993), 533–536.

[28] Some combinatorial optimization problems arising from VLSI circuit design, Research Report Series A, No.6, Department of Statistics, University "La Sapienza" of Rome, 1992. Also in *Applied Math.,* (A J. Chinese Unis.) **B8** (1993), 218–235.

[29] 纵横嵌入术, 科学出版社, 北京, 1994.

[30] 运输, 配置, 定向, 划分及其他, 第三届全国运筹学会会刊, 成都, 1992, 500–507.

[31] A polyhedral theory on graphs, *Acta Math. Sinica*, New Series **10** (1994), 136–142.

[32] Combinatorial invariants on planar graphs, *Acta Math.Sinica*, New Series **11** (1995), 211–220.

[33] 图的可嵌入性理论, 科学出版社, 北京, 1994.

[34] *Embeddability in Graphs*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 1995.

[35] 组合地图进阶, 北方交通大学出版社, 北京, 2003.

[36] 地图的代数原理, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[37] 组合地图的不对称化, 沈阳师范大学学报(NS), **23**(2005), 97–103.

[38] 图的曲面嵌入 I, 天津理工学院学报, **19**(2003), 2: 1–5.

[39] 图的曲面嵌入 II, 天津理工学院学报, **19**(2003), 3: 1–5.

[40] 纵横布局论, 中国铁道出版社, 北京, 1997.

[41] 论多面形 - 曲面 - 嵌入 - 地图, 吉首大学学报(NS), **28**(2007), 1–6.

[42] 图论与算法(讲义), 中国科学院研究生院, 1979.

[43] Boolean approaches to graph embeddings related to VLSI, *Sience in China* (Series A), **44**(2001), 1034–1041.

[44] *Theory of Polyhedra*, Science Press, Beijing, 2008.

[45] *Enumerative Theory of Maps*, Kluwer, Dordrecht/ Boston/ London, 1999.

[46] *Topological Theory on Graphs*, USTC Press, Hefei, 2008.

[47] *General Theory of Map Census*, Science Press, Beijing, 2009.

[48] New approaches to the double cover conjecture of graphs, *OR Trans.*, **4**(2000), 50–54.

[49] A new method for counting rooted treen with wertexpasrtition, *Sciences in China*, **A51** (2008), 2000–2004.

Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi

[1] At most single-bend embeddings of cubic graphs, Research Report SI-92/01, Dept. Computer Science, Uni. "La Sapien- za" of Rome, 1992. Also in *Applied Math.* (A J. Chinese Unis.), **B9** (1994), 127–142.

Liu, Y.P.-P. Marchioro-R. Petreschi-B. Simeone

[1] Theoretical results on at most 1-bend embeddability of graphs, Research Report Series A No.3, Department of Statistics, University of Rome "La Sapienza", 1990; Also in *Acta Math. Appl. Sinica*, Eng. Series **8** (1992), 188–192.

[2] On theoretical results of at most 1-embeddability of graphs, *Chinese Science Bulletin*, **36** (1991), 1054–1055.

Liu, Y.P.-A. Morgana-B. Simeone

[1] On the general theoretical results for rectilinear embeddability of graphs, *KEXUE TONGBAO* (Chinese Ed.), **35** (1990), 1513–1514.

[2] Or see *Chinese Science Bulletin(KEXUE TONGBAO)*, English Ed.), **36** (1991), 1490.

[3] General theoretical results on rectilinear embeddability of graphs, Research Report Series A, No.2, Department of Statistics, University of Rome " La Sapienza", 1990; Also in *Acta Math. Appl. Sinica*, Eng. Series **7** (1991), 187–192.

[4] A linear time algorithm for 3-bend embeddings of planar graphs in the grid, Research Report, Ser.A, No.1, Dept. Statistics, Uni. "La Sapienza", Rome, 1993.

[5] A graph partition problem, Research Report, No.27, Inst. Appl. Math., Acad. Sinica, 1992.

[6] Another linear time algorithm for finding 3-embeddings of a graph, Research Report, No.1, Inst. Appl. Math., Acad. Sinica, 1994.

[7] Characterizations of a kind of orientations of a graph, Research Report, No.2, Inst. Appl. Math., Acad. Sinica, 1994.

Liu, Yi.(刘莹)-Y.P. Liu

[1] A characterization of the embeddability of graphs on the surface of given genus, *Chin. Ann. Math.*, **17B**(1996), 457–462.

[2] Embeddability of graphs on surfaces, *J. Northern Jiaotong Univ.*, **21** (1997), 2: 127–136.

[3] Embeddings of one kind of graphs, *Appl. Math. -JCU*, **12B**(1997), 253–258.

[4] Lower bound number of irreducible graphs on surfaces, *Acta Math. Sientia*, **18**(1998), 333–339.

Lodi, E.-F. Luccio-L. Pagli

[1] A preliminary study of diagonal channel-routing model, *Algorithmica*, **4** (1989), 585–597.

Lomonosov, M.V.

[1] Multiflow feasibility depending on cuts, *J. Graph Theory News-letters*, **9** (1979), 1: 4.

Lovasz, L.

[1] *Combinatorial Problems and Exercises*, North-Holland, 1979.

Lovasz, L.-M.L. Marx

[1] A forbidden subgraphs characterization of Gauss codes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82** (1976), 121–122.

Ren, H(任韩)-Y.P. Liu-D.J. Ma(马登举)-J.J. Lu(卢俊杰)

[1] Generating cycle spaces for graphs on surfaces with small genera, *European J. Combin.*, 25(2004), 1087–1105.

MacLane, S.

[1] A structural characterization of planar combinatorial graphs, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 460–472.

[2] A combinatorial condition for planar graphs, *Fund, Math.*, **28** (1937), 22–32.

MacLane, S.-G. Birkhoff

[1] *A Survey of Modern Algebra*(4-th Ed.), Macmilian, New York, 1977.

Marx, M.L.

[1] The Gauss realizability problem, *Trans. AMS*, **134** (1972), 612–613.

Massy, W.S.

[1] *Algebraic Topology*: An Introduction, Harcourt, New York, 1967.

Mateti, P.-N. Deo

[1] On algorithms for enumerating all circuits of a graph, *SIAM J. Comput.*, **5** (1976). 90–99.

Matzumoto, K.-T. Nishizeki-N. Saito

[1] An efficient algorithm for finding multicommodity flows in planar networks, *SIAM J. Comput.*, **14** (1985), 289–302.

Maxwell, N.M.-R.E. Saeks

[1] An application of the 4-color theorem to network theory, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir. Syst., 1965, 727–731.

Mayer, J.

[1] Ineqalites nouvelle le probleme des quatre couleurs, *J. Comb. Theory*, **B19** (1975), 119–149.

Melikhov, A.N.-V.M. Kuleychik-V. V. Lisyak

[1] Partition of a graph into plane subgraphs (in Rassian), *Cybernetics*, **10** (1972), 1087–1090.

Meyniel, H.

[1] Les 5-colorations d'un graphe planaire forment une classe de commutation unique, *J. Comb. Theory*, **B24** (1978), 251–257.

Milgram, M.

[1] Irreducible graphs I, *J. Comb. Theory*, **B12** (1972), 6–31; II, ibid., **B14** (1973), 7–45.

Mitchem, J.

[1] Hamitonian and Eulerian properties of entire graphs, *Lect. Notes in Math.*, **303**, Graph Theory and Applications, Springer, 1972, 189–196.

Mondshein, L.

[1] Combinatorial ordering and embedding of graphs, Tech. Note 1971–35, Lincohn Lab., M.I.T., 1971.

Montanari, U.G.

[1] Separable graphs, planar graphs and web grammars, *Inf. Control*, **16** (1970), 243–267.

Mount, D.M.

[1] on finding shortest paths on convex polyhedra, Tech. Rep., Comput. Sci. Dept., Uni. Maryland, 1984.

Mullin, R.C.-P.J. Schellenberg

[1] The enumeration of c-nets via quadrangulations, *J. Comb. Theory*, **4** (1968), 259–276.

NashWilliams, C.St.J.A.

[1] Edge-disjoint spanning trees of finite graphs, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 445–450.

Okamula, H.-P.D. Seymour

[1] Multicommodity flows in planar graphs, *J. Comb. Theory*, **B31** (1981), 75–81.

Ore, O.

[1] *Theory of Graphs*, AMS, 1962.

[2] *The Four Color Problem*, Acad. Press, 1967.

Ore, O.-J. Stemple

[1] Numerical calculations on the four-color problem, *J. Comb. Theory*, **8** (1970), 65–78.

Orlowski, M.

[1] A new algorithm for the largest empty rectangle problem, *Algrorithmica*, **5** (1990), 65–73.

Owens, A.B.

[1] Graphs and printed circuit embeddings, A survey and bibliography, Naval Res. Lab., Washington D. C., Bibl. No. 33, 1969.

Paton, K.

[1] An algorithm for finding a fundamental set of cycles of a graph, *Comm. ACM*, **12** (1969), 514–518.

Picard, C.

[1] Graphes complementaires et graphes planaires, *Rev.Francais Informat. Rech. Operat.*, **8** (1964), 329–343.

Platt, C.R.

[1] Planar lattices and planar graphs, *J. Comb. Theory*, **B21** (1976), 30–39.

Plesnevic, G.S.

[1] Embedding a graph in the plane, *Vycislitellnye Sistemy*, **6** (1963), 45–53.

Plummer, M.

[1] On the cyclic connectivity of planar graphs, *Lect. Notes in Math.*, **303** (1972), 234–242.

Pralts, J.L.

[1] *Computer Data Structure*, McGraw-Hill, 1977.

Read, R.C.

[1] *Graph theory algorithms, Graph Theory and its Applications* (ed. by B. Harris), Acad. Press, 1970, 51–78.

[2] A note on tiling rectangles with dominoes, *Fibonacci Quart.*, **18**: 1 (1980), 24–27.

[3] The dimer problem for narrow rectangular arrays: a unified method of solution, and some extensions, *Aequationes Math.*, **24** (1982), 47–65.

Read, R.C.-P. Rosenstiehl

[1] On the Gauss crossing problem, *Combinatorics*(eds. by Hajnal *et al*), North-Holland, 1978, 843–876.

Reidemeister, K.

[1] *Knot Theory* (English Edition), BCS Associate, 1883.

Reif, J.H.

[1] Minimum s-t cut of a planar undirected network in $O(n\times \log^2 n)$ time, *SIAM J. Comput.*, **12** (1983), 71–81.

de Rezende, P.J.-D.T. Lee-Y.F. Wu

[1] Rectilinear shortest paths in the presence of rectangular barriers, *Discrete Comput. Geom.*, **4** (1989), 41–53.

Richter, B.

[1] Cubic graphs with crossing number two, *J. Graph Theory*, **12**:3 (1988), 363–374.

Rim, C.S.-*et al*

[1] Exact algorithms for multilayer topotogical via minimization, *IEEE Trans. CAD*, **8** (1989), 1165–1173.

Ringel, G.

[1] The torodial thickness of the complete graphs(in German), *Math. Z.*, **87** (1985), 14–26.

[2] Farbungsprobleme auf Flachen und Graphen, VEB Deuts- cher Verlag der Wissens-chafteng, 1959.

[3] *Map Color Theorem*, Springer, 1974.

Robertson, N.-P. Seymour

[1] Graph minors VIII: Kuratowski theorem for general surfaces, *J. Comb. Theory*, **B48** (1990), 255–388.

[2] Generalizing Kuratowski's theorem, *Cong.Numer.*, **45** (1984), 129–138.

[3] Graph minors - A survey, in Survey in Combinatorics, 153–171, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., Vol.105, Cambridge Uni. Press, 1975.

Robinson, D.J.S.

[1] *A Course in the Theory of Groups*, Springer, New York, 1982.

Roman, S.

[1] *Advanced Linear Algebra*, Springer, New York, 1992.

Rose, N.A.-J.V. Oldfield

[1] Printed - wiring - board layout by computer, *Electronics and Power*, **Oct.** (1971), 376–379.

Rosenstiehl, P.

[1] Bicycles et diagonales des graphes planaires, Colloq. sur Theorie des Graphes, Paris, 1974; Also in *Cahier Centre Etudes Rech. Oper.*, **17** (1975), 365–383.

[2] Caracterisation des graphes planaires par une diagonale absreacte, *Cong. Numer.*, **15**(1976), 521–527.

[3] Preuve algebrique du critere de planarite de Wu(吴文俊)– Liu(刘彦佩), *Ann. Discrete Math.*, **9** (1980), 67–78.

[4] Solution algebrique du probleme de Gauss sur la permutation des points d'intersection

d'une ou plusieurs courbes fermees du plan, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, t.**283**:8 (1976), 551–553.

Rosenstiehl, P.-R.C. Read

[1] On the principal edge tripartition of a graph, *Ann. Discrete Math.*, **3** (1978), 195–226.

Rosenstiehl, P.-R. Tarjan

[1] Rectilinear planar layouts and bipolar presentations of planar graphs, *Discrete Comput. Geom.*, **1** (1986), 343–353.

[2] Gauss codes, planar Hamiltonian graphs and stack-sortable permutations, *J. Algorithms*, **5** (1984), 375–390.

Rubin, F.

[1] A note on Lerda and Majoronic's minimum crossing algorithm, *Calcolo*, **11** (1974), 201–203.

[2] An algorithm for testing the planarity of a graph, IEEE Computer Group Repositery, R74–73, 1974.

[3] An improved algorithm for testing the planarity of a graph, *IEEE Trans. on Computers*, C-**24** (1975), 113–121.

Saab, Y.G.-V.B. Rao

[1] Fast effective heuristics for the graph bisectioning problem, *IEEE Trans. CAD*, **9** (1990), 91–98.

Saaty, T.L.

[1] Remarks on the four-color problem: The Kempe catastrophe, *Math. Mag.*, **40** (1967), 31–36.

[2] Thirteen colorful variations on Guthries four-color conjecture, *Amer. Math. Monthly*, **79** (1972), 2–43.

Sachs, D.

[1] Graphs, matroids and geometric lattices, *J. Comb. Theory*, **9** (1970), 192–199.

Sarrafzadeh, M.-D.T. Lee

[1] A new approach to topological via minimization, *IEEE Tran. CAD*, **8** (1989), 890–900.

Schrijver, A.

[1] Distances and cuts in planar graphs, *J. Comb. Theory*, **B46** (1989), 46–57.

Schweikert, D.G.-B.W. Kermighan

[1] A proper model for the partitioning of electrical circuits, Proc. 9-th Design Autom. Worhshop, Dallas, 1971, 57–62.

Serre, J.P.

[1] *Trees*, Springer, 1980.

Seymour, P.D.

[1] On odd cuts and plane multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc.*, **42** (1981), 3: 178–192.

[2] Nowhere- zero 6-flows, *J. Comb. Theory*, **B30** (1981), 130–135.

[3] On Tutte's extension of the four color problem, *J. Comb. Theory*, **B31** (1981), 82–94.

[4] Matroid representation over $GF(3)$, *J. Comb. Theory*, **B26** (1979), 159–173.

[5] Decomposition of regular matroids, *J. Comb. Theory*, **B28** (1980), 305–359.

Shank, H.

[1] The theory of left - right paths, Combinatorical Mathematics III, *Lect. Notes in Math.*, **452**, Springer, 1975, 42–54.

Shao, Z.L.(邵泽玲)-Y.P. Liu

[1] Genus embeddings of a type of graphs, *J. Appl. Math. Computing*, 28(2008), 69–77.

[2] Genus distributions of orientable embeddings for two types of graphs, *Australian J. Combin.*, 41(2008), 205–217.

Sharir, M.

[1] On shortest paths amidst convex polyhedra, *SIAM J. Comput.*, **16** (1987), 561–572.

Sharir, M.-A. Schorr

[1] On shortest paths in polyhedral spaces, *SIAM J, Comput.*, **15** (1980), 193–215.

Shih, Z.C.-R.C.T. Lee-S.N. Yang

[1] A systolic algorithm for extracting regions of a planar graph, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, **47** (1989), 227–242.

Shirakawa, I.-H. Takahashi-H. Ozaki

[1] On the decomposition of a graph into planar subgraphs, *J. Franklin Inst.*, **238** (1987), 379–388.

[2] On the planar decomposition of a complete bipartite graph, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**, 404–416.

Shirey, R.W.

[1] Implementation and analysis of efficient graph planarity testing algorithms, Ph. D. Thesis, Uni. Wisconsin, 1969.

Skoviera, M.-R. Nedela

[1] Maximum genus of a graph and doubly Eulerian trails, *Bollettino U. M. I.*, **4-B**(1990), 7: 541–551.

Skupien, Z.

[1] Locally Hamiltonian graphs and Kuratowski theorem, *Bull.Acad.Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.*, **13** (1965), 615–619.

[2] Locally Hamltonian and planar graph, *Fund. Math.*, **58** (1966), 193–200.

Stacey, K.C.-D.A. Holton

[1] On the automorphism group of a tree, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 10–25.

Stahl, S.

[1] Generalized embedding schemes, *J. Graph Theory* **2** (1978), 41–52.

[2] A combinatorial analog of the Jordan curve theorem, *J. Comb. Theory*, **B35** (1983), 1-21.

Stahl, S.-L.W. Beineke

[1] Blocks and non-orientable genus of graphs, *J. Graph Theory*, **1** (1977), 75–78.

Stepanec, G.F.

[1] Basis systems of vector cycles with extremal properties (in Russian), *Uspekhi Mat. Nauk*, **19** (1964), 171–175.

Stillwell, J.

[1] *Classical Topology and Conbinatorial Group Theory*, Springer, New York, 1980.

Storer, J.A.

[1] The node cost measure for embedding graphs in the planar grid, Proc. 12-th ACM Symp. Comput., 1980, 201–210.

Stremquist, W.

[1] The four color theorem for small maps, *J. Comb. Theory*, **B19** (1975), 256–268.

Sun, X.R.(孙晓荣)

[1] 关于吴 (文俊)- 刘 (彦佩) 定理判别图的平面性的复杂性 (in Chinese with English abstract), 计算机学报, **12**(1989), 1: 33–37.

[2] 吴 (文俊)- 刘 (彦佩) 定理与图的平面性判别, 硕士学位论文, 中国科学院应用数学研究所, 1987.

Syslo, M.M.

[1] An efficient cycle vector space algorithm for listing all cycles of a planar graph, *SIAM J. Comput.*, **10** (1981), 797–808.

Tamassia, R.

[1] On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends, *SIAM J. Comput.*, **16** (1987), 421–444.

Thistlethwaite, M.B.

[1] A spanning tree expansion of the Jones polynomial, *Topology*, **26** (1987), 197–309.

Thomassen, C.

[1] Planar and infinite hypohamiltonian and hypotraceable gra- phs, *Discrete Math.*, **14** (1976), 377–389.

[2] Rectilinear drawings of graphs, *J. Graph Theory*, **12** (1988), 335–341.

Ting, B.S.-E.S. Kuh-I. Shirakawa

[1] The multilayer routing problem: some necessary and sufficient conditions, Memo ERL-M559, College of Engineering, Uni. Calf., Berkley, Ca., 1975.

[2] The multilayer routing problem: algorithms and necessary and sufficient conditions for the single - row single–layer case, *IEEE Trans. Cir. Syst.*, Case-**23** (1976), 768–778.

Titus, C.J.

[1] A theory of normal curves and some applications, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1083–1096.

Treybig, L.B.

[1] A characterization of the double point structure of the projection of a polygonal knot in regular position, *Trans. AMS*, **130** (1968), 223–247.

Trotter, H.F.

[1] Noninvertible knots, *Topology*, **2** (1964), 275–280.

Trotter, W.T.-J.I. Moore Jr.

[1] The dimension of planar posets, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 54–67.

Truemper, K.

[1] On balanced matrices and Tutte's characterization of regular matroids, *J. Comb. Theory*, **B32** (1982), 112–139.

Tutte, W.T.

[1] On the non-biplanar character of the complete 9-graph, *Canad. Math. Bull.*, **6** (1963), 319–330.

[2] The thickness of a graph , *Indag. Math.*, **25** (1963), 567–577.

[3] Bridges and Hamiltonian circuits in planar graphs, *Aequa. Math.*, **15** (1977), 1–33.

[4] A class of Abelian groups, *Canad. J. Math.*, **8** (1956), 13–28.

[5] The subgraph problem, *Ann. Discrete Math.*, **3** (1978), 289–295.

[6] On the four color conjecture, *Proc. London Math. Soc.*, **50** (1948), 137–149.

[7] A theorem on planar graphs, *Trans. AMS*, **82** (1956), 99–116.

[8] How to draw a graph, *Proc. London Math. Soc.*, Ser.3, **13** (1963), 743–768.

[9] A homotopy theorem for matroids I, *Trans. AMS*, **88** (1958), 144–160.

[10] A homotopy theorem for matroids II, *Trans. AMS*, **88** (1958), 161–174.

[11] Matroids and graphs, *Trans. AMS*, **90** (1959), 527–552.

[12] An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic, *Proc. AMS*, **11** (1960), 905–917.

[13] A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Can. J. Math.*, **6** (1954), 80–91.

[14] On the problem of decomposing a graph into n connected factors, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 221–230.

[15] Convex representations of graphs, *Proc. London Math. Soc.*, **10** (1960), 304–320.

[16] Toward a theory of crossing numbers, *J. Comb. Theory*, **8** (1970), 45–53.

[17] *Connectivity in Graphs*, Oxford Uni. Press, 1966.

[18] *Introduction to the Theory of Matroids*, Amer. Elsevier, 1971.

[19] *Graph Theory*, Encycl. Math. **21**, Addison-Wesley, 1984.

[20] *Graph Theory as I have known it*, Oxford, London, 1998.

Tutte, W.T.-H. Whitney

[1] Kempe chains and four color problem, *Utilitas Math.*, **2** (1972), 241–281.

Ulrich, J.W.

[1] A computational theory of planar embedding, Ph. D. Thesis, Uni. Texas, Austin, 1968.

[2] A characterization of planar oriented graphs, *SIAM J. Appl. Math.*, **18** (1970), 364–371.

Unger, P.

[1] A theorem on planar graphs, components, and subgraphs, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 256–262.

Valiant, L.G.

[1] Universality consideration in VLSI circuits, *IEEE Trans. Comput.*, C-**30** (1981), 135–140.

Vanlier, M.C.-R.H. Otten

[1] On the mathematical formulation of the wiring problem, *Inter. J. Cir. Theory Appl.*, **1** (1973), 137–147.

Vartak, M.N.-H. Narayanan

[1] New proof of 4- colourability of a class of graphs, *J. Indian Math. Soc.* (N.S.), **38** (1974), 201–205.

Vince, A.-C. H. C. Little

[1] Discrete Jordan curve theorem, *J.Comb.Theoty*, **B47** (1989), 251–261.

Walsh, T.R.S.

[1] Characterizing the vertex neighbourhoods of semi-regular polyhedra, *Geometriae Dedicata*, **1** (1972), 117–123.

Walther, H.

[1] On the number of vertices in a longest circuit in a planar cubic 3-vertex connected graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **2** (1967), 391–398.

Wan, L.X.(万良霞)-Y.P. Liu

[1] 一类新图类的可定向嵌入的亏格分布, 北京交通大学学报, **26**(2005), 65–68.

[2] Orientable embedding distributions by genus for certain type of non-planar graphs, *Ars Combin.*, **79**(2006), 97–105.

[3] Orientable embedding distributions of certain types of graphs, *J. Combin. Theory*, **B98**(2008), 19–32.

[4] 纵横扩张的优化, 高校应用数学学报, **18A**(2003), 350–356.

Wang, H.Y.(王慧燕)-Y.P. Liu

[1] 一类直径为 3 的 2- 连通图的最大亏格, 信阳师范学院学报(NS), **17** (2004), 381–384.

Wang, L.D.(王立东)-Y.P. Liu

[1] 图的双极定向的一种新算法, 沈阳师范大学学报(NS), **27**(2009), 1: 20–23.

Wang, T.(王涛)-Y.P. Liu

[1] Implements of some new algorithms for combinatorial maps, *OR Trans.*, **12**(2008), 2: 58–66.

Wei, E.L.(魏二玲)

[1] Equivalence of auxiliary graph and signed triple graph, *J. Graduate School CAS*(in Chines with English abstract), **21**(2004), 451–453.

[2] 单节点图的弱最大亏格, 运筹学学报, **12**(2008), 125–128.

Wei, E.L.-Y.P. Liu

[1] 一类图的强最大亏格嵌入, 北方交通大学学报, **26**(2002), 19–21.

[2] Weak embedding of planar graphs, *J. Appl. Math.& Comput.*, **21**(2006), 175–187.

[3] A note of interpolation theorem, Proc. 9th Bellam Continuum: International Workshop on Uncertain System and Soft Computing, Beijing, china, July 24–27, 2002, 318–322.

[4] 完全二部图的少面数强嵌入, 曲阜师范大学学报, **29**(2003), 1–5.

[5] 单节点图的弱最大亏格, 运筹学学报, **12**(2008), 125–128.

[6] 极大外平面图的不可定向强最大亏格, 数学学报, **50**(2007), 527–534.

Weinberg, L.

[1] On the maximum order of the automorphism group of a planar triply connected graphs, *J. SIAM Applied Math.*, **June** (1966).

[2] A simple and efficient algorithm for determining isomorphism of planar triply connected graphs, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT- **13** (1966), 142–148.

[3] Plane representations and codes for planar graphs, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir. Syst., 1965, 733–744.

[4] Algorithms for determining automorphism groups for planar graphs, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir, Syst., 1965, 913–929.

[5] Additional simple codes for planar graphs, Proc. 4-th Allerton Conf. Cir. Syst., 1966.

[6] Alternative algorithms for determining isomorphism, automorphisms and automorphism groups of planar graphs, Proc. 4-th Allerton Conf. Cir. Syst., Uni. Ill., 1966.

[7] Two new characterizations of planar graphs, Proc. 5-th Allerton Conf. Cir. Syst., 1967, Uni. Ill., 1967.

[8] Planar graphs and matroids, *Lect. Notes in Math.*, **303**, Springer, 1972, 313–329.

Weinberg, L.-P. Slepian

[1] Series-parallel networks, *IRE Trans. PGCT*, CT-**4**:3 (1957).

Welsh, D.J.A.

[1] *Matroid Theory*, Acad. Press, 1976.

de Werra, D.

[1] How to color a graph, a survey, in *Combinatorial Programming*: Methods and Applications, D. Reidel Publ. Comp., 1975, 305–323.

White, A.T.

[1] *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland, 1973.

White, N.L.

[1] *Theory of Matroids* (ed.), Cambridge Uni. Press, 1986.

[2] *Combinatorial Geometries* (ed.), Cambridge Uni. Press, 1987.

[3] *Matroid Applications* (ed.), Cambridge Uni. Press, 1992.

Whitney, H.

[1] A theorem on graphs, *Ann. Math.*, **32** (1931), 378-390.

[2] Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.*, **54** (1932), 150–168.

[3] A set of topological invariants for graphs, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 231–235.

[4] On the classification of graphs, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 236–244.

[5] The coloring of graphs, *Ann. Math.*, **33** (1932), 688–718.

[6] Non-separable and planar graphs, *Trans. AMS*, **34** (1932), 339–362.

[7] Planar graphs, *Fund. Math.*, **21** (1933), 73–84.

[8] 2-isomorphic graphs, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 245–254.

[9] On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.*, **4** (1937), 276–284.

[10] On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 509–533.

Wilde, P.J.

[1] Matroids with given restrictions and contractions, *J. Comb. Theory*, **B22** (1977), 122–130.

Willamson, S.G.

[1] Embedding graphs in the plane - algorithm aspects, *Ann. Discrete Math.*, **6** (1980), 349–384.

Williams, N.H.

[1] *Combinatorial Set Theory*, North - Holland, 1977.

Winn, C.E.

[1] On the minimum number of polygons in an irreducible map, *Amer. J. Math.*, **62** (1940), 406–416.

Wing, O.

[1] On drawing a planar graph, *IEEE Trans. Cir. Theory*, **13** (1966), 112–114.

Witten, E.

[1] Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 351–399.

Wong, D.F.

[1] Floorplan design of VLSI circuits, *Algorithmica*, **4** (1989), 263–291.

Wu , W.T.(吴文俊)

[1] 可剖形在欧氏空间的实现问题, 数学学报, **5** (1955), 505–552.

[2] 线性图的平面嵌入, 科学通报, **19**: 2 (1974), 226–228.

[3] Rational Homotopy Type, *Lect. Notes in Math.*, **1246**, Springer, 1987.

[4] 集成电路设计中的数学问题, 数学的实践与认识, No.1 (1973), 20–40.

[5] On the planar embedding of linear graphs I, *J. Syst. Sci. Math.*, **5** (1985), 290–320.

[6] On the planar embedding of linear graphs II, *J. Syst. Sci. Math.*, **6** (1986), 23–35.

Xu, W.X.(徐伟宣)

[1] An efficient algorithm for planarity testing based on Wu(吴文俊)– Liu(刘彦佩)'s criterion, Proc. 1-st China-USA Conf. Graph Theory and its Applications, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **576** (1989), 641–652.

Xue, C.L.(薛春玲)-Y.P. Liu

[1] 类路树的标号与带宽, 北方交通大学学报, **25**(2001), 6:91–96.

[2] 强连通弧对称有向图的超弧连通性, 曲阜师范大学学报(自然科学版), **28**(2002), 1: 45–47, 92.

Xuong, N.H.

[1] How to determine the maximum genus of a graph, *J. Comb. Theory*, **B26** (1979), 217–225.

Yang, Y.(杨艳)-Y.P. Liu

[1] Flexibility of embeddings of bouquets of circles on the projective plane and Klein bottle, *The Electronic J. Combin.*, 14(2007), #R80, 1-12.

Yannakakis, M.

[1] Embedding planar graphs in four pages, *J. Comput. Syst. Sci.*, **38** (1989), 36–67.

Yao, X.-M. Yamada-C.L. Liu

[1] A new approach to the pin assignment problem, *IEEE Trans. CAD*, **8** (1989), 999–1006.

Yoshida, K.-T. Nakagawa

[1] Topological layout design of monolithic IC in CAD, in Digest ISSCC Philadelphia, PA, 1969, 136–137.

Youngs, J.W.T.

[1] Minimal embeddings and the genus of graphs, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), 353–315.

Yu, Z.W.(于紫薇)-Y.P. Liu

[1] 路状网络的最优连接及最优定位问题, 北方交通大学学报, **25**(2001), 6: 103–108.

Yu, Q.(俞勤)-Y.P. Liu-Y. Yang

[1] 两类 4- 正则图的最小折数纵横扩张, 北京交通大学学报, **30** (2006), 12: 77–80, 84.

Zaks, J.

[1] Pairs of Hamiltonian circuits in 5-connected planar grapphs, *J. Comb. Theory*, **B21** (1976), 116–131.

Zhao, L.M.(赵鲁闽)-Y.P. Liu

[1] 一类布线问题求解的判别准则和算法, 北京交通大学学报, **31**(2007), 3: 71-75.

Zhao, X.M.(赵喜梅)-Y.P. Liu

[1] 类树图的亏格多项式问题, 北方交通大学学报, **28**(2004), 7–11.

[2] 树类图亏格分布的单峰性, 山西大学学报(NS), **29**(2006), 3:242–244.

[3] 类圈图的亏格分布, 数学物理学报, **28**(2008), 4: 768–778.

Zhu, Z.L.(朱子龙)-Y.P. Liu

[1] 两类图的亏格分布, 沈阳师范大学学报(NS), **24**(2006), 1–5.

Zykov, A.A.

[1] *Foundations of Graph Theory* (in Russian), Nauka, 1987.

术 语 索 引

符 号

E

F

G

H

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

W

X

Y

作 者 索 引

X

Y

Z

《现代数学基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯 召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯 召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林、杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军、张　祥、董梅芳　编著
71　随机分析学基础（第二版）　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚、马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎、陆传荣、张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯、顾凡及、蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒、李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川、崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙、李登峰、谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷、吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群、尹景学、王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格（第二版）　2003.10　万哲先、霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版）　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩、周义仓、王稳地、靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正、刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林、闫宝强、刘衍胜　著
97　代数学中的Frobenius结构　2005.7　汪明义　著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编
132 图的可嵌入性理论(第二版) 2010.3 刘彦佩 著